Canguru Matemático sem Fronteiras 2011

http://www.mat.uc.pt/canguru/

Categoria: Estudante Duração: 1h30min

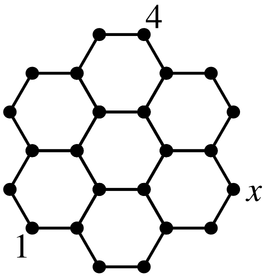
Destinatários: alunos do 12.° ano de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correcta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Em cada um dos pontos da figura pretendemos escrever um número de tal modo que a soma dos dois números colocados nas extremidades de cada um dos segmentos marcados seja igual para todos os segmentos. Dois dos números já se encontram escritos. Qual é o valor de x?



(A) 1 (B) 3

(C) 4 (D) 5

(E) É necessária mais informação

2. O Miguel, o Fernando e o Sebastião participaram numa corrida. Imediatamente após o início da corrida o Miguel ia em primeiro, o Fernando em segundo e o Sebastião em terceiro. Durante a corrida o Miguel e o Fernando trocaram de lugares, entre si, 9 vezes, o Fernando e o Sebastião trocaram 10 vezes e o Miguel e o Sebastião 11 vezes. Por que ordem terminaram a corrida?

(A) Miguel, Fernando e Sebastião (B) Fernando, Sebastião e Miguel

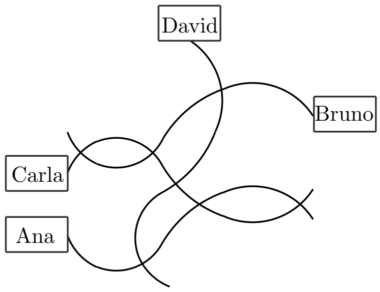
(C) Sebastião, Miguel e Fernando (D) Sebastião, Fernando e Miguel

(E) Fernando, Miguel e Sebastião

3. Se $2^x = 15$ e $15^y = 32$ então o valor de xy é

(A) 5 (B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ (C) $\log_2 47$
(D) 7 (E) $\sqrt{47}$

4. Durante uma viagem de barco com o mar muito agitado a Joana tentou desenhar um mapa da sua aldeia. Conseguiu desenhar as quatro ruas com os seus sete cruzamentos e as casas dos seus amigos, mas de forma pouco precisa. Na realidade, a Rua da Seta, a Rua da Régua e a Rua do Prego são em linha recta. A quarta rua é a Rua Sinuosa. Quem vive na Rua Sinuosa?

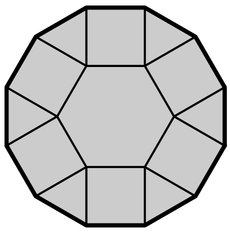


(A) Ana (B) Bruno
(C) Carla (D) David
(E) É necessário um mapa melhor para se poder responder

5. Os números de quatro algarismos, cuja soma dos algarismos é 4, estão escritos por ordem decrescente. Em que posição da lista está o número 2011?

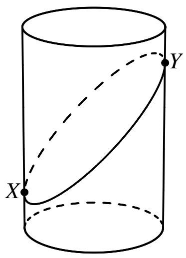
(A) 6.ª (B) 7.ª (C) 8.ª (D) 9.ª (E) 10.ª

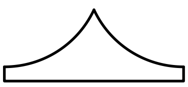
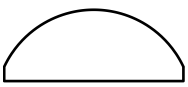
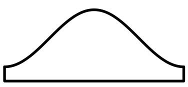
6. Na figura está representado um polígono constituído por um hexágono regular, cujo lado mede $1\,cm$, seis triângulos e seis quadrados. Qual é o perímetro desse polígono?

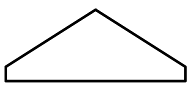


(A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)\,cm$ (B) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\,cm$
(C) $12\,cm$ (D) $6+3\sqrt{2}\,cm$ (E) $9\,cm$

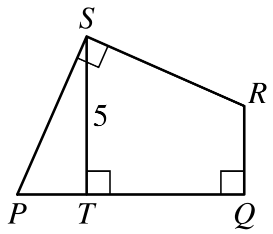
7. Uma folha de papel rectangular é enrolada à volta de um cilindro. Faz-se um corte por um plano que passe pelos pontos X e Y, seccionando o papel e o cilindro, tal como mostra a figura. Qual é a forma que resulta se desenrolarmos a parte de baixo da folha de papel?



(A)

(B)

(C)

(D)

(E)


8. O quadrilátero $[PQRS]$ representado na figura é tal que $\overline{PS} = \overline{SR}$, $\overline{ST} = 5\,cm$ e $P\hat{S}R = R\hat{Q}P = Q\hat{T}S = 90°$. A área do quadrilátero $[PQRS]$ é

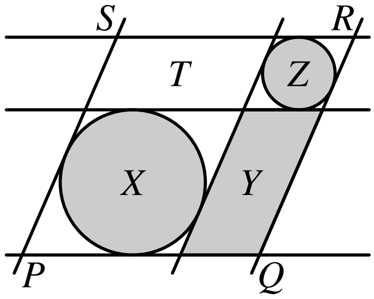


(A) $20\,cm^2$ (B) $22,5\,cm^2$ (C) $25\,cm^2$
(D) $27,5\,cm^2$ (E) $30\,cm^2$

9. O André escreveu todos os números ímpares de 1 a 2011 no quadro e o Luís apagou todos os múltiplos de 3. Quantos números ficaram escritos no quadro?

(A) 335 (B) 336 (C) 671 (D) 1005 (E) 1006

10. Na figura estão representadas três rectas horizontais e três rectas oblíquas, paralelas entre si. Cada uma das circunferências representadas é tangente a exactamente quatro das rectas. As medidas das áreas das regiões sombreadas são X, Y e Z, como se mostra na figura, e a medida da área do paralelogramo $[PQRS]$ é W. Dos quatro valores X, Y, Z e W, quantos são precisos, no mínimo, para calcular a medida da área do paralelogramo T?



(A) A medida da área de T não pode ser calculada a partir de X, Y, Z e W.
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Problemas de 4 pontos

11. O Mário e o Hugo vão proceder ao lançamento simultâneo de um certo número de dados, com as faces numeradas de 1 a 6, para decidir quem é o primeiro a jogar no computador. Se não sair nenhum 6 será o Mário o primeiro a jogar, enquanto que se sair exactamente um 6 será o Hugo. Se sairem dois ou mais 6 não jogarão no computador durante todo o dia. Quantos dados devem lançar para que as probabilidades de cada um deles ser o primeiro a jogar sejam iguais?

(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) 17

12. O Afonso tem dois rectângulos de cartolina, um de dimensões 7×11 e outro de dimensões 4×8, e pretende cortar um terceiro rectângulo, de área máxima, de modo a que seja possível combinar os três rectângulos, sem espaços vazios e sem sobreposições, para construir um rectângulo maior. De que dimensões deve ser o terceiro rectângulo?

(A) 1×11 (B) 3×4 (C) 3×8 (D) 7×8 (E) 7×11

13. O Gonçalo preencheu as casas de uma grelha de dimensões 3×3 com números naturais, de tal modo que a soma dos números em cada quadrado de dimensões 2×2 é 10. A Ana apagou cinco dos números escritos pelo Gonçalo, ficando a grelha como se mostra na figura.

	2	
1		3
	4	

Qual dos valores seguintes pode ser igual à soma dos cinco números apagados pela Ana?

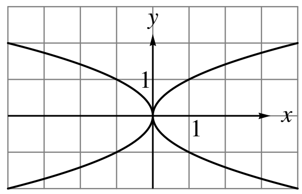
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13

(E) Nenhuma das hipóteses (A) a (D) é possível

14. Numa reunião internacional participaram 48 jovens. Seis destes jovens tinham exactamente um compatriota entre os 48 participantes, nove tinham exactamente dois compatriotas entre os 48 participantes e quatro tinham exactamente três compatriotas entre os 48 participantes. Os restantes jovens não tinham compatriotas a participar na reunião. Sabendo que nenhum dos jovens tinha mais do que uma nacionalidade, de quantas nacionalidades distintas eram os participantes na reunião?

(A) 19 (B) 25 (C) 31 (D) 36 (E) 48

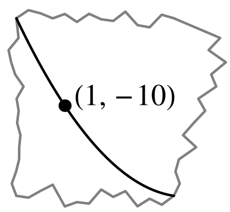
15. Dos gráficos das funções definidas por: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$ e $y = -\sqrt{|x|}$, quantos estão representados na figura seguinte?



(A) Nenhum (B) 2 (C) 4

(D) 6 (E) Todos os 8

16. No plano XOY, com os eixos posicionados do modo usual, o ponto de coordenadas $(1, -10)$ foi marcado sobre a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, após o que os eixos e quase toda a parábola foram apagados, ficando a figura seguinte. Qual das afirmações seguintes pode ser falsa?



(A) $a > 0$ (B) $b < 0$

(C) $a + b + c < 0$ (D) $b^2 > 4ac$ (E) $c < 0$

17. Os lados $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$, $[ST]$, $[TU]$ e $[UP]$ de um hexágono são todos tangentes a uma mesma circunferência. Sabemos que $\overline{PQ} = 4$, $\overline{QR} = 5$, $\overline{RS} = 6$, $\overline{ST} = 7$ e $\overline{TU} = 8$. Qual é o valor de $\overline{UP}$?

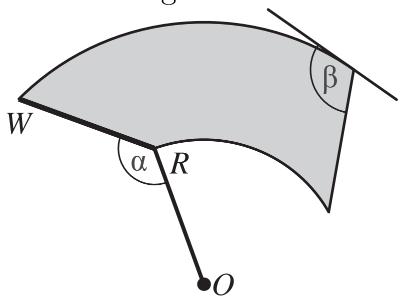
(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

(E) $\overline{UP}$ não pode ser calculado a partir desta informação

18. Qual é a soma de todos os números naturais, n, inferiores a 100 e tais que $n^2 - 81$ é um múltiplo de 100?

(A) 200 (B) 100 (C) 90 (D) 81 (E) 50

19. O limpa-pára-brisas do vidro traseiro de um modelo de carro é construído de tal modo que a lâmina de borracha, $[RW]$, e a haste $[OR]$ têm o mesmo comprimento e unem-se rigidamente segundo um ângulo fixo de amplitude α radianos. A lâmina de borracha gira em torno do centro O, limpando a região sombreada na figura.



O ângulo β, representado na figura, definido pela aresta direita da região que é limpa e a recta tangente à curva que delimita superiormente a mesma região, no canto superior direito, tem amplitude igual a

(A) $\frac{3\pi-\alpha}{2}$ radianos (B) $\pi-\frac{\alpha}{2}$ radianos (C) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ radianos
(D) $\frac{\pi}{2}+\alpha$ radianos (E) $\pi+\frac{\alpha}{2}$ radianos

20. O António e o João responderam, dizendo a verdade, a perguntas sobre os membros do seu clube de xadrez. O António disse: "Todos os membros do nosso clube são rapazes, com excepção de cinco raparigas". O João disse: "Em qualquer grupo de seis elementos do nosso clube há pelo menos quatro raparigas". Quantos membros tem o clube?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 18

Problemas de 5 pontos

21. Num cesto estão algumas bolas. Em cada bola está escrito um número natural. Em 30 das bolas está escrito um múltiplo de 6, em 20 das bolas está escrito um múltiplo de 7 e em 10 das bolas está escrito um múltiplo de 42. Qual é o menor número possível de bolas no cesto?

(A) 30 (B) 40 (C) 53 (D) 54 (E) 60

22. Quantas progressões aritméticas de números naturais, distintas, é que têm ambas as progressões aritméticas

$$5, 20, 35, \ldots \qquad \text{e} \qquad 35, 61, 87, \ldots$$

como subsucessões?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 26
(E) Uma infinidade

23. Uma caixa contém bolas, sendo cada uma delas de cor verde ou vermelha. A probabilidade de duas bolas tiradas da caixa, ao acaso e sem reposição, terem a mesma cor é $1/2$. Qual dos seguintes valores pode ser o número total de bolas na caixa?

(A) 81 (B) 101 (C) 1000 (D) 2011 (E) 10001

24. As funções f_1, f_2, ..., f_{2012}, reais de variável real, verificam as condições $f_1(x) = x$ e $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$, $n = 1, \ldots, 2011$. O valor de $f_{2011}(2011)$ é

(A) 2011 (B) $-\dfrac{1}{2010}$ (C) $\dfrac{2010}{2011}$ (D) 1 (E) -2011

25. Uma companhia aérea não cobra o transporte da bagagem dos seus passageiros até um certo limite de peso. Por cada quilograma extra, para além desse limite, é cobrada uma taxa. A bagagem do casal Boaviagem pesava 60 kg e, em conjunto, eles pagaram 3 euros de taxa. A bagagem do Sr. Viajante pesava o mesmo, mas ele pagou 10 euros e 50 cêntimos de taxa. Quantos quilogramas de bagagem pode um passageiro desta companhia levar, no máximo, sem pagar taxa por excesso de peso?

(A) 10 kg (B) 18 kg (C) 20 kg (D) 25 kg (E) 39 kg

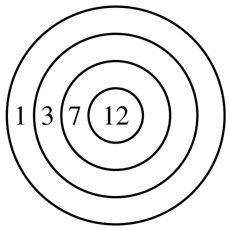
26. Na expressão

$$\frac{K \times A \times N \times G \times A \times R \times O \times O}{M \times E \times G \times A},$$

cada letra representa sempre o mesmo algarismo não nulo e letras distintas representam algarismos distintos. Qual é o menor valor, positivo e inteiro, possível da expressão?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

27. Num torneio de tiro ao alvo cada atirador dispara três setas contra um alvo. A pontuação obtida depende da região do alvo atingida, como se mostra na figura. Se um atirador acertar com as suas três setas no alvo, quantas possibilidades existem para os valores da sua pontuação?



(A) 13 (B) 17 (C) 19
(D) 20 (E) 21

28. Sejam a, b e c números naturais tais que $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Qual é o menor número possível de divisores de $a \times b \times c$?

(A) 30 (B) 49 (C) 60 (D) 77 (E) 1596

29. Vinte números naturais distintos estão escritos numa tabela 4×5. Quaisquer dois números em células com um lado comum têm pelo menos um divisor comum superior a 1. O menor valor possível do maior número escrito na tabela é

(A) 21 (B) 24 (C) 26 (D) 27 (E) 40

30. Um cubo de dimensões $3 \times 3 \times 3$ é composto por 27 cubos menores iguais. Um plano passando no centro do cubo maior, e perpendicular a uma das suas diagonais, quantos dos cubos menores intersecta?

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21