Canguru Matemático sem Fronteiras 2011

http://www.mat.uc.pt/canguru/

Categoria: Júnior Duração: 1h30min
Destinatários: alunos dos 10.° e 11.° anos de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

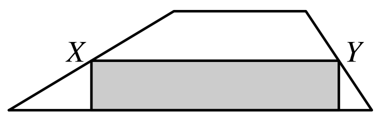
Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correcta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Uma passadeira tem faixas pretas e brancas alternadas, cada uma com 50 cm de largura. Qual é o comprimento de uma passadeira que tem 8 faixas brancas e começa e termina com uma faixa branca?

(A) 7 m (B) 7,5 m (C) 8 m (D) 8,5 m (E) 9 m

2. A área do rectângulo sombreado é 13 cm^2 e X e Y são os ponto médios dos lados do trapézio. Qual é a área do trapézio?



(A) 24 cm^2 (B) 25 cm^2 (C) 26 cm^2
(D) 27 cm^2 (E) 28 cm^2

3. O resto da divisão de 2011 por um certo número inteiro é igual a 1011. Então

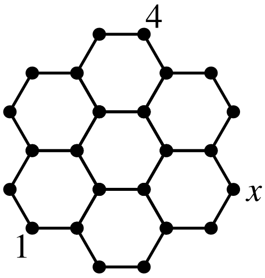
(A) o divisor é 100
(B) o divisor é 500
(C) o divisor é 1000
(D) o divisor é outro número inteiro
(E) não é possível obter este resto

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

4. Sabendo que $P = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5$, $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$ e $R = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $Q < P < R$ (B) $P < Q = R$ (C) $P < Q < R$ (D) $R < Q < P$ (E) $Q = P < R$

5. Em cada um dos pontos da figura pretendemos escrever um número de tal modo que a soma dos dois números colocados nas extremidades de cada um dos segmentos marcados seja igual para todos os segmentos. Dois dos números já se encontram escritos. Qual é o valor de x?



(A) 1 (B) 3
(C) 4 (D) 5
(E) É necessária mais informação

6. O Miguel, o Fernando e o Sebastião participaram numa corrida. Imediatamente após o início da corrida o Miguel ia em primeiro, o Fernando em segundo e o Sebastião em terceiro. Durante a corrida o Miguel e o Fernando trocaram de lugares, entre si, 9 vezes, o Fernando e o Sebastião trocaram 10 vezes e o Miguel e o Sebastião 11 vezes. Por que ordem terminaram a corrida?

(A) Miguel, Fernando e Sebastião (B) Fernando, Sebastião e Miguel
(C) Sebastião, Miguel e Fernando (D) Sebastião, Fernando e Miguel
(E) Fernando, Miguel e Sebastião

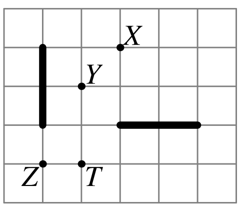
7. Um painel rectangular com área igual a 360 cm^2 é constituído por azulejos quadrados, todos com o mesmo tamanho. O painel tem 24 cm de altura e tem 5 azulejos de largura. Qual é a área de cada azulejo?

(A) 1 cm^2 (B) 4 cm^2 (C) 9 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 25 cm^2

8. Os números de quatro algarismos, cuja soma dos algarismos é 4, estão escritos por ordem decrescente. Em que posição da lista está o número 2011?

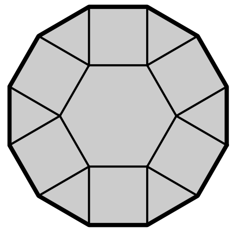
(A) 6.ª (B) 7.ª (C) 8.ª (D) 9.ª (E) 10.ª

9. Cada um dos dois segmentos representados pode ser obtido por uma rotação do outro. Qual dos pontos assinalados pode ser o centro de uma tal rotação?



(A) Só o X e o T (B) Só o X
(C) Só o X e o Z (D) Só o T (E) X, Y, Z e T

10. Na figura está representado um polígono constituído por um hexágono regular, cujo lado mede 1 cm, seis triângulos e seis quadrados. Qual é o perímetro desse polígono?

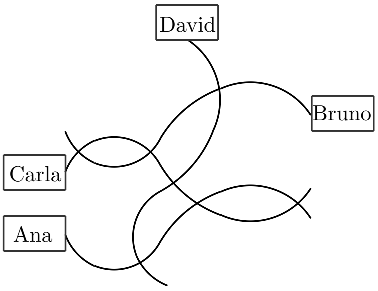


(A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm (B) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ cm

(C) 12 cm (D) $6+3\sqrt{2}$ cm (E) 9 cm

Problemas de 4 pontos

11. Durante uma viagem de barco com o mar muito agitado a Joana tentou desenhar um mapa da sua aldeia. Conseguiu desenhar as quatro ruas com os seus sete cruzamentos e as casas dos seus amigos, mas de forma pouco precisa. Na realidade, a Rua da Seta, a Rua da Régua e a Rua do Prego são em linha recta. A quarta rua é a Rua Sinuosa. Quem vive na Rua Sinuosa?

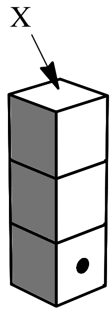


(A) Ana (B) Bruno

(C) Carla (D) David

(E) É necessário um mapa melhor para se poder responder

12. A Susana colou três dados normais como se representa na figura. Em qualquer dado, o número total de pintas em cada par de faces opostas é 7. A construção foi feita de modo a que a soma das pintas em cada par de faces coladas seja 5. Quantas pintas estão na face marcada com X?



(A) 2 (B) 3 (C) 4

(D) 5 (E) 6

13. Sabendo que um certo mês tem 5 segundas-feiras, 5 terças-feiras e 5 quartas-feiras e que o mês anterior tinha tido só 4 domingos, o que podemos dizer sobre o mês seguinte?

(A) Tem exactamente 4 sextas-feiras (B) Tem exactamente 4 sábados

(C) Tem 5 domingos (D) Tem 5 quartas-feiras

(E) Esta situação é impossível

14. Se $9^n+9^n+9^n=3^{2011}$, qual é o valor de n?

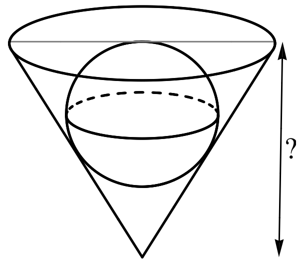
(A) 1005 (B) 1006 (C) 2010 (D) 2011

(E) Nenhum destes valores

15. A Maria tem uma caixa cúbica vermelha e uma caixa cúbica azul cujas arestas medem a dm e $(a+1)$ dm, respectivamente. A caixa azul está cheia de água e a vermelha está vazia. A Maria encheu a caixa vermelha com água da caixa azul e ainda sobraram 217 litros de água na caixa azul. Quanto litros de água foram despejados para a caixa vermelha?

(A) 243 (B) 512 (C) 125 (D) 1331 (E) 729

16. Uma bola de raio igual a 15 mm caiu num buraco de forma cónica de base circular e ficou completamente encaixada, como se pode ver no esquema da figura. Neste esquema, a secção do cone determinada por um plano que passe pelo centro da bola e pelo vértice do cone é um triângulo equilátero. Qual é a profundidade do buraco?



(A) $30\sqrt{2}$ mm (B) $25\sqrt{3}$ mm
(C) 45 mm (D) 60 mm
(E) $60\left(\sqrt{3}-1\right)$ mm

17. Cada uma das quadrículas da tabela 4×4 tem de ser pintada de vermelho ou de preto. O número que está em cada linha ou coluna indica o número de quadrículas dessa linha ou coluna que devem ser pintadas de preto. De quantas maneiras diferentes podemos colorir a tabela?

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

(A) 0 (B) 1 (C) 3
(D) 5 (E) 9

18. Qual é o número máximo de números naturais consecutivos de 3 algarismos com pelo menos um dos algarismos ímpar?

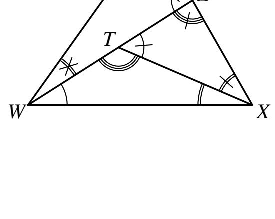
(A) 1 (B) 10 (C) 110 (D) 111 (E) 221

19. O Pedro quer preencher uma tabela 3×3 com números naturais de tal forma que a soma dos números de qualquer quadrado 2×2 seja igual a 10. Encontrando-se já colocados os cinco números indicados na figura, qual é a soma dos quatro números que faltam?

1		0
	2	
4		3

(A) 9 (B) 10 (C) 11
(D) 12 (E) 13

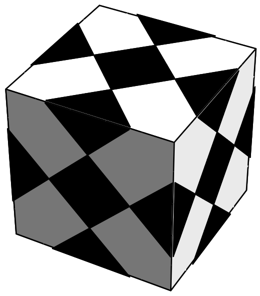
20. É possível construir um triângulo $[WXY]$, escolher um ponto Z no segmento $[XY]$, distinto de X e de Y, e depois escolher um ponto T no segmento $[WZ]$, distinto de W e Z, (ver a figura) de modo a que as amplitudes dos nove ângulos marcados tomem o menor número possível de valores distintos. Qual é esse número?



(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6

Problemas de 5 pontos

21. O Simão tem um cubo cujas arestas medem 1 dm e decidiu pintar o cubo com quadrados pretos geometricamente iguais, como se pode ver na figura, de modo a que todas as faces fiquem iguais. Qual é a área da região que ficou a preto?



(A) 37,5 cm^2 (B) 150 cm^2 (C) 225 cm^2
(D) 300 cm^2 (E) 375 cm^2

22. Um número natural diz-se "simpático" se tiver 5 algarismos distintos e o primeiro algarismo for igual à soma dos outros 4 algarismos. Quantos números "simpáticos" existem?

(A) 72 (B) 144 (C) 168 (D) 216 (E) 288

23. Os números naturais x e y são maiores do que 1. Qual das seguintes fracções tem o maior valor?

(A) $\dfrac{x}{y-1}$ (B) $\dfrac{x}{y+1}$ (C) $\dfrac{2x}{2y+1}$ (D) $\dfrac{2x}{2y-1}$ (E) $\dfrac{3x}{3y+1}$

24. Um tetraedro regular $[WXYZ]$ tem a face $[WXY]$ num plano $\mathcal{P}$. A aresta $[XY]$ está na recta ℓ. Um outro tetraedro regular $[XYZT]$ partilha uma face com $[WXYZ]$. Onde é que a recta que passa pelos pontos Z e T intersecta $\mathcal{P}$?

(A) No mesmo lado de ℓ que W, dentro de $[WXY]$
(B) No mesmo lado de ℓ que W, fora de $[WXY]$
(C) No lado oposto de ℓ em relação a W
(D) A recta que passa pelos pontos Z e T não intersecta o plano $\mathcal{P}$
(E) A resposta depende do comprimento das arestas dos tetraedros

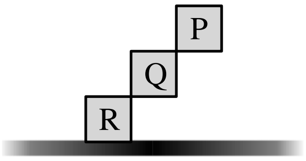
25. Quantos pares ordenados de números naturais (x, y) satisfazem a condição $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

26. Para cada número natural $n \geq 2$, denotamos por $\langle n \rangle$ o maior número primo que não excede n. Quantos números naturais k satisfazem a condição $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

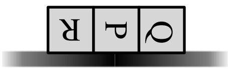
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Mais de 3

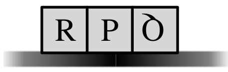
27. O Paulo está a jogar um jogo no computador que envolve quadrados e que começa na situação representada na figura.

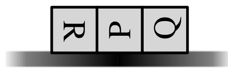


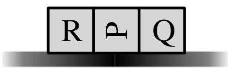
Em cada jogada, cada quadrado pode ser rodado segundo um ângulo de amplitude de 90 graus com centro num dos vértices. Encontram-se exemplificadas duas possíveis jogadas.

O objectivo é colocar os quadrados alinhados na parte inferior do ecrã. Das situações seguintes, a qual é possível o Paulo chegar?

(A) 

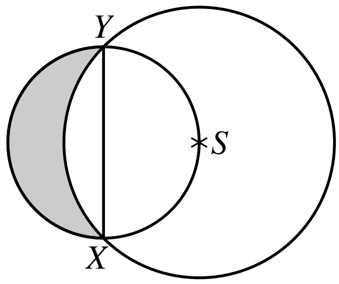
(B) 

(C) 

(D) 

(E) Todas as hipóteses anteriores são possíveis

28. O João desenhou duas circunferências como se pode ver na figura. A circunferência de menor raio tem diâmetro $\overline{XY}$ e passa pelo centro S da circunferência de maior raio. Se o raio da circunferência de centro S for r, qual é a medida da área da região a cinzento?



(A) $\frac{\pi}{6}r^2$ (B) $\frac{1}{2}r^2$

(C) $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}r^2$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

(E) Outra resposta

29. Quantos conjuntos constituídos por quatro arestas de um cubo têm a propriedade de duas quaisquer arestas desse conjunto não terem vértices em comum?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 18

30. Para que valores de n, $n = 1, 2, \cdots, 8$, é possível colorir algumas quadrículas de uma tabela de dimensões 5×5 de modo a que qualquer tabela de dimensões 3×3 contenha exactamente n quadrículas coloridas?

(A) 1 (B) 1 e 2 (C) 1, 2 e 3 (D) 1, 2, 7 e 8

(E) Todos os possíveis valores de n