# Canguru Matemático sem Fronteiras 2011

http://www.mat.uc.pt/canguru/

Categoria: Júnior — Duração: 1h30min

Destinatários: alunos dos 10.° e 11.° anos de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

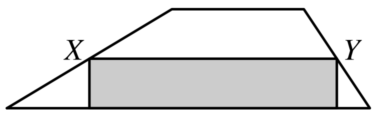
**Não podes usar calculadora.** Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correcta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

## Problemas de 3 pontos

**1.** Uma passadeira tem faixas pretas e brancas alternadas, cada uma com 50 cm de largura. Qual é o comprimento de uma passadeira que tem 8 faixas brancas e começa e termina com uma faixa branca?

(A) 7 m (B) 7,5 m (C) 8 m (D) 8,5 m (E) 9 m

**2.** A área do rectângulo sombreado é 13 cm$^2$ e $X$ e $Y$ são os ponto médios dos lados do trapézio. Qual é a área do trapézio?




(A) 24 cm$^2$ (B) 25 cm$^2$ (C) 26 cm$^2$
(D) 27 cm$^2$ (E) 28 cm$^2$

**3.** O resto da divisão de 2011 por um certo número inteiro é igual a 1011. Então

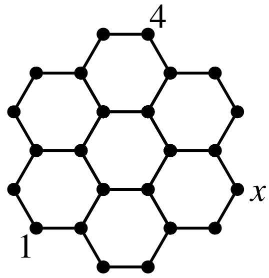
(A) o divisor é 100 (B) o divisor é 500
(C) o divisor é 1000 (D) o divisor é outro número inteiro
(E) não é possível obter este resto


DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

**4.** Sabendo que $P = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5$, $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$ e $R = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $Q < P < R$ (B) $P < Q = R$ (C) $P < Q < R$ (D) $R < Q < P$ (E) $Q = P < R$

**5.** Em cada um dos pontos da figura pretendemos escrever um número de tal modo que a soma dos dois números colocados nas extremidades de cada um dos segmentos marcados seja igual para todos os segmentos. Dois dos números já se encontram escritos. Qual é o valor de $x$?




(A) 1 (B) 3
(C) 4 (D) 5
(E) É necessária mais informação

**6.** O Miguel, o Fernando e o Sebastião participaram numa corrida. Imediatamente após o início da corrida o Miguel ia em primeiro, o Fernando em segundo e o Sebastião em terceiro. Durante a corrida o Miguel e o Fernando trocaram de lugares, entre si, 9 vezes, o Fernando e o Sebastião trocaram 10 vezes e o Miguel e o Sebastião 11 vezes. Por que ordem terminaram a corrida?

(A) Miguel, Fernando e Sebastião (B) Fernando, Sebastião e Miguel
(C) Sebastião, Miguel e Fernando (D) Sebastião, Fernando e Miguel
(E) Fernando, Miguel e Sebastião

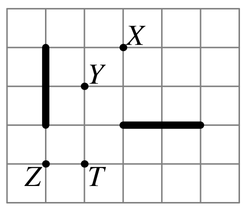
**7.** Um painel rectangular com área igual a 360 $cm^2$ é constituído por azulejos quadrados, todos com o mesmo tamanho. O painel tem 24 cm de altura e tem 5 azulejos de largura. Qual é a área de cada azulejo?

(A) 1 $cm^2$ (B) 4 $cm^2$ (C) 9 $cm^2$ (D) 16 $cm^2$ (E) 25 $cm^2$

**8.** Os números de quatro algarismos, cuja soma dos algarismos é 4, estão escritos por ordem decrescente. Em que posição da lista está o número 2011?

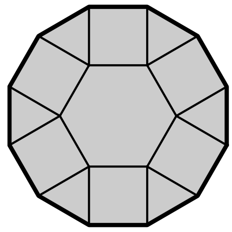
(A) 6.ª (B) 7.ª (C) 8.ª (D) 9.ª (E) 10.ª

**9.** Cada um dos dois segmentos representados pode ser obtido por uma rotação do outro. Qual dos pontos assinalados pode ser o centro de uma tal rotação?




(A) Só o $X$ e o $T$ (B) Só o $X$
(C) Só o $X$ e o $Z$ (D) Só o $T$ (E) $X$, $Y$, $Z$ e $T$

**10.** Na figura está representado um polígono constituído por um hexágono regular, cujo lado mede 1 cm, seis triângulos e seis quadrados. Qual é o perímetro desse polígono?

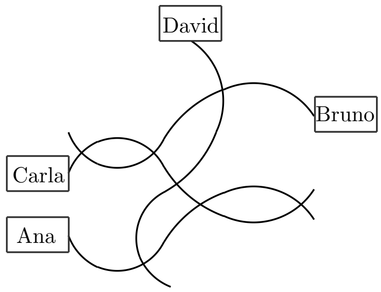


(A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm (B) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ cm

(C) 12 cm (D) $6+3\sqrt{2}$ cm (E) 9 cm

## Problemas de 4 pontos

**11.** Durante uma viagem de barco com o mar muito agitado a Joana tentou desenhar um mapa da sua aldeia. Conseguiu desenhar as quatro ruas com os seus sete cruzamentos e as casas dos seus amigos, mas de forma pouco precisa. Na realidade, a Rua da Seta, a Rua da Régua e a Rua do Prego são em linha recta. A quarta rua é a Rua Sinuosa. Quem vive na Rua Sinuosa?

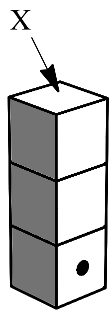



(A) Ana (B) Bruno

(C) Carla (D) David

(E) É necessário um mapa melhor para se poder responder

**12.** A Susana colou três dados normais como se representa na figura. Em qualquer dado, o número total de pintas em cada par de faces opostas é 7. A construção foi feita de modo a que a soma das pintas em cada par de faces coladas seja 5. Quantas pintas estão na face marcada com X?




(A) 2 (B) 3 (C) 4

(D) 5 (E) 6

**13.** Sabendo que um certo mês tem 5 segundas-feiras, 5 terças-feiras e 5 quartas-feiras e que o mês anterior tinha tido só 4 domingos, o que podemos dizer sobre o mês seguinte?

(A) Tem exactamente 4 sextas-feiras (B) Tem exactamente 4 sábados

(C) Tem 5 domingos (D) Tem 5 quartas-feiras

(E) Esta situação é impossível

**14.** Se $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$, qual é o valor de $n$?

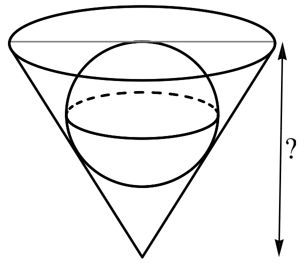
(A) 1005 (B) 1006 (C) 2010 (D) 2011

(E) Nenhum destes valores

**15.** A Maria tem uma caixa cúbica vermelha e uma caixa cúbica azul cujas arestas medem $a$ dm e $(a+1)$ dm, respectivamente. A caixa azul está cheia de água e a vermelha está vazia. A Maria encheu a caixa vermelha com água da caixa azul e ainda sobraram 217 litros de água na caixa azul. Quanto litros de água foram despejados para a caixa vermelha?

(A) 243 (B) 512 (C) 125 (D) 1331 (E) 729

**16.** Uma bola de raio igual a 15 mm caiu num buraco de forma cónica de base circular e ficou completamente encaixada, como se pode ver no esquema da figura. Neste esquema, a secção do cone determinada por um plano que passe pelo centro da bola e pelo vértice do cone é um triângulo equilátero. Qual é a profundidade do buraco?

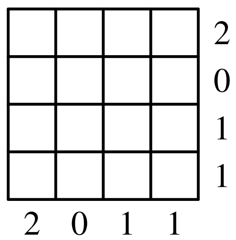



(A) $30\sqrt{2}$ mm (B) $25\sqrt{3}$ mm

(C) 45 mm (D) 60 mm

(E) $60\left(\sqrt{3}-1\right)$ mm

**17.** Cada uma das quadrículas da tabela $4\times 4$ tem de ser pintada de vermelho ou de preto. O número que está em cada linha ou coluna indica o número de quadrículas dessa linha ou coluna que devem ser pintadas de preto. De quantas maneiras diferentes podemos colorir a tabela?




(A) 0 (B) 1 (C) 3

(D) 5 (E) 9

**18.** Qual é o número máximo de números naturais consecutivos de 3 algarismos com pelo menos um dos algarismos ímpar?

(A) 1 (B) 10 (C) 110 (D) 111 (E) 221

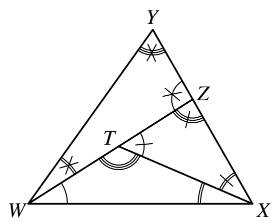
**19.** O Pedro quer preencher uma tabela $3\times 3$ com números naturais de tal forma que a soma dos números de qualquer quadrado $2\times 2$ seja igual a 10. Encontrando-se já colocados os cinco números indicados na figura, qual é a soma dos quatro números que faltam?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 0 |
| | 2 | |
| 4 | | 3 |

(A) 9 (B) 10 (C) 11

(D) 12 (E) 13

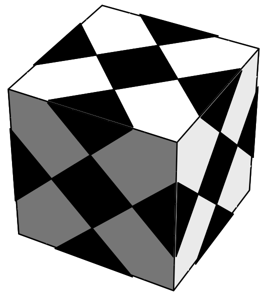
**20.** É possível construir um triângulo $[WXY]$, escolher um ponto $Z$ no segmento $[XY]$, distinto de $X$ e de $Y$, e depois escolher um ponto $T$ no segmento $[WZ]$, distinto de $W$ e $Z$, (ver a figura) de modo a que as amplitudes dos nove ângulos marcados tomem o menor número possível de valores distintos. Qual é esse número?




(A) 2 (B) 3 (C) 4

(D) 5 (E) 6

# Problemas de 5 pontos



**21.** O Simão tem um cubo cujas arestas medem 1 dm e decidiu pintar o cubo com quadrados pretos geometricamente iguais, como se pode ver na figura, de modo a que todas as faces fiquem iguais. Qual é a área da região que ficou a preto?

(A) 37,5 $cm^2$ (B) 150 $cm^2$ (C) 225 $cm^2$
(D) 300 $cm^2$ (E) 375 $cm^2$

**22.** Um número natural diz-se "simpático" se tiver 5 algarismos distintos e o primeiro algarismo for igual à soma dos outros 4 algarismos. Quantos números "simpáticos" existem?

(A) 72 (B) 144 (C) 168 (D) 216 (E) 288

**23.** Os números naturais $x$ e $y$ são maiores do que 1. Qual das seguintes fracções tem o maior valor?

(A) $\frac{x}{y-1}$ (B) $\frac{x}{y+1}$ (C) $\frac{2x}{2y+1}$ (D) $\frac{2x}{2y-1}$ (E) $\frac{3x}{3y+1}$

**24.** Um tetraedro regular $[WXYZ]$ tem a face $[WXY]$ num plano $\mathcal{P}$. A aresta $[XY]$ está na recta $\ell$. Um outro tetraedro regular $[XYZT]$ partilha uma face com $[WXYZ]$. Onde é que a recta que passa pelos pontos $Z$ e $T$ intersecta $\mathcal{P}$?

(A) No mesmo lado de $\ell$ que $W$, dentro de $[WXY]$
(B) No mesmo lado de $\ell$ que $W$, fora de $[WXY]$
(C) No lado oposto de $\ell$ em relação a $W$
(D) A recta que passa pelos pontos $Z$ e $T$ não intersecta o plano $\mathcal{P}$
(E) A resposta depende do comprimento das arestas dos tetraedros

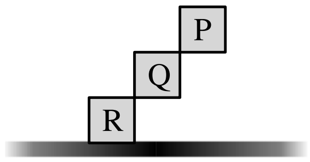
**25.** Quantos pares ordenados de números naturais $(x, y)$ satisfazem a condição $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

**26.** Para cada número natural $n \geq 2$, denotamos por $\langle n \rangle$ o maior número primo que não excede $n$. Quantos números naturais $k$ satisfazem a condição $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

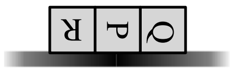
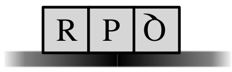
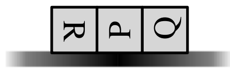
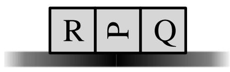
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Mais de 3

**27.** O Paulo está a jogar um jogo no computador que envolve quadrados e que começa na situação representada na figura.

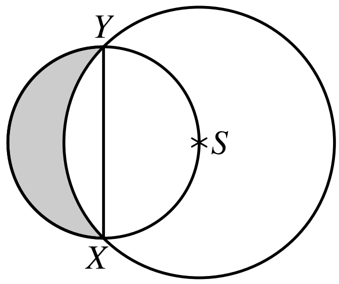


Em cada jogada, cada quadrado pode ser rodado segundo um ângulo de amplitude de 90 graus com centro num dos vértices. Encontram-se exemplificadas duas possíveis jogadas.

O objectivo é colocar os quadrados alinhados na parte inferior do ecrã. Das situações seguintes, a qual é possível o Paulo chegar?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) Todas as hipóteses anteriores são possíveis

**28.** O João desenhou duas circunferências como se pode ver na figura. A circunferência de menor raio tem diâmetro $\overline{XY}$ e passa pelo centro $S$ da circunferência de maior raio. Se o raio da circunferência de centro $S$ for $r$, qual é a medida da área da região a cinzento?




(A) $\frac{\pi}{6}r^2$ (B) $\frac{1}{2}r^2$
(C) $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}r^2$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$
(E) Outra resposta

**29.** Quantos conjuntos constituídos por quatro arestas de um cubo têm a propriedade de duas quaisquer arestas desse conjunto não terem vértices em comum?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 18

**30.** Para que valores de $n$, $n = 1, 2, \cdots, 8$, é possível colorir algumas quadrículas de uma tabela de dimensões $5 \times 5$ de modo a que qualquer tabela de dimensões $3 \times 3$ contenha exactamente $n$ quadrículas coloridas?

(A) 1 (B) 1 e 2 (C) 1, 2 e 3 (D) 1, 2, 7 e 8
(E) Todos os possíveis valores de $n$