Canguru Matemático sem Fronteiras 2013

http://www.mat.uc.pt/canguru/

Categoria: Estudante — Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos dos 12.° ano de escolaridade

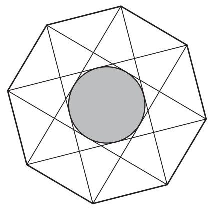
Nome: ______________________ Turma: __________

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Dos números seguintes, qual é o maior?

(**A**) 2013 (**B**) 2^{0+13} (**C**) 20^{13} (**D**) 201^3 (**E**) 20×13



2. Os lados do maior octógono regular da figura medem 10 cm. Qual é o raio do círculo inscrito no octógono definido pelas diagonais do octógono maior, representadas na figura?

(**A**) 10 cm (**B**) $7,5$ cm (**C**) 5 cm (**D**) $2,5$ cm (**E**) 2 cm

3. Quantas arestas tem um prisma com 2013 faces?

(**A**) 2011 (**B**) 2013 (**C**) 4022 (**D**) 4024 (**E**) 6033

4. A que é igual a raiz cúbica de 3^{3^3} ?

(**A**) 3^3 (**B**) 3^{3^3-1} (**C**) 3^{2^3} (**D**) 3^{3^2} (**E**) $(\sqrt{3})^3$

5. O ano de 2013 tem a propriedade de o número que o representa ser formado por algarismos consecutivos: 0, 1, 2 e 3. Quantos anos passaram desde a última vez que um ano foi representado por um número formado por quatro algarismos consecutivos?

(**A**) 467 (**B**) 527 (**C**) 581 (**D**) 693 (**E**) 990

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim tal que $f(0) = 0$ e $f(2013) - f(2001) = 100$. Qual é o valor de $f(2031) - f(2013)$?

(**A**) 75 (**B**) 100 (**C**) 120 (**D**) 150 (**E**) 180

7. Sabendo que $2 < x < 3$, quantas das afirmações seguintes são verdadeiras?

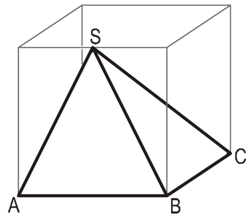
$$4 < x^2 < 9, \qquad 4 < 2x < 9, \qquad 6 < 3x < 9, \qquad 0 < x^2 - 2x < 3.$$

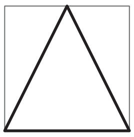
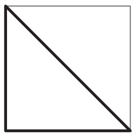
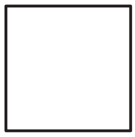
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

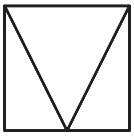
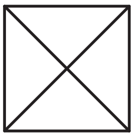
8. Seis super-heróis capturaram vinte vilões. O primeiro super-herói capturou um vilão, o segundo capturou dois vilões e o terceiro capturou três vilões. O quarto super-herói capturou mais vilões do que qualquer um dos outros cinco super-heróis. Qual é o menor número de vilões que o quarto super-herói pode ter capturado?

(**A**) 7 (**B**) 6 (**C**) 5 (**D**) 4 (**E**) 3

9. No interior do cubo transparente da figura está uma pirâmide opaca, $[ABCDS]$, cuja base, $[ABCD]$, coincide com uma face do cubo e cujo vértice, S, é o ponto médio de uma aresta do cubo. Quando se olha para esta pirâmide, através das seis faces do cubo, de cima, de baixo, de frente, de trás, da esquerda e da direita, a vista que não surge é



(**A**)  (**B**)  (**C**) 

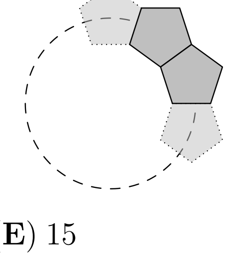
(**D**)  (**E**) 

10. Quando uma certa substância sólida derrete, o seu volume aumenta $\frac{1}{12}$. Quando a substância volta a solidificar em quanto diminui o seu volume?

(**A**) $\frac{1}{10}$ (**B**) $\frac{1}{11}$ (**C**) $\frac{1}{12}$ (**D**) $\frac{1}{13}$ (**E**) $\frac{1}{14}$

Problemas de 4 pontos

11. A Ana tem várias peças idênticas, com a forma de um pentágono regular, e cola as peças face com face de modo a completar um aro circular, como o representado na figura. Quantas peças tem o aro construído pela Ana?

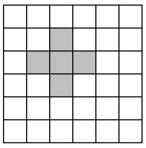
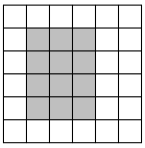
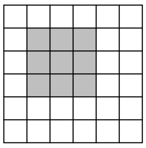
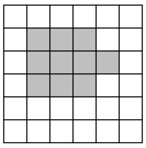
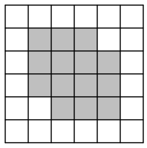


(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

12. Quantos são os números inteiros positivos n tais que $\frac{n}{3}$ e $3n$ são números inteiros de três algarismos?

(**A**) 12 (**B**) 33 (**C**) 34 (**D**) 100 (**E**) 300

13. Um tapete circular foi colocado numa sala cujo chão é formado por mosaicos quadrados. Fez-se uma grelha em que cada mosaico é representado por um quadradinho cinzento ou branco consoante tem ou não mais do que um ponto em contacto com o tapete. Qual das seguintes não é uma possibilidade para a grelha obtida?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

14. Considera a afirmação seguinte, feita sobre uma função, f, definida no conjunto dos números inteiros: "Para todo o x par, $f(x)$ é par." Qual das seguintes é a negação da afirmação anterior?

(**A**) Para todo o x par, $f(x)$ é ímpar

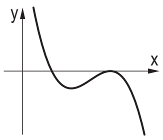
(**B**) Para todo o x ímpar, $f(x)$ é par

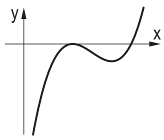
(**C**) Para todo o x ímpar, $f(x)$ é ímpar

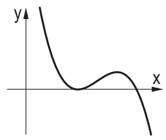
(**D**) Existe um número par, x, tal que $f(x)$ é ímpar

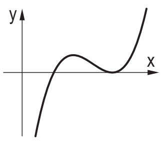
(**E**) Existe um número ímpar, x, tal que $f(x)$ é ímpar

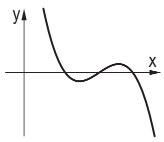
15. Seja W a função real de variável real definida por $W(x) = (a - x)(b - x)^2$, com $a < b$. O gráfico de W está representado numa das figuras seguintes. Em qual?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

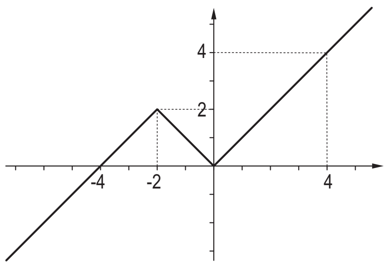
(**D**) 

(**E**) 

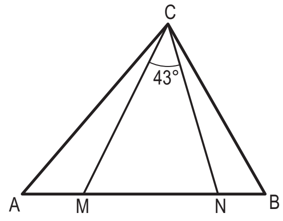
16. Um dos lados de um retângulo mede 5 cm. Este retângulo pode ser cortado de modo a originar um quadrado e outro retângulo, um dos quais tem 4 cm^2 de área. Quantos são os retângulos nestas condições?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

17. O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, composto por duas semirretas e um segmento de reta, encontra-se representado na figura. Quantas são as soluções da equação $f(f(f(x))) = 0$?



(**A**) 4 (**B**) 3 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0



18. No triângulo $[ABC]$ os pontos M e N, pertencentes ao lado $[AB]$, são tais que $\overline{AN} = \overline{AC}$ e $\overline{BM} = \overline{BC}$. Se $M\hat{C}N = 43°$ então $A\hat{C}B$ é igual a

(**A**) 86° (**B**) 89° (**C**) 90° (**D**) 92° (**E**) 94°

19. Quantos pares, (x, y), de números inteiros positivos verificam a equação $x^2y^3 = 6^{12}$?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) Outro número

20. Uma caixa contém 900 cartões numerados de 100 a 999. Quaisquer dois cartões têm números diferentes. A Beatriz retira alguns cartões da caixa e, para cada cartão, calcula a soma dos algarismos nele representados. No mínimo, quantos cartões tem a Beatriz de retirar da caixa, para poder garantir que retira pelo menos três cartões com a mesma soma?

(**A**) 51 (**B**) 52 (**C**) 53 (**D**) 54 (**E**) 55

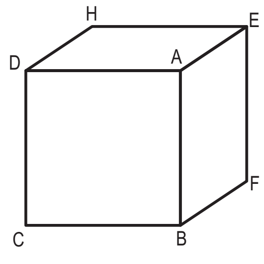
Problemas de 5 pontos

21. Quantos são os pares de números inteiros (x, y), com $x \leq y$, tais que o produto dos dois inteiros é igual a cinco vezes a sua soma?

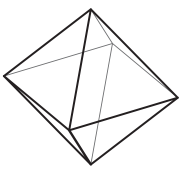
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

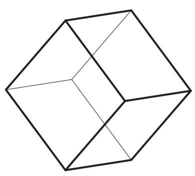
22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pelas propriedades seguintes: f é periódica de período 5 e, para $x \in [-2, 3[$, tem-se $f(x) = x^2$. Qual é o valor de $f(2013)$?

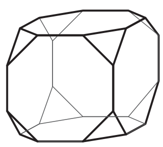
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 4 (**E**) 9

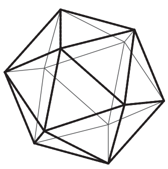


23. Para cada vértice do cubo representado na figura considere-se o plano definido pelos três vértices que lhe são adjacentes. Por exemplo, para o vértice A considera-se o plano que é definido pelos vértices B, D e E. Quando o cubo é cortado por estes oito planos obtêm-se vários sólidos. Qual é o aspecto do sólido que contém o centro do cubo inicial?


(**A**)


(**B**)


(**C**)


(**D**)

(**E**) O centro do cubo pertence a mais do que um sólido

24. Quantas soluções (x, y), com x e y números reais, tem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

(**A**) 1 (**B**) 5 (**C**) 8 (**D**) 9
(**E**) Uma infinidade

25. Seja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida por $f(n) = \frac{n}{2}$ se n é par e $f(n) = \frac{n-1}{2}$ se n é ímpar. Para k inteiro positivo, $f^k(n)$ representa o valor da expressão $f(f(...f(n)...))$, onde o símbolo f aparece k vezes. Por exemplo, $f^4(n)$ representa o valor de $f(f(f(f(n))))$. Qual é o número de soluções da equação $f^{2013}(n) = 1$?

(**A**) 0 (**B**) 4026 (**C**) 2^{2012} (**D**) 2^{2013} (**E**) infinito

26. Num plano estão marcadas algumas retas. A reta a interseta exatamente 3 outras retas, a reta b interseta exatamente 4 outras retas e a reta c interseta exatamente n outras retas, com $n \neq 3$ e $n \neq 4$. Qual é o número de retas marcadas no plano?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7
(**E**) Nenhum dos anteriores

27. A soma dos primeiros n números inteiros positivos é um número de três algarismos, sendo estes todos iguais. Qual é a soma dos algarismos de n?

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 18

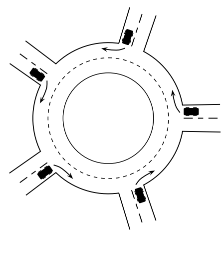
28. Numa ilha vivem apenas dois tipos de pessoas: as que dizem sempre a verdade e as que mentem sempre. Encontrei dois habitantes dessa ilha e perguntei ao mais alto se ambos diziam sempre a verdade. Ele respondeu-me, mas eu não consegui perceber se falava verdade ou mentia, por isso, perguntei ao mais baixo se o mais alto tinha dito a verdade. Ele respondeu-me, e com a sua resposta eu consegui perceber que tipo de habitante era cada um deles. Quem mentiu e quem disse a verdade?

(**A**) Ambos disseram a verdade
(**B**) Ambos mentiram
(**C**) O mais alto disse a verdade e o mais baixo mentiu
(**D**) O mais alto mentiu e o mais baixo disse a verdade
(**E**) É impossível dizer

29. Uma sucessão de números reais, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, é tal que $a_1 = 1$ e, para quaisquer m e n números naturais, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$. O centésimo termo da sucessão, a_{100}, é

(**A**) 100 (**B**) 1000 (**C**) 2013 (**D**) 4950 (**E**) 5050

30. Na rotunda representada na figura entram, ao mesmo tempo, cinco carros vindos de direções distintas. Cada um dos carros dá menos de uma volta à rotunda e não há dois que saiam na mesma direção. De quantas maneiras distintas pode isto acontecer?



(**A**) 24 (**B**) 44 (**C**) 60 (**D**) 81 (**E**) 120