Canguru Matemático sem Fronteiras 2018

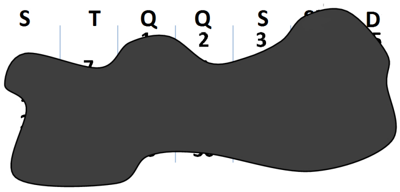
Categoria: Estudante Duração: 1h 30min
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. A figura mostra o calendário de um determinado mês do ano. Infelizmente caiu alguma tinta sobre o calendário e cobriu a maior parte deste.



Em que dia da semana calha o dia 27 daquele mês?

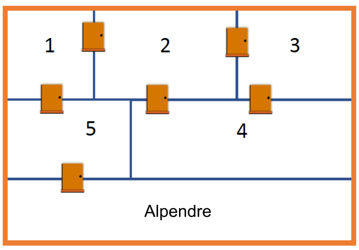
(**A**) Segunda-feira (**B**) Quarta-feira (**C**) Quinta-feira (**D**) Sábado (**E**) Domingo

2. Qual das seguintes expressões numéricas tem o maior valor?

(**A**) $2 - 0 \times 1 + 8$ (**B**) $2 + 0 \times 1 \times 8$ (**C**) $2 \times 0 + 1 \times 8$

(**D**) $2 \times (0 + 1 + 8)$ (**E**) $2 \times 0 + 1 + 8$

3. A figura mostra a planta da casa da Renata. A Renata entra em casa pelo alpendre e passa exatamente uma vez por cada porta.



Em que divisão termina o percurso da Renata?

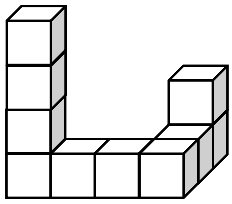
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®

4. O Thor tinha sete pedras e um martelo. De cada vez que o Thor bateu com o martelo numa pedra, esta partiu-se em exatamente cinco pedras mais pequenas. Ele fez isto várias vezes. Qual dos seguintes números pode representar o número de pedras que o Thor obteve?

(**A**) 17 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 25

5. A forma na figura ao lado foi construída com 10 cubos congruentes colados entre si. A forma foi mergulhada num balde com tinta, tendo a sua superfície ficado completamente coberta de tinta. Quantos dos cubos ficaram com quatro, e somente quatro, faces pintadas?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

6. As duas afirmações seguintes são verdadeiras: "Alguns extraterrestres são verdes, os outros são roxos."; "Os extraterrestres verdes vivem apenas em Marte." Portanto, podemos concluir que:

(**A**) Todos os extraterrestres vivem em Marte

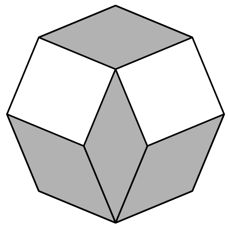
(**B**) Em Marte só vivem extraterrestre verdes

(**C**) Alguns extraterrestres roxos vivem em Vénus

(**D**) Todos os extraterrestres roxos vivem em Vénus

(**E**) Não vivem extraterrestres verdes em Vénus

7. Quatro losangos congruentes e dois quadrados são dispostos para formar um octógono regular, como se mostra na figura ao lado. Qual é a medida do maior ângulo interno de cada losango?

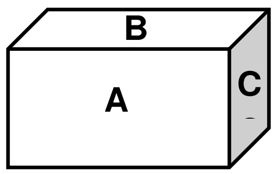


(**A**) 135° (**B**) 140° (**C**) 144° (**D**) 145° (**E**) 150°

8. Numa caixa estão 65 bolas, das quais 8 são brancas e as restantes são pretas. Numa extração podem ser retiradas da caixa, no máximo, 5 bolas. Não é permitido repor bolas na caixa. Qual é o menor número de extrações necessários para garantir que pelo menos uma bola branca seja retirada?

(**A**) 11 (**B**) 12 (**C**) 13 (**D**) 14 (**E**) 15

9. As faces do paralelepípedo na figura ao lado têm áreas com medidas A, B e C. Qual é a medida do volume do paralelepípedo?



(**A**) ABC (**B**) $\sqrt{\mathsf{ABC}}$ (**C**) $\sqrt{\mathsf{AB}+\mathsf{BC}+\mathsf{CA}}$

(**D**) $\sqrt[3]{\mathsf{ABC}}$ (**E**) $2(\mathsf{A}+\mathsf{B}+\mathsf{C})$

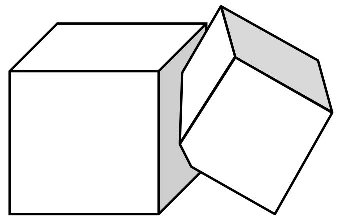
© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®

10. De quantas maneiras pode o número 1001 ser escrito como a soma de dois números primos?

(**A**) Nenhuma (**B**) Uma (**C**) Duas (**D**) Três (**E**) Mais de três

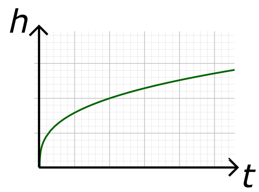
Problemas de 4 pontos

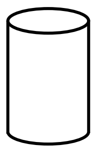
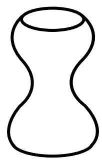
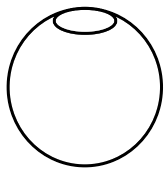
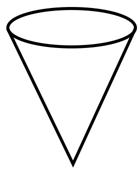
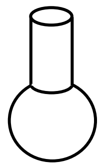
11. Dois cubos com volumes de medidas V e W intersetam-se. A parte do cubo com medida de volume V que não é comum aos dois cubos tem 90% do volume desse cubo. A parte do cubo com medida de volume W que não é comum aos dois cubos tem 85% do volume desse cubo. Qual é a relação entre V e W?



(**A**) $V = \frac{2}{3}W$ (**B**) $V = \frac{3}{2}W$ (**C**) $V = \frac{85}{90}W$ (**D**) $V = \frac{90}{85}W$ (**E**) $V = W$

12. Um vaso é cheio com água até ao topo a uma taxa constante. O gráfico ao lado mostra a altura h da água em função do tempo t. Qual das seguintes pode ser a forma do vaso?

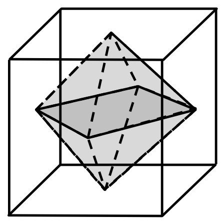


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

13. Qual é o valor de $|\sqrt{17} - 5| + |\sqrt{17} + 5|$?

(**A**) 10 (**B**) $2\sqrt{17}$ (**C**) $\sqrt{34} - 10$ (**D**) $10 - \sqrt{34}$ (**E**) 0

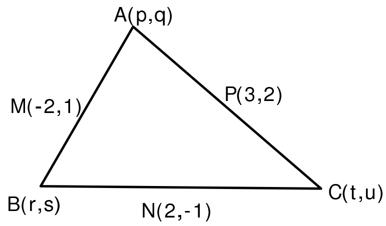
14. Um octaedro está inscrito num cubo com lado de comprimento 1. Os vértices do octaedro estão no centro das faces do cubo. Qual é a medida do volume do octaedro?



(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{1}{8}$

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®

15. Os pontos A(p,q), B(r,s) e C(t,u) são os vértices do triângulo ao lado. Os pontos médios dos lados do triângulo são M(-2,1), N(2,-1) e P(3,2). Qual é o valor de p+q+r+s+t+u?



(**A**) 2 (**B**) $\frac{5}{2}$ (**C**) 3

(**D**) 5 (**E**) Nenhum dos outros valores

16. Foram feitas cinco previsões antes do jogo de futebol entre o Clube do Canguru (CC) e o Clube da Matemática (CM):

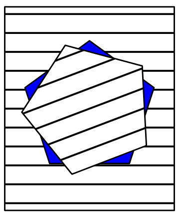
1. O jogo não termina em empate;
2. O Clube do Canguru irá marcar;
3. O Clube do Canguru irá vencer;
4. O Clube do Canguru não irá perder;
5. Serão marcados três golos.

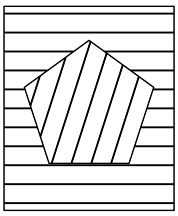
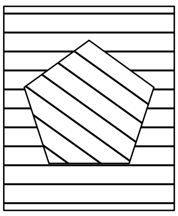
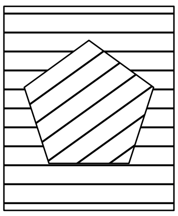
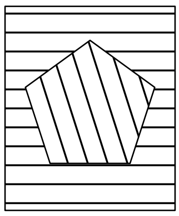
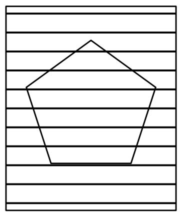
Qual foi o resultado final do jogo CC-CM se exatamente três destas previsões se concretizaram?

(**A**) 3-0 (**B**) 2-1 (**C**) 0-3 (**D**) 1-2

(**E**) Esta situação não é possível

17. De uma folha de papel pautado, cortámos um pentágono regular. Em cada passo rodámos o pentágono 21° no sentido anti-horário, em torno do seu centro. A situação após o primeiro passo está representada na figura. Ao fim de um certo número de passos o pentágono estará em posição de encaixar no espaço de onde foi recortado. O que iremos ver quando isso acontecer pela primeira vez?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

18. Qual dos seguintes números não é um divisor de $18^{2017} + 18^{2018}$?

(**A**) 8 (**B**) 18 (**C**) 28 (**D**) 38 (**E**) 48

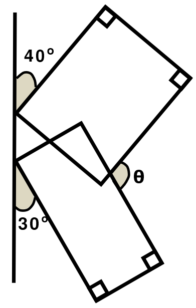
19. Três das cinco cartas na figura são dadas à Nádia e as restantes à Rita. A Nádia multiplica os três números que estão nas suas cartas e a Rita multiplica os dois números das suas cartas. A soma dos dois produtos resultantes é um número primo. Qual é a soma dos números das cartas da Nádia?

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 15

(**D**) 17 (**E**) 18

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®

20. Dois retângulos estão inclinados sobre uma reta vertical formando dois ângulos de 40° e 30°, como se mostra na figura. Qual é a medida do ângulo θ?

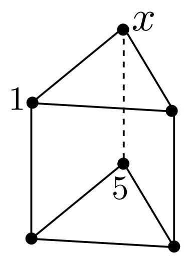


(**A**) 105° (**B**) 120° (**C**) 130°

(**D**) 135° (**E**) Nenhum dos valores anteriores

Problemas de 5 pontos

21. As faces do prisma na figura são dois triângulos e três quadrados. Os seis vértices são numerados de 1 a 6 de tal forma que a soma dos números nos quatro vértices de cada quadrado seja a mesma para todos os três quadrados. Os números 1 e 5 estão assinalados na figura. Qual é o número que está no vértice assinalado com x?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4

(**D**) 6 (**E**) A situação é impossível

22. Os números m e n são as soluções da equação $x^2 - x - 2018 = 0$. Qual é o valor de $n^2 + m$?

(**A**) 2016 (**B**) 2017 (**C**) 2018 (**D**) 2019 (**E**) 2020

23. O Abel, o Bruno, o César e o Diogo são quatro irmãos que têm alturas diferentes. Relativamente às suas alturas, afirmam o seguinte:
— Abel: Eu não sou o mais alto nem o mais baixo.
— Bruno: Eu não sou o mais baixo.
— César: Eu sou o mais alto.
— Diogo: Eu sou o mais baixo.

Somente um dos irmãos está a mentir. Qual dos irmãos é o mais alto?

(**A**) O Abel (**B**) O Bruno (**C**) O César (**D**) O Diogo

(**E**) Não é possível saber

24. Seja f uma função tal que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ para quaisquer inteiros x e y. Se $f(1) = 1/2$, qual é o valor de $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$?

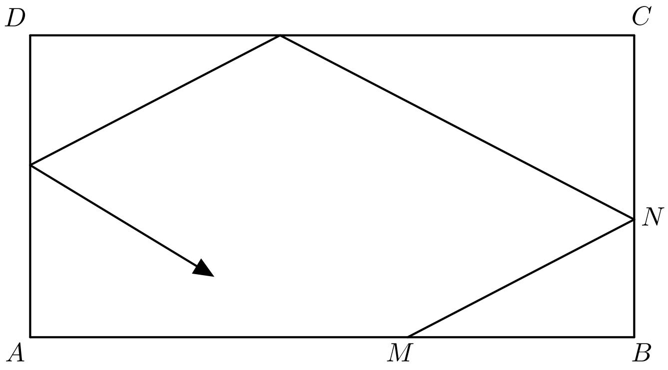
(**A**) $\frac{1}{8}$ (**B**) $\frac{3}{2}$ (**C**) $\frac{5}{2}$ (**D**) $\frac{15}{8}$ (**E**) 6

25. A função quadrática definida por $f(x) = x^2 + px + q$ é tal que o seu gráfico interseta os eixos coordenados em três pontos distintos. A circunferência que contém esses três pontos interseta o gráfico de f num quarto ponto. Quais são as coordenadas deste quarto ponto?

(**A**) $(0, -q)$ (**B**) (p, q) (**C**) $(-p, q)$ (**D**) $\left(-\frac{q}{p}, \frac{q^2}{p^2}\right)$ (**E**) $(1, p+q+1)$

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®

26. Na figura está representada uma mesa de bilhar retangular cujos lados medem 3 m e 2 m. Em certa jogada, uma bola sai do ponto M, num dos lados maiores da mesa. A bola é então refletida uma vez em cada um dos restantes lados da mesa e regressa ao lado inicial (ver figura).



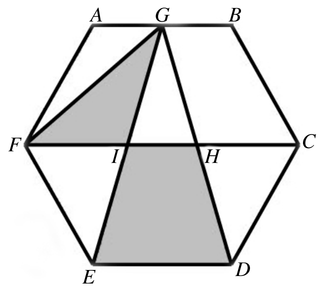
A que distância do ponto A irá a bola bater, se $\overline{BM} = 1,2$ m e $\overline{BN} = 0,8$ m?

(**A**) 1,2 m (**B**) 1,5 m (**C**) 2 m (**D**) 2,8 m (**E**) 1,8 m

27. Qual é o número de soluções reais da equação $\big||4^x - 3| - 2\big| = 1$?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

28. Na figura ao lado, $[ABCDEF]$ representa um hexágono regular. O ponto G é o ponto médio de $[AB]$ e os pontos H e I são os pontos de interseção dos segmentos $[GD]$ e $[GE]$ com $[FC]$, respetivamente. Qual é a razão entre a medida da área do triângulo $[GIF]$ e a medida da área do trapézio $[IHDE]$?



(**A**) $\dfrac{1}{2}$ (**B**) $\dfrac{1}{3}$ (**C**) $\dfrac{1}{4}$ (**D**) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (**E**) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

29. Há mais 40% de meninas do que meninos numa turma e a probabilidade de um grupo de dois alunos selecionados aleatoriamente ser constituído por uma menina e um menino é $\frac{1}{2}$. Quantos alunos estão nesta turma?

(**A**) 20 (**B**) 24 (**C**) 36

(**D**) 38 (**E**) Esta situação é impossível

30. Arquimedes calculou 15!. O resultado está escrito no quadro. Infelizmente dois dos algarismos, o segundo e o décimo, não são visíveis. Quais são esses dois algarismos?

1■0767436■000

(**A**) 2 e 0 (**B**) 4 e 8 (**C**) 7 e 4 (**D**) 9 e 2 (**E**) 3 e 8

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®