

Canguru Matemático sem Fronteiras 2022

Categoria: Estudante

Duração: 1h 30min

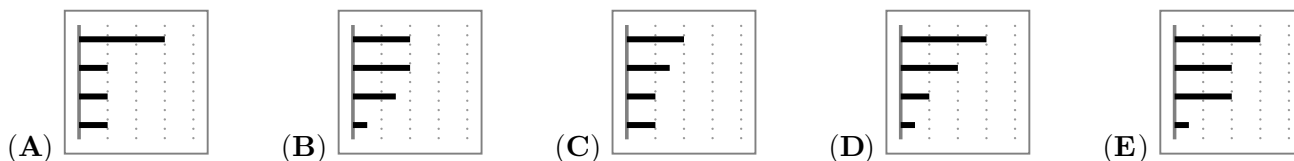
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada resposta correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada resposta errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Numa aplicação que o Henrique tem no telemóvel é possível ver o gráfico com a indicação do tempo que ele despende semanalmente com quatro aplicações que tem instaladas, listadas por ordem decrescente do tempo de utilização. Na figura ao lado está o gráfico respeitante à semana passada. Esta semana ele despendeu exatamente o mesmo tempo que na semana passada com duas das aplicações, mas só metade do tempo com as outras duas. Qual dos diagramas abaixo não pode ser o gráfico correspondente a esta semana?



2. Quantos inteiros positivos com três algarismos são divisíveis por 13?

- (A) 68 (B) 69 (C) 70 (D) 76 (E) 77

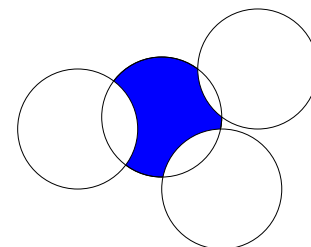
3. Entre quatro amigos sabemos que a Beatriz é mais velha que o Carlos e mais nova que a Luísa. Por outro lado, sabemos que o Tiago é mais velho que a Beatriz. Quem pode ter a mesma idade?

- (A) O Carlos e o Tiago (B) O Tiago e a Luísa (C) A Luísa e o Carlos
(D) A Beatriz e a Luísa (E) O Tiago e a Beatriz

4. O produto dos algarismos de um número inteiro com dez algarismos é igual a 15. Qual é a soma dos algarismos desse número?

- (A) 8 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 20

5. Quatro circunferências com raio 1 interseccionam-se como se pode ver na figura ao lado. Qual é o perímetro da região sombreada?



- (A) π (B) Um número entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π
(C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) 2π (E) π^2





6. O Diogo listou, por ordem crescente, todos os inteiros de 2 a 2022 cujos algarismos são iguais a 0 ou a 2. Qual é o número que fica no meio da lista?

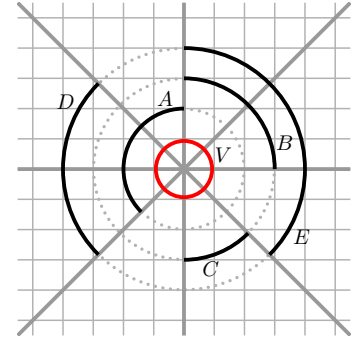
- (A) 200 (B) 220 (C) 222 (D) 2000 (E) 2002

7. Quantas soluções reais tem a equação $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 0$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Quatro retas intersectam-se dando origem a oito ângulos geometricamente iguais. Qual dos arcos a preto tem comprimento igual ao perímetro da circunferência V ?

- (A) A
(B) B
(C) C
(D) D
(E) E



9. Sejam a, b e c três números não nulos tais que os números $-2a^4b^3c^2$ e $3a^3b^5c^{-4}$ têm o mesmo sinal. Qual das seguintes afirmações tem de ser verdadeira?

- (A) $ab > 0$ (B) $b < 0$ (C) $c > 0$ (D) $bc > 0$ (E) $a < 0$

10. O Miguel marcou quatro pontos A, B, C e D , por esta ordem, numa reta, como se pode ver na figura abaixo.

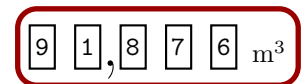


A distância entre A e C é 12 cm e entre B e D é 18 cm. Qual é a distância entre o ponto médio de $[AB]$ e o ponto médio de $[CD]$?

- (A) 15 cm (B) 12 cm (C) 18 cm (D) 6 cm (E) 9 cm

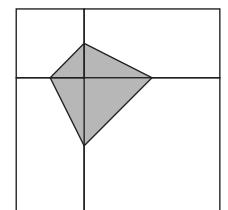
Problemas de 4 pontos

11. O Pedro foi fazer a leitura do seu contador da água e verificou que no valor marcado todos os algarismos eram diferentes, como se pode ver na figura ao lado. Que quantidade mínima de água tem o Pedro de gastar para que numa próxima contagem o valor da leitura tenha também todos os algarismos diferentes?



- (A) 0,006 m³ (B) 0,034 m³ (C) 0,086 m³ (D) 0,137 m³ (E) 1,048 m³

12. Um quadrado foi dividido de modo a obter dois quadrados de tamanhos diferentes e dois retângulos geometricamente iguais, como se pode ver na figura ao lado. Os vértices do quadrilátero a sombreado são os pontos médios dos lados dos dois quadrados obtidos. A medida da área do quadrilátero sombreado é 3. Qual é a medida da área da parte não sombreada do quadrado inicial?



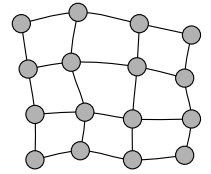
- (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21 (E) 24



13. Qual é o maior divisor comum entre $2^{2021} + 2^{2022}$ e $3^{2021} + 3^{2022}$?

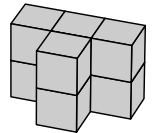
- (A) 2^{2021} (B) 1 (C) 2 (D) 6 (E) 12

14. No mapa ao lado está representada uma região com 16 cidades ligadas por 24 estradas. O governo quer construir centrais elétricas em algumas das cidades. Cada central pode fornecer eletricidade suficiente para a cidade onde está localizada e para quaisquer cidades ligadas a essa por uma única estrada. Qual é o menor número de centrais elétricas que precisam ser construídas?



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

15. Qual dos pares de peças representados abaixo pode ser usado para construir a peça representada na figura ao lado?

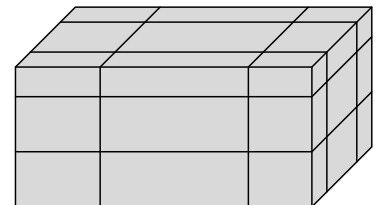


- (A) (B) (C) (D) (E)

16. A Mariana está a participar num torneio de ténis com 8 jogadores. Ela sabe que irá vencer a todos os jogadores, exceto à Ana que vence a todos os jogadores. Na primeira partida os jogadores são organizados ao acaso em quatro pares, que jogam entre si. O vencedor de cada jogo passa para a segunda partida. Na segunda partida, há dois jogos e o vencedor de cada jogo passa à final. Qual é a probabilidade da Mariana não chegar à final?

- (A) 1 (B) $1/2$ (C) $2/7$ (D) $3/7$ (E) $4/7$

17. Um cubo cuja medida da área de superfície é S foi cortado por seis planos, como se pode ver na figura ao lado. Cada plano é paralelo a uma face, mas a distância do plano à face é obtida de forma aleatória. No final o cubo é separado em 27 paralelepípedos. Qual é a medida da área da superfície total desses 27 paralelepípedos, em função de S ?

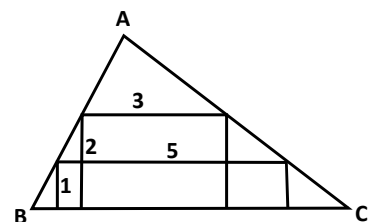


- (A) $2S$ (B) $\frac{5}{2}S$ (C) $3S$ (D) $4S$
(E) Nenhuma das hipóteses anteriores

18. A média de cinco números é 24. A média dos três menores é 19 e a média dos três maiores é 28. Qual é a mediana dos 5 números?

- (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24

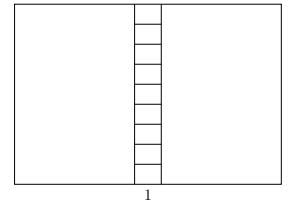
19. Num triângulo $[ABC]$ foram inscritos dois retângulos. As dimensões dos retângulos são 1×5 e 2×3 , respetivamente, como se pode ver na figura ao lado. Qual é a altura do triângulo em relação à base $[BC]$?



- (A) 3 (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{16}{5}$
(E) Nenhuma das hipóteses anteriores



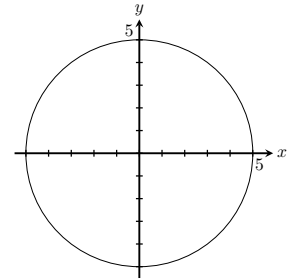
20. Um retângulo foi dividido em 11 retângulos mais pequenos, como se pode ver na figura ao lado. Os 11 retângulos são semelhantes ao retângulo inicial. A orientação dos retângulos mais pequenos é a mesma do retângulo inicial. Se o comprimento da base dos retângulos mais pequenos é 1, qual é o perímetro do retângulo maior?



- (A) 20 (B) 24 (C) 27 (D) 30 (E) 36

Problemas de 5 pontos

21. Uma circunferência de centro (0,0) tem raio 5. Quantos pontos da circunferência têm como coordenadas dois números inteiros?

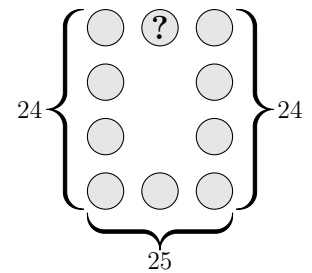


- (A) 5 (B) 8 (C) 12
(D) 16 (E) 20

22. Quantos números inteiros positivos com 3 algarismos são iguais a cinco vezes o produto dos seus algarismos?

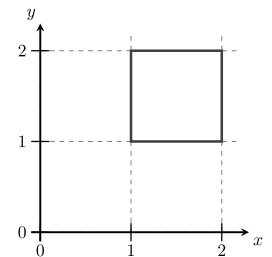
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

23. Os números de 1 a 10 irão ser escritos nos círculos da figura ao lado, um em cada círculo. A soma dos números da coluna da esquerda tem de ser 24; a soma dos números da coluna da direita tem de ser também 24 e a soma dos números da linha de baixo tem de ser 25. Que número tem de ser escrito no círculo com o ponto de interrogação?



- (A) 2 (B) 4 (C) 5
(D) 6 (E) Nenhuma das hipóteses anteriores

24. Um quadrado está desenhado num referencial ortonormado, como se pode ver na figura ao lado. Cada ponto (x,y) do quadrado é transformado no ponto $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$. Que figura se obtém?



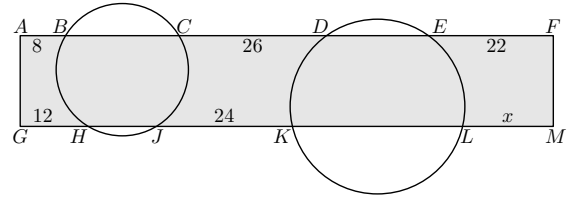
- (A) (B) (C)
- (D) (E)



25. Os vértices de um polígono com 20 lados foram numerados de 1 a 20 de tal modo que vértices adjacentes diferem ou em 1 unidade ou em 2 unidades. Os lados do polígono adjacentes a vértices que diferem em 1 unidade foram pintados de vermelho. Quantos lados vermelhos tem este polígono?

- (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10
(E) Existem várias possibilidades

26. Dois círculos interseitam o retângulo $[AFMG]$, como se pode ver na figura ao lado. Os segmentos exteriores aos círculos têm os seguintes comprimentos: $\overline{AB} = 8$, $\overline{CD} = 26$, $\overline{EF} = 22$, $\overline{GH} = 12$ e $\overline{JK} = 24$. Qual é o comprimento de $[LM]$?



- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

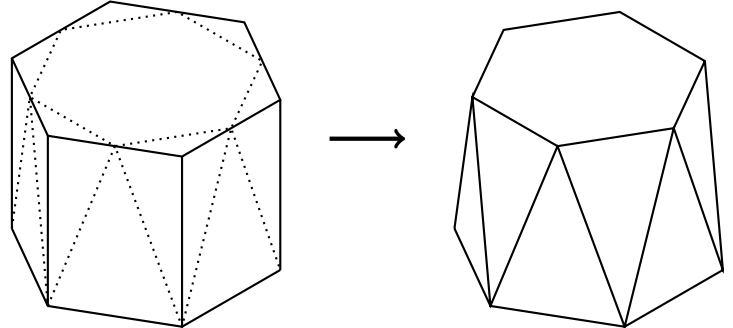
27. Seja N um número inteiro positivo. Quantos números inteiros existem entre $\sqrt{N^2 + N + 1}$ e $\sqrt{9N^2 + N + 1}$?

- (A) $N + 1$ (B) $2N - 1$ (C) $2N$ (D) $2N + 1$ (E) $3N$

28. Numa sucessão (a_n) , o primeiro termo, a_1 , está entre 0 e 1. Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$ e $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$. Se $a_7 = 2$, qual é o valor de a_2 ?

- (A) Igual a a_1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

29. Num prisma hexagonal regular foram cortados os cantos superiores, como se pode ver na figura ao lado. A face superior do sólido transformou-se num hexágono regular mais pequeno e as 6 faces laterais retangulares transformaram-se em 12 triângulos isósceles de dois tamanhos diferentes. Que fração do volume do sólido original foi perdida?



- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{6\sqrt{2}}$
(E) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$

30. Um jogo de futebol entre as equipas do Norte de Cangu e do Sul de Cangu está a ser disputado num estádio cuja bancada tem a forma de um retângulo. Há 11 apoiantes do Norte de Cangu em cada linha da bancada e 14 apoiantes do Sul de Cangu em cada coluna da bancada. Esta disposição dos apoiantes deixou 17 lugares vazios. Qual é o menor número possível de lugares na bancada?

- (A) 500 (B) 660 (C) 690 (D) 840 (E) 994