Canguru Matemático sem Fronteiras 2023

Categoria: Estudante — Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos do $12.^{\circ}$ ano de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: ____________

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada resposta correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada resposta errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Qual é o valor de

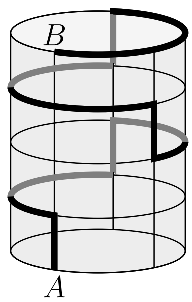
$$\frac{7777^2}{5555 \times 2222}\ ?$$

(A) 1 **(B)** $\frac{7}{10}$ **(C)** $\frac{49}{10}$ **(D)** $\frac{77}{110}$ **(E)** 49

2. A Joana lançou cinco dados e obteve 19 pontos no total. Qual é o maior número de seis que podem ter saído nesse lançamento?

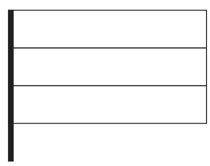
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

3. Um lata cilíndrica tem 15 cm de altura e a base é um círculo com 30 cm de perímetro. Uma formiga caminhou ao longo da lata, desde o ponto A da base até ao ponto B do topo da lata. O percurso foi feito ou verticalmente para cima ou horizontalmente ao longo de arcos de circunferência em torno da lata. Na figura ao lado está representado por uma linha mais grossa o caminho percorrido pela formiga (a preto o percurso na parte da frente da lata e a cinzento o percurso na parte de trás da lata). Qual é o comprimento, em cm, do caminho percorrido pela formiga?



(A) 45 **(B)** 55 **(C)** 60 **(D)** 65 **(E)** 75

4. A Ema tem quatro canetas de cores diferentes para pintar uma bandeira retangular com três faixas, como a bandeira da figura ao lado. Ela quer que cada faixa tenha uma só cor e que duas faixas adjacentes tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes pode a Ema colorir a bandeira?



(A) 24 **(B)** 27 **(C)** 32 **(D)** 36 **(E)** 64

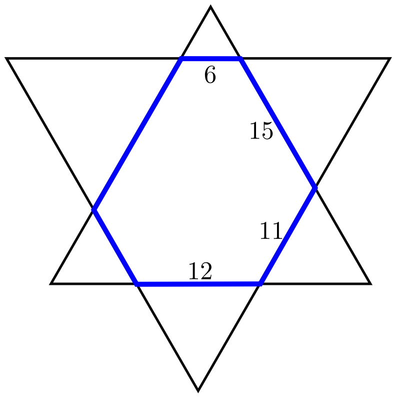
5. Dizemos que um número inteiro positivo n é *dois-primo* se tiver somente três divisores distintos, os inteiros 1, 2 e n. Quantos números inteiros *dois-primos* diferentes existem?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

6. Quantos pares de números inteiros positivos x e y satisfazem a equação $x + 2y = 2^{10}$?

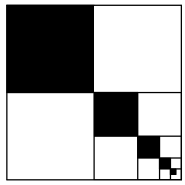
(A) $2^9 - 1$ **(B)** 2^9 **(C)** $2^9 + 1$ **(D)** $2^9 + 2$ **(E)** 0

7. Dois triângulos equiláteros foram sobrepostos de modo a formar um hexágono com os lados paralelos dois a dois. Sabemos a medida do comprimento de quatro dos seus lados, como se pode ver na figura ao lado. Qual é o perímetro do hexágono?



(**A**) 64
(**B**) 66
(**C**) 68
(**D**) 70
(**E**) 72

8. Um quadrado com medida de área 84 é dividido em quatro quadrados geometricamente iguais. O quadrado superior esquerdo é pintado de preto. O quadrado inferior direito é novamente dividido em quatro quadrados geometricamente iguais e o quadrado superior esquerdo destes quatro é pintado de preto. O processo é repetido um número infinito de vezes. Qual é a medida da área total que está pintada de preto?



(**A**) 24 (**B**) 28 (**C**) 31 (**D**) 35 (**E**) 42

9. Cada um dos números inteiros de 1 a 9 deve ser colocado numa das 9 caixas da figura ao lado, de modo que a soma de quaisquer três números em caixas consecutivas seja um múltiplo de 3. Os números 7 e 9 já foram colocados. De quantas maneiras diferentes podem ser preenchidas as restantes caixas?

	7		9					

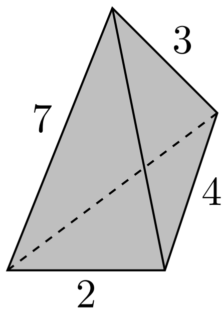
(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 18 (**E**) 24

10. Qual é o algarismo das unidades do produto $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Problemas de 4 pontos

11. As medidas de comprimento das arestas de uma pirâmide triangular são números inteiros. Na figura ao lado estão indicadas as medidas de quatro arestas. Qual é a soma das medidas de comprimento das outras duas arestas?



(**A**) 9 (**B**) 10
(**C**) 11 (**D**) 12
(**E**) 13

12. Dado um número inteiro positivo n, define-se $n!$ como o produto de todos os números inteiros de 1 a n. Por exemplo, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Qual é a soma dos algarismos de N se $N! = 6! \times 7!$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 8 (**E**) 9

13. Os gráficos das funções f_a, definidas por $f_a(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$, têm um ponto em comum, não dependente do número real a escolhido. Qual é a soma das coordenadas desse ponto?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 7 (**D**) 8
(**E**) Nenhuma das opções anteriores

14. A soma de cinco números, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, é S. Para cada k, $1 \leq k \leq 5$, verifica-se $a_k = k + S$. Qual é o valor de S?

(**A**) $\frac{15}{4}$ (**B**) $-\frac{15}{4}$ (**C**) -15 (**D**) 15

(**E**) Nenhuma das opções anteriores

15. Quantos pares de números inteiros m e n satisfazem a desigualdade $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

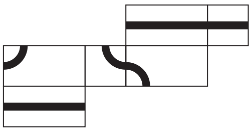
16. Há 23 animais sentados numa fila do cinema. Cada animal ou é um castor ou é um canguru e todos têm pelo menos um vizinho que é um canguru. Qual é o maior número possível de castores sentados nessa fila?

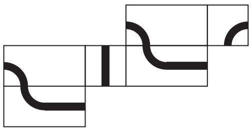
(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

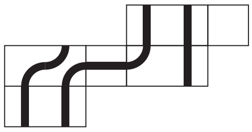
17. Sabe-se que existe um número inteiro n tal que o número 5^{5^6} pode ser escrito na forma n^n. Qual é o valor de n?

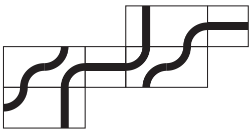
(**A**) 5^{30} (**B**) 5^6 (**C**) 5^5 (**D**) 30 (**E**) 11

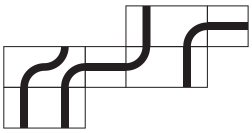
18. O Luís desenhou um caminho fechado ao longo de um prisma retangular. Qual das seguintes planificações pode representar a planificação do prisma do Luís?

(**A**) 

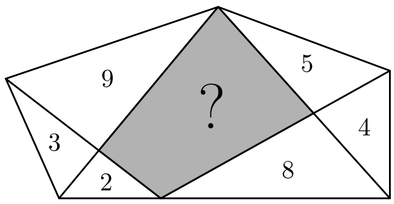
(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

19. Um pentágono foi dividido em polígonos, como se pode ver na figura ao lado. O número no interior de cada triângulo indica a medida da sua área. Qual é a medida da área do quadrilátero sombreado?



(**A**) 15 (**B**) $\frac{31}{2}$ (**C**) 16 (**D**) 17

(**E**) 18

20. Quantos números inteiros são divisores de $2^{20}3^{23}$, mas não de $2^{10}3^{20}$?

(**A**) 13 (**B**) 30 (**C**) 273 (**D**) 460

(**E**) Nenhuma das opções anteriores

Problemas de 5 pontos

21. Duas funções f e g verificam as igualdades $f(x) + 2g(1-x) = x^2$ e $f(1-x) - g(x) = x^2$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Qual das seguintes expressões é a expressão analítica de f?

(**A**) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (**B**) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (**C**) $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

(**D**) $x^2 - 4x + 5$ (**E**) Não existem funções nestas condições

22. Numa competição de escalada, cada um dos 13 atletas de um clube participa em três categorias. A pontuação final de cada atleta é o produto das suas posições nas três categorias. Por exemplo, se um atleta ficar em 4.º, 3.º e 6.º, a sua pontuação final será $4 \times 3 \times 6 = 72$. Quanto maior for a pontuação final obtida pelo atleta, pior será a sua posição final. A Ana ficou em primeiro lugar em duas das categorias. Qual é a pior posição final em que a Ana pode ficar?

(**A**) 2.º (**B**) 3.º (**C**) 4.º (**D**) 5.º (**E**) 6.º

23. Uma espiral de números consecutivos é construída começando com o número 1, conforme se pode ver abaixo. Continuando a construir a espiral, seguindo o mesmo padrão, como irá aparecer a sequência de números 625, 626 e 627?

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & 10 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 12 & \rightarrow & 13 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\
24 & & 9 & & 2 & \rightarrow & 3 & & 14 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
23 & & 8 & & 1 & & 4 & & 15 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
22 & & 7 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 5 & & 16 \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
21 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 19 & \leftarrow & 18 & \leftarrow & 17
\end{array}
$$

(**A**) $\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$

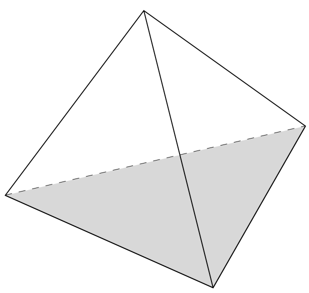
(**B**) $\begin{array}{ccc} 626 & \rightarrow & 627 \\ \uparrow & & \\ 625 & & \end{array}$

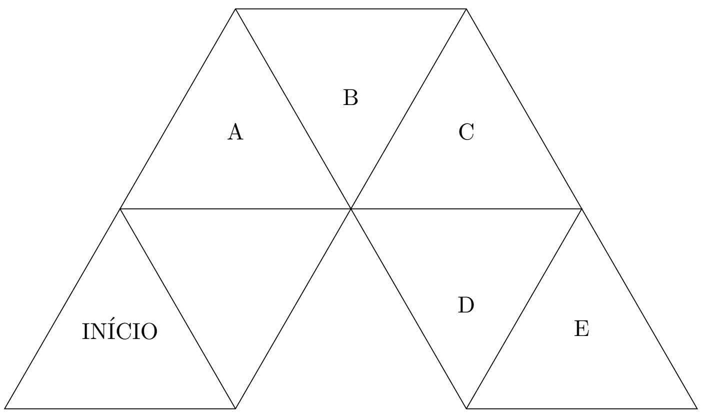
(**C**) $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$

(**D**) $\begin{array}{ccc} 625 & \rightarrow & 626 \\ & & \downarrow \\ & & 627 \end{array}$

(**E**) $\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$

24. Um bloco, com a forma de um tetraedro regular, tem uma face sombreada.

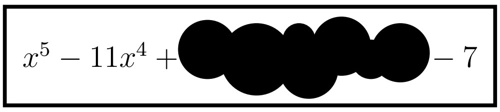




O bloco é colocado no tabuleiro da figura acima com a face sombreada no triângulo marcado com INÍCIO. O bloco passa de um triângulo para o triângulo vizinho, girando em torno da aresta comum a ambos. Excluindo o triângulo inicial, em qual dos triângulos do tabuleiro ficará pela primeira vez assente a face sombreada do bloco?

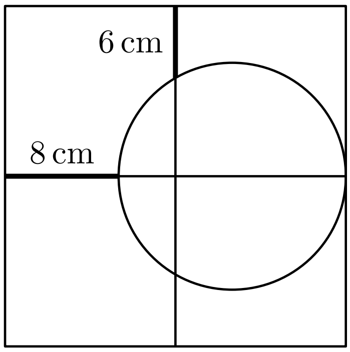
(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

25. Uma parte do polinómio de grau cinco escrito na figura ao lado não pode ser vista, por causa de uma mancha de tinta. Sabe-se que todas as cinco raízes do polinómio são números inteiros. Qual é a maior potência de $x-1$ que divide o polinómio?



(**A**) $(x-1)^1$ (**B**) $(x-1)^2$ (**C**) $(x-1)^3$ (**D**) $(x-1)^4$ (**E**) $(x-1)^5$

26. O quadrado maior da figura ao lado foi dividido em quatro quadrados geometricamente iguais. A circunferência é tangente ao lado direito do quadrado maior no seu ponto médio. Qual é o comprimento do lado do quadrado maior? Observe-se que o diagrama não está desenhado à escala.

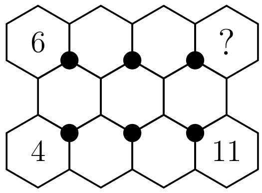


(**A**) 18 cm
(**B**) 20 cm
(**C**) 24 cm
(**D**) 28 cm
(**E**) 30 cm

27. Qual é o maior divisor comum a todos os números da forma $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, onde n é um número inteiro positivo?

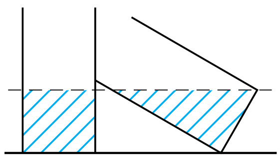
(**A**) $2^9 3^3$ (**B**) $2^3 3^3 5^3$ (**C**) $2^6 3^3 5^3$ (**D**) $2^8 3^2 5^3$ (**E**) $2^9 3^3 5^3$

28. Os números inteiros de 1 a 11 devem ser colocados nos hexágonos do diagrama ao lado, um número por hexágono, de forma a que a soma dos três números vizinhos de cada um dos seis pontos pretos seja a mesma. Três dos números já foram colocados. Qual é o número que deverá ser colocado no hexágono com um ponto de interrogação?



(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

29. Dois tanques cilíndricos idênticos contêm a mesma quantidade de água. Um cilindro está na vertical e o outro está encostado a ele. O nível da água em cada um deles é o mesmo, como se pode ver no esquema ao lado. A base de cada um dos cilindros é um círculo com área $3\pi\ \text{m}^2$. Que quantidade de água contém cada tanque?



(**A**) $3\sqrt{3}\pi\ \text{m}^3$ (**B**) $6\pi\ \text{m}^3$ (**C**) $9\pi\ \text{m}^3$ (**D**) $\frac{3\pi}{4}\ \text{m}^3$

(**E**) Não é possível saber

30. O produto de seis números inteiros positivos consecutivos é um número com 12 algarismos da forma

$$abb\,cdd\,cdd\,abb,$$

onde os algarismos a, b, c e d são eles próprios quatro números consecutivos por uma certa ordem. Qual é o algarismo d?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5