

4.4 Secções planas de superfícies e sólidos

Geometria Descritiva
2006/2007

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies e sólidos

- Quando um **plano** intersecta uma **superfície** geométrica determina sobre ela uma **linha plana** que pertence à superfície
 - A linha obtida pode ser
 - uma **circunferência**
 - **rectas** (problema mais simples)
 - A linha pode ser uma **curva complexa**
 - Ela terá que ser identificada ponto a ponto
 - É útil conhecer a **tangente** à secção plana em cada ponto
 - A tangente à secção plana é a recta de intersecção do plano secante que gera a secção plana com o plano tangente à curva nesse ponto



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

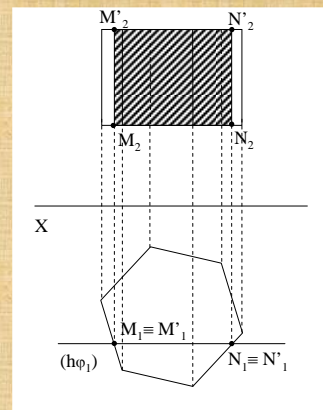
Secções planas de poliedros

- Aplicação a prismas pirâmides e outros poliedros
- 1º caso: O plano secante é **projectante**
 - A secção fica determinada pela intersecção de cada aresta do sólido com o plano secante projectante
- 2º caso: O plano secante **não é projectante**
 - A secção é obtida através da intersecção do plano que contém cada face do sólido com o plano secante

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de poliedros

- Aplicação a prismas pirâmides e poliedros
 - Determinar a secção plana definida pelo **plano de frente** φ_1 com o **prisma hexagonal regular** com bases de nível
 - A secção é o **rectângulo** $MNN'M'$

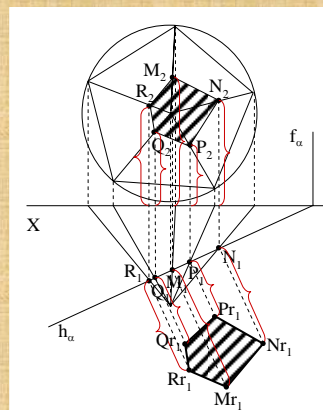


Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de poliedros

■ Aplicação a prismas pirâmides e poliedros

- Determinar a secção plana definida pelo **plano vertical** α com uma **pirâmide pentagonal regular** assente em φ_0
- A secção é o **polígono** MNPQR
- Para se obter a secção em verdadeira grandeza fez-se o seu **rebatimento** sobre o plano horizontal



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

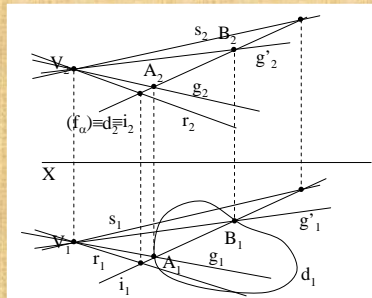
Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas

- **1º caso:** O **plano** secante **passa** pelo **vértice** da superfície
 - O plano **intersecta** a directriz
 - Num **ponto**:
 - A secção plana é a **geratriz** da superfície que passa nesse ponto
 - Em **vários pontos**:
 - A secção plana é constituída por **geratrizes**
 - O plano **não intersecta** a directriz
 - A secção plana reduz-se a um **ponto** (o vértice da superfície)

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas

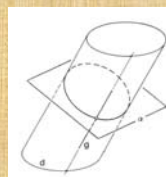
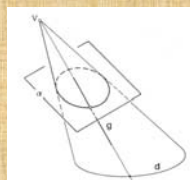
- A superfície é definida pelo **vértice** V e pela **directriz** d (num plano α de topo)
- O plano secante é definido pelas **rectas** r e s concorrentes em V (portanto o plano contém o vértice da superfície)
- Determinar a **secção** definida na superfície pelo plano secante
 - Identificam-se as **geratrizes** que definem a secção plana identificando **dois** dos seus **pontos** pertencentes à **directriz** (pontos A e B)
 - O plano secante **intersecta** o plano que contém a directriz segundo a recta i, que determina sobre a directriz os pontos A e B
 - A **secção plana** é constituída pelas geratrizes g e g'



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas

- **2º caso:** O **plano** secante **não passa** pelo **vértice** da superfície
 - A secção **não** contém nenhuma **geratriz**
 - A secção é constituída pelos pontos de **intersecção** de cada uma das **geratrizes** com o **plano secante**



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

- As **secções planas** de superfícies cónicas ou cilíndricas de revolução são **cónicas**:
 - Elipses
 - Parábolas
 - Hipérboles
- Considerando que
 - uma circunferência é o caso particular de uma elipse
 - um ponto é um caso particular de uma circunferência
 - duas rectas paralelas são uma parábola degenerada
 - duas rectas coincidentes são uma parábola degenerada
 - duas rectas concorrentes são uma hipérbole degenerada

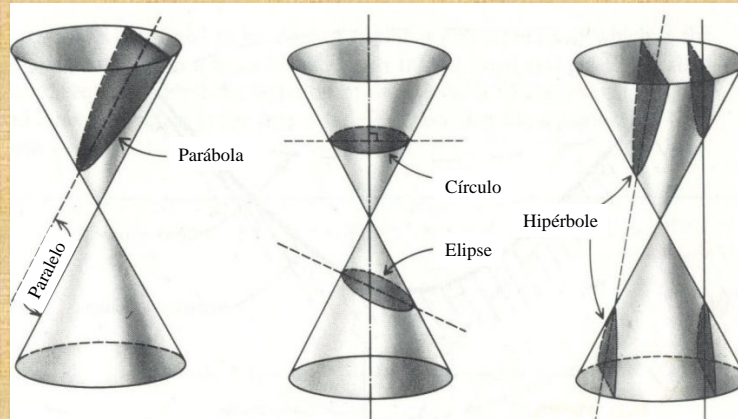
Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

- **2º caso**: O **plano** secante **não passa** pelo **vértice** da superfície
 - Se o plano secante intersecta **todas** as **geratrizes** da superfície a cónica é uma **elipse** (curva fechada)
 - Se o plano secante é paralelo apenas a **uma** das **geratrizes** a cónica é uma **parábola**
 - Se o plano secante é paralelo apenas a **duas** **geratrizes** a cónica é uma **hipérbole**

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

- Note-se que:
 - A secção plana de uma superfície cilíndrica nunca pode ser uma parábola ou uma hipérbole
 - O plano secante não pode ser paralelo a uma ou a duas geratrizes sem ser paralelo a todas
- Para determinar se a secção plana de uma superfície cónica é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole faz-se passar pelo **vértice** um plano β **paralelo** ao plano secante α
 - O plano β determina quais são as **geratrizes paralelas** a α

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

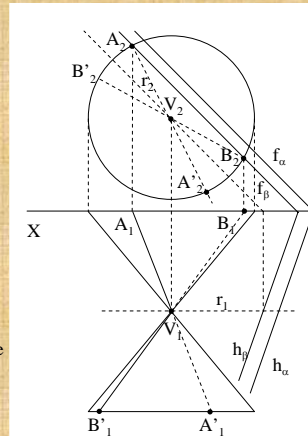
Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

- Determinar que tipo de superfície é a **secção plana** definida pelo plano α na porção de superfície cónica de revolução indicada

- Considera-se uma **recta** r , de frente, paralela ao plano α e que passa no vértice
- Considera-se o **plano** β **paralelo** a α e que contém r
- Este plano **intersecta** a superfície segundo duas **geratrizes** AVA' e BVB' que são portanto **paralelas** a α
- A **secção plana** é portanto uma **hipérbole**

Nota: Se a directriz da superfície cónica não estivesse sobre o plano frontal de projecção teríamos que o colocar nessa posição fazendo uma mudança do plano frontal de projecção ou determinando nova directriz sobre este plano

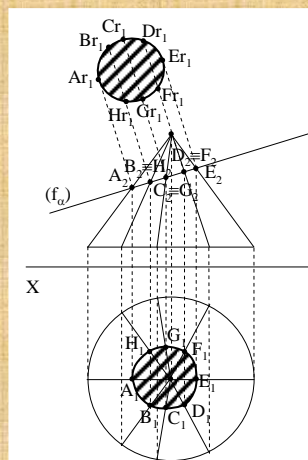
Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra



Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

- Determinar a **secção plana** definida pelo plano de topo α no cone indicado

- O plano de topo α intersecta todas as geratrizes do cone, logo a **secção plana** é uma **elipse**
 - A projecção cilíndrica de uma elipse é sempre uma elipse
 - Circunferência (caso particular de uma elipse)
 - Segmento rectilíneo (elipse degenerada)
 - Determinam-se os pontos de intersecção do plano com as geratrizes
 - A elipse resultante é ABCDEFGH
 - Para que apareça em verdadeira grandeza fez-se o seu rebatimento

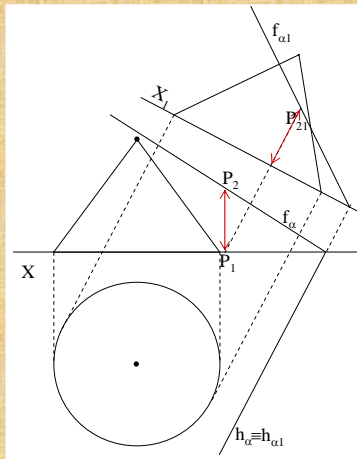


Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

■ Determinar a **secção plana** definida pelo plano α no cone indicado

- O plano α não é projectante
- Faz-se uma **mudança do plano** frontal de projecção de forma a transformá-lo num plano de topo
- O plano α intersecta todas as geratrizes do cone, logo a secção plana é uma **elipse**
- Determinam-se os pontos de **intersecção** do plano com as geratrizes
- A **elipse resultante** é ABCDEFGH
- Para que as elipses apareçam em verdadeira grandeza será necessário fazer o seu **rebatimento**

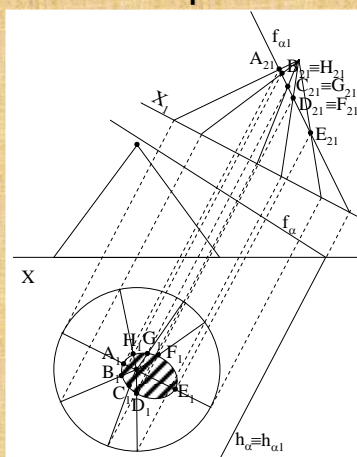


Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

■ Determinar a **secção plana** definida pelo plano α no cone indicado

- O plano α não é projectante
- Faz-se uma **mudança do plano** frontal de projecção de forma a transformá-lo num plano de topo
- O plano α intersecta todas as geratrizes do cone, logo a secção plana é uma **elipse**
- Determinam-se os pontos de **intersecção** do plano com as geratrizes
- A **elipse resultante** é ABCDEFGH
- Para que as elipses apareçam em verdadeira grandeza será necessário fazer o seu **rebatimento**

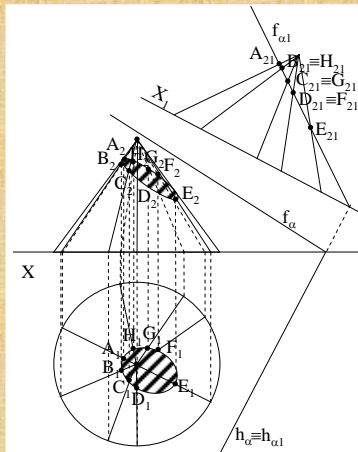


Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

■ Determinar a **secção plana** definida pelo plano α no cone indicado

- O plano α não é projectante
- Faz-se uma **mudança do plano** frontal de projecção de forma a transformá-lo num plano de topo
- O plano α intersecta todas as geratrizes do cone, logo a secção plana é uma **elipse**
- Determinam-se os pontos de **intersecção** do plano com as geratrizes
- A **elipse resultante** é ABCDEFGH
- Para que as elipses apareçam em verdadeira grandeza será necessário fazer o seu **rebatimento**

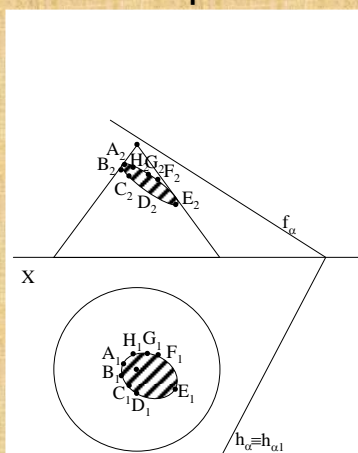


Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

■ Determinar a **secção plana** definida pelo plano α no cone indicado

- O plano α não é projectante
- Faz-se uma **mudança do plano** frontal de projecção de forma a transformá-lo num plano de topo
- O plano α intersecta todas as geratrizes do cone, logo a secção plana é uma **elipse**
- Determinam-se os pontos de **intersecção** do plano com as geratrizes
- A **elipse resultante** é ABCDEFGH
- Para que as elipses apareçam em verdadeira grandeza será necessário fazer o seu **rebatimento**

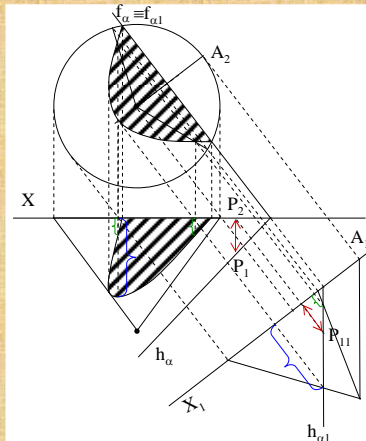


Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

■ Determinar a **secção plana** definida pelo plano α no cone indicado

- O plano α não é projectante
- Faz-se uma **mudança do plano** horizontal de projecção de forma a transformar α num plano vertical
- O plano α é **paralelo** apenas a **uma geratriz** do cone (que passa no vértice e no ponto A), logo a secção plana é uma **parábola**
- Determina-se as suas projecções através das projecções dos pontos de **intersecção** do plano com as geratrizes

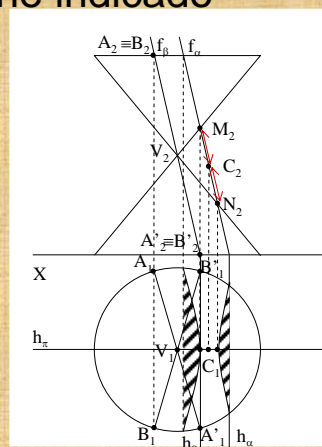


Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies cónicas e cilíndricas de revolução

■ Determinar a **secção plana** definida pelo plano de topo α no duplo cone indicado

- Considera-se o plano β **paralelo** a α e que passa pelo **vértice** do duplo cone
- O plano β **intersecta** o cone segundo **duas geratrizes** AVA' e BVB' que são **paralelas** a α
- Logo a secção plana definida pelo plano α é uma **hipérbole**
- Os pontos M e N são os **vértices** da hipérbole e C é o ponto médio do eixo transverso MN da hipérbole
 - O plano frontal π é um plano de simetria da hipérbole, logo o eixo transverso é frontal
- Para que a hipérbole apareça em verdadeira grandeza é necessário fazer o seu **rebatimento**



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de superfícies de revolução

- **1º caso:** O plano secante **contém** o **eixo** da superfície
 - A secção plana é uma **meridiana** da superfície
- **2º caso:** O plano secante é **perpendicular** ao **eixo** da superfície
 - A secção plana é um **paralelo** da superfície
- **3º caso:** O plano secante é **oblíquo** ao **eixo** da superfície
 - A secção plana é determinada por **pontos** que podem ser determinados sobre cada **paralelo** ou sobre cada **meridiana**
 - Determina-se a recta de **intersecção** do plano secante com o plano do paralelo ou da meridiana e consideram-se os **pontos comuns** à recta obtida e ao paralelo ou à meridiana

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de uma esfera

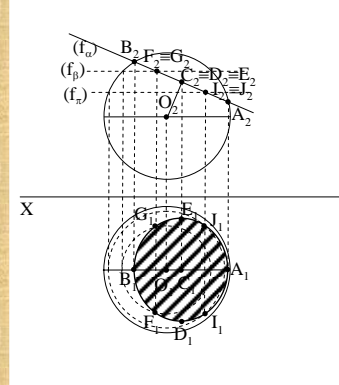
- A secção plana de uma **esfera** é sempre um **círculo**
 - O **centro** do **círculo** é o pé da perpendicular baixada do centro da esfera para o plano secante
 - As projecções do círculo são **elipses**
 - O eixo maior é a projecção do diâmetro paralelo ao plano de projecção respectivo (projecta-se em verdadeira grandeza)
 - O eixo menor é a projecção do diâmetro perpendicular ao diâmetro paralelo ao plano de projecção em questão.

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Secções planas de uma esfera

- Determinar a **secção plana** definida pelo plano de topo α na esfera representada

- O centro do círculo correspondente à secção plana é o ponto C
- A **projecção frontal** da secção reduz-se ao segmento de recta A_2B_2
- A **projecção horizontal** é a elipse com
 - centro em C_1
 - eixo maior $E_1D_1=A_2B_2$
 - eixo menor A_1B_1



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

4.5 Intersecção de rectas com sólidos

Geometria Descritiva
2006/2007

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

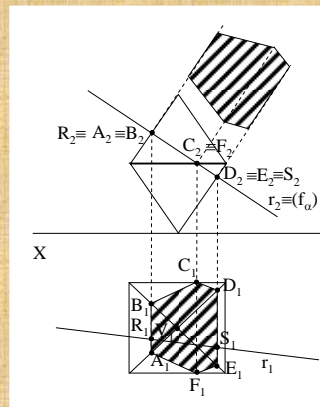
Intersecção de rectas com sólidos

- Faz-se passar pela recta um **plano auxiliar** que intersectará o sólido segundo uma secção plana
- Os pontos comuns à **recta** e à **secção plana** são os pontos procurados

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Intersecção de rectas com sólidos

- Determinar a **intersecção** de um **octaedro** regular com 3 cm de aresta e uma diagonal vertical, tendo o ponto de menor cota a cota zero, com a **recta** r
 - Considera-se o **plano de topo** α que contém a recta r
 - Determina-se a **secção plana** definida no octaedro pelo plano α
 - A secção obtida é um polígono com vértices A, B, C, D, E e F
 - Determinam-se os pontos de **intersecção** da **secção plana** com a **recta** r (pontos R e S)
 - Para obter a secção em verdadeira grandeza pode rebater-se o plano α



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

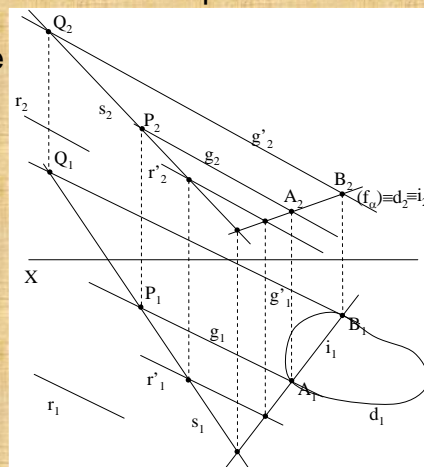
Intersecção de uma recta com superfícies cónicas e cilíndricas

- Faz-se passar pela recta um **plano auxiliar** que intersectará a superfície segundo uma secção plana
 - Por exemplo o plano que passa pelo vértice
- Os pontos comuns à **recta** e à **secção plana** são os pontos procurados

Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Intersecção de uma recta com superfícies cónicas e cilíndricas

- Determinar a intersecção da recta s com a superfície cilíndrica definida pela directriz d (situada num plano de topo) e pela direcção das geratrizes r
 - Considera-se o **plano auxiliar** definido pela recta s e pela direcção das geratrizes
 - A **intersecção** deste **plano** com o plano α que contém a directriz é a recta i
 - A **intersecção** da **recta** i com a **directriz** define os pontos A e B
 - Por A e B passam as **geratrizes** g e g' que constituem a **secção plana**
 - A **intersecção** da recta s com a secção plana (são coplanares) definem os **pontos** procurados P e Q



Cidália Fonte – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Intersecção de uma recta com uma esfera

- Utiliza-se um **plano auxiliar projectante** que contém a recta
- Determina-se a **secção plana** formada na esfera pelo plano auxiliar
- Determina-se a **intersecção** da secção plana com a recta
 - Para se obter a posição dos pontos com maior precisão pode **rebater-se** a secção plana e a recta em torno por exemplo de uma recta frontal f

