CIDÁLIA MARIA PARREIRA DA COSTA FONTE

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

1994

1.INTRODUÇÃO

1.1. OBSERVAÇÕES E ERROS DE OBSERVAÇÃO

1.1.1. Factores que caracterizam a medição de uma grandeza

A medição de uma qualquer quantidade (com excepção de uma simples contagem) implica levar a cabo um certo número de procedimentos físicos, tais como a preparação da medição (por exemplo a calibragem do instrumento a usar), a colocação do instrumento em posição de medição e a comparação da quantidade a medir com um padrão. O valor resultante deste conjunto de procedimentos, expresso numa determinada unidade, representa a medição feita.

A execução de todas estas operações leva ao aparecimento de erros, que podem ser de três tipos.

1.1.2. Erros associados ao processo de medição

1.1.2.1. Erros acidentais

Os erros acidentais são normalmente originados por enganos ou descuidos e apresentam uma magnitude muito superior aos outros tipos de erros.

Para que se possa fazer um ajustamento das observações, utilizando, por exemplo, o método dos mínimos quadrados, é necessário eliminar todos os erros acidentais existentes nas observações, devendo-se usar procedimentos e métodos que permitam a sua detecção e eliminação.

1.1.2.2. Erros sistemáticos

Os erros sistemáticos repetem-se do mesmo modo sempre que uma determinada acção se repete nas mesmas circunstâncias. São erros que, quando conhecidos, podem sempre ser expressos através de uma formulação matemática.

Tal como acontece com os erros acidentais, para se fazer o ajustamento de um conjunto de observações também é necessário eliminar os erros sistemáticos, o que implica que se tenha que conhecer antecipadamente a fonte de erro (que pode ser por exemplo o observador, o instrumento usado, as condições físicas de medição, etc).

1.1.2.3. Erros aleatórios

Os erros aleatórios são erros de pequena amplitude cuja origem é desconhecida e que têm propriedades análogas às propriedades estatísticas de uma amostragem.

Pode dizer-se que são os erros existentes num grupo de observações depois de detectados e eliminados os erros acidentais, identificadas as causas de erros sistemáticos e corrigidas as observações da sua influência.

A existência de erros aleatórios é uma característica inerente ao processo físico de medição, sendo portanto uma propriedade das observações.

Deste modo quando estamos perante o problema de medir determinada grandeza (uma distância, um ângulo,...) podemos considerar que estatisticamente temos o seguinte problema: temos uma variável aleatória e vamos recolher uma amostra (fazer um conjunto de observações). Os parâmetros que definem a variável aleatória, valor médio e variância, vão-nos dar respectivamente o valor a adoptar para a grandeza que estamos a medir e uma indicação sobre a precisão com que as observações foram feitas. O problema de ajustamento consiste assim em determinar os parâmetros da variável aleatória à custa da amostra recolhida.

Em virtude das propriedades das observações atrás descritas, em geral, quando se fazem observações de grandezas, para determinação do seu valor ou para as utilizar no cálculo de outras quantidades, fazem-se mais observações do que as estritamente necessárias. As principais razões para a existência de redundância são:

- permitir a detecção de erros grosseiros através da confirmação dos valores medidos.

- permitir fazer uma avaliação mais precisa das quantidades desejadas, através da execução de um ajustamento.

- permitir estimar a ordem de grandeza da precisão obtida para os valores ajustados.

2. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

2.1. MODELO MATEMÁTICO, FUNCIONAL E ESTOCÁSTICO

2.1.1. Modelo matemático

Chama-se modelo matemático as sistema teórico ou conceito abstracto através do qual se descreve uma situação física ou um conjunto de acontecimentos. Esta descrição não é necessariamente completa ou exaustiva. Como um modelo serve um propósito específico, a sua formação pode variar largamente de um ponto de vista para outro. Deste modo, o mesmo sistema físico pode ser descrito por mais do que um modelo.

Um modelo matemático pode ser dividido em duas partes conceituais: o modelo funcional e o modelo estocástico:

2.1.2. Modelo funcional

O modelo funcional é composto por relações que descrevem a geometria ou características físicas do problema em questão.

<u>Exemplo 1</u>: Para a determinação da área de um terreno rectangular com lados <u>a</u> e <u>b</u> o modelo funcional é A = ab.

<u>Exemplo 2</u>: Para a determinação da forma de um triângulo com ângulos α, β e γ o modelo funcional será $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$.

2.1.3. Modelo estocástico

O modelo estocástico é composto pelo conjunto de relações que descrevem as propriedades estatísticas dos elementos envolvidos no modelo funcional. O modelo estocástico indica por exemplo a qualidade das observações feitas (as suas precisões, relativas ou absolutas), indica se as observações estão correlacionadas ou não, indica ainda as variáveis que são consideradas constantes durante o ajustamento e as que se pretendem determinar.

2.2. FINALIDADE DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

De acordo com o que foi dito no ponto 1.1.2., quando se pretendem determinar uma ou várias grandezas normalmente fazem-se mais observações do que as estritamente necessárias para determinar o problema em questão. Devido à superabundância existente temos várias possibilidades de obter soluções para o problema, que serão tantas quantas as combinações que podemos formar com as observações, tomadas em número mínimo necessário para resolver o problema em questão.

Desta forma as observações $l_1, l_2, ..., l_n$ não são consistentes com o modelo funcional, e teremos que substitui-las por um conjunto de estimativas $\hat{l}_1, \hat{l}_2, ..., \hat{l}_n$ (observações ajustadas) que satisfaçam o modelo funcional. Estas estimativas são obtidas adicionando a cada uma das observações uma quantidade denominada de correcção ou resíduo (v_i) de tal forma que:

$$\hat{l}_i = l_i + v_i \qquad \text{com} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Mas existem vários valores de v_i que darão origem a um conjunto de observações ajustadas consistente com o modelo funcional.

EXEMPLO:

Se para determinarmos a forma de um triângulo medirmos os seus três ângulos internos α, β e γ, teremos como modelo funcional a seguinte equação:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

É no entanto muito provável que a soma dos três ângulos medidos não seja 180˚, devido à existência de erros aleatórios nas medições. Suponhamos então que a sua soma excede 180˚ em 3". Para termos as observações consistentes com o modelo funcional teremos que substituir os valores observados por valores ajustados, que podemos obter de várias formas. Neste caso podemos por exemplo subtrair a cada ângulo observado 1", ou subtrair 2" a um ângulo e 1" a outro, ou ainda subtrair os 3" apenas a um ângulo, deixando os restantes dois inalterados.

Para escolhermos o "melhor" conjunto de observações ajustadas (ou seja os valores mais prováveis para as observações ajustadas) vamos utilizar um critério adicional, que é o critério dos mínimos quadrados.

2.3. PRINCÍPIO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O critério dos mínimos quadrados consiste em minimizar a função

$$\Phi = v^t W v \,,$$

onde v é o vector dos resíduos associado às n observações $l_1, l_2, ..., l_n$

$$v_{n,1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

e W a matriz dos pesos das observações, que é uma matriz quadrada de ordem n. Para observações consideradas independentes (ou não correlacionadas) a matriz dos pesos toma a forma:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix} = \sigma_0^{\,2} \begin{bmatrix} 1/\sigma_{1^2} & & & \\ & 1/\sigma_{2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_{n^2} \end{bmatrix}$$

sendo w_i o peso da observação i, σ_0^2 a variância de referência (a variância de uma observação com peso unitário) e σ_i^2 a variância da observação i.

Como no caso de observações não correlacionadas a matriz W é uma matriz diagonal, a função Φ toma a forma:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (w_i v_i^2)$$

e no caso mais simples em que as observações além de serem não correlacionadas têm a mesma precisão ($W_i = 1$) temos:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (v_i^2)$$

donde advém o nome do critério.

Assim, as observações ajustadas vão ser os elementos do vector $\hat{l} = l + v$, sendo l o vector das observações e v o vector dos resíduos que tornam mínima a função Φ.

3. TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Apesar de para um determinado modelo e um determinado conjunto de dados o método dos mínimos quadrados gerar uma solução única, é possível fazer o ajustamento usando várias técnicas, que se distinguem pelo tipo de elementos envolvidos no ajustamento e modo de definir o modelo funcional.

O modelo funcional para resolver um determinado problema pode, como já foi dito, ser escrito de várias formas, podendo inclui-se nele, para além das observações, outras variáveis e constantes numéricas. As outras variáveis que podem surgir no modelo são denominadas de parâmetros. Estes parâmetros têm à partida valores desconhecidos, de que podemos apenas conhecer valores aproximados, sendo obtidas estimativas para os seus valores com o ajustamento.

Uma vez estabelecidos os modelos funcional e estocástico, o algoritmo do método dos mínimos quadrados traduz-se por um conjunto de funções matemáticas ou equações. Vamos fazer uma distinção entre dois tipos de equações: *equações de condição* e *equações constrangidas* ou *restrições*. Qualquer equação que contenha uma ou mais observações será chamada de *equação de condição.* Consequentemente qualquer problema de ajustamento de observações terá equações de condição. As equações que não incluírem quaisquer observações serão chamadas de *equações constrangidas*, e serão apenas função de parâmetros e constantes.

Existem dois tipos de técnicas de ajustamento:

a) ajustamento apenas com equações de condição;

b) ajustamento com equações de condição e equações constrangidas ou restrições;

Pode-se ainda considerar uma terceira técnica, em que não se distingem as variáveis observações e os parâmetros, denominada de:

c) ajustamento unificado

Aqui vamos abordar apenas o caso de ajustamento com equações de condição.

3.1. CASO GERAL DE AJUSTAMENTO USANDO APENAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

3.1.1. Estabelecimento do modelo funcional:

Antes de iniciar a fase de aquisição dos dados num levantamento, é necessário especificar o modelo matemático a considerar. Este modelo é construído utilizando um certo número de variáveis e um conjunto de relações entre elas. Escolhem-se então as grandezas a observar, o número de observações que se terão de fazer e a sua precisão. A necessidade de se fazer ou não um ajustamento, vai depender do número de observações feitas. Se estas forem mais do que o número mínimo de variáveis independentes que permitem definir o modelo escolhido de uma forma única, será necessário ajustar as observações para que se obtenha uma solução única. Designando este número mínimo por n_0, se forem feitas n observações, com $n > n_0$, então a redundância r, ou número de graus de liberdade, é dada por:

$$r = n - n_0 \qquad (1)$$

A redundância ou graus de liberdade pode ser interpretada como significando que entre as n observações existem r condições que têm de ser satisfeitas. Deste modo, quando $r = 0$, $n = n_0$ e as observações satisfazem perfeitamente o modelo. Se $n = n_0 + 1$, $r = 1$ e é necessário escrever uma função que relacione as n observações. (Exemplo: medição de 3 ângulos internos de um triângulo plano). Ou seja, por cada observação redundante teremos que escrever uma equação.

O número de equações que é necessário formular para um dado problema depende ainda do facto de se estarem a considerar apenas variáveis observadas ou também parâmetros. A existência de parâmetros num ajustamento é relativamente arbitrária e depende principalmente do tipo de problema a resolver. Em princípio, pode-se solucionar qualquer problema usando apenas observações. No entanto em alguns casos pode ser conveniente incluir parâmetros, particularmente quando eles são variáveis com interesse.

Considere-se então que para além de observações também existem parâmetros. Se tínhamos que escrever r condições quando não tínhamos parâmetros, teremos que escrever $r + 1$ se dispusermos de um parâmetro. Esta condição adicional é necessária para permitir determinar a incógnita adicional, mantendo o mesmo número de graus de liberdade no sistema.

Exemplo:

Suponhamos que se mede a amplitude de um ângulo α duas vezes, obtendo-se os valores α_1 e α_2. Se não considerarmos o valor ajustado α como um parâmetro, o modelo funcional terá apenas uma equação que será:

$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ determinando-se depois $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$.

Considerando α como um parâmetro teremos que escrever duas equações para construir o modelo funcional que serão:

$\alpha - \alpha_1 = 0$

$\alpha - \alpha_2 = 0$

Sendo assim, se tivermos u parâmetros independentes no ajustamento o número de condições a escrever será:

$c = r + u$ (2)

Este caso é considerado como sendo o caso geral dentro do grupo das técnicas contendo parâmetros independentes. Existem depois casos especiais dependendo do número de parâmetros envolvidos no ajustamento. Os casos extremos são quando $u = 0$, o que implica que $c = r$ e quando $u = n_0$, o que implica que $c = n$. Se u for maior do que n_0, o número de condições excederá o número de observações, o que não é possível a não ser que os parâmetros não sejam independentes (note-se que no ajustamento apenas com condições os parâmetros, se existirem, são funcionalmente independentes). Sendo assim é necessário que se verifiquem as duas desigualdades:

$r \leq c \leq n$

$0 \leq u \leq n_0$

Assim que sejam escolhidos os parâmetros a envolver no ajustamento, devem-se construir as c equações de condição independentes, envolvendo as n observações e os u parâmetros.

Frequentemente as equações que constituem o modelo funcional não são lineares, o que vai complicar consideravelmente o ajustamento. Quando tal acontece, procede-se à sua linearização, utilizando a fórmula de Taylor.

3.1.2. Dedução da forma linearizada do modelo funcional:

Suponhamos agora que tínhamos o seguinte modelo funcional:

$f_1 (\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_u}) = 0$ $\overline{l_i}$ - grandezas observadas ($1 \leq i \leq n$)

$f_2 ((\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_u}) = 0$ $\overline{x_i}$ - parâmetros ($1 \leq i \leq u$)

$\vdots$

$f_c ((\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_u}) = 0$

que para simplificar representaremos por:

$$f_i(\overline{l}, \overline{x}) = 0$$

representando $\overline{l}$ e $\overline{x}$ os verdadeiros valores das grandezas l_i e x_i respectivamente (valores que não são conhecidos).

Aplicando a estas c equações a fórmula de Taylor, desprezando termos de ordem igual ou superior à segunda obtém-se:

$$f(\overline{l}, \overline{x}) = f(l_0,x_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta l}\right)_0 (\overline{l} - l_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 (\overline{x} - x_0) = 0$$

considerando como aproximações dos valores verdadeiros $\overline{l}$ e $\overline{x}$, respectivamente os valores l_0 e x_0, e sendo o valor das derivadas parciais calculadas para $x = x_0$ e $l = l_0$.

Como o verdadeiro valor das variáveis nunca é conhecido, vamos substitui-las pelos valores ajustados $\hat{l}$.

$$f(\hat{l}, \hat{x}) = f(l_0,x_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta l}\right)_0 (\hat{l} - l_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 (\hat{x} - x_0) = 0$$

Se tomarmos como aproximações iniciais l_0 para os valores observadas as observações feitas l, teremos:

$$\hat{l} - l_0 = \hat{l} - l = v$$

sendo v o vector dos resíduos, que se adiciona aos valores observados para obter as observações ajustadas.

No entanto, se pretendermos fazer várias iterações teremos que ter em atenção o facto de os resíduos serem correcções a aplicar aos <u>valores observados</u> de modo a obter os valores ajustados, de modo que ao considerarmos como aproximação l_0 o valor ajustado obtido na iteração anterior teremos:

$$\hat{l} = l_0 + \Delta l \qquad \Leftrightarrow \qquad \hat{l} - l_0 = \Delta l$$

Como

$$\hat{l} = l + v = l_0 + \Delta l$$

temos que:

$$\hat{l} - l_0 = l + v - l_0 = \Delta l$$

Considerando ainda $x - x_0 = \Delta$ podemos escrever:

$$\boxed{f(\hat{l},\hat{x}) = f(l_0,x_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta l}\right)_0 (l + v - l_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \Delta = 0}$$

que para uma primeira iteração, como já foi dito, e uma vez que $l = l_0$, se reduz a:

$$f(\hat{l},\hat{x}) = f(l,x_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta l}\right)_0 v + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \Delta = 0$$

Considerando $A = \left(\frac{\delta f}{\delta l}\right)_0$ e $B = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0$, teremos:

$$f(l_0,x_0) + A\,(l + v - l_0) + B\,\Delta = 0$$

$$Al + Av - Al_0 + B\,\Delta = - f(l_0,x_0)$$

$Av + B\,\Delta = -\,f(l_0,x_0) + Al_0 - Al$

Fazendo:

$d = -\,f(l_0,x_0) + Al_0$

obteremos:

$Av + B\Delta = d - Al = f$

ou seja:

$\boxed{Av + B\Delta = f}$ (3)

que é o <u>modelo funcional linearizado</u>, sendo:

v - Vector dos resíduos $v_{n,1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

Δ - Vector das correcções dos parâmetros $\Delta_{u,1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix}$

A - Matriz Jacobiana $J_{fl} = \left(\frac{\delta f_i}{\delta l_i}\right)_0$ $A_{c,n} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta l_1} & \frac{\delta f_1}{\delta l_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta l_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta l_1} & \frac{\delta f_2}{\delta l_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta l_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\delta f_c}{\delta l_1} & \frac{\delta f_c}{\delta l_2} & \cdots & \frac{\delta f_c}{\delta l_n} \end{bmatrix}_0$

B - Matriz Jacobiana $J_{fx} = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_i}\right)_0$ $B_{c,u} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_u} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_u} \\ \vdots & & & \\ \frac{\delta f_c}{\delta x_1} & \frac{\delta f_c}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_c}{\delta x_u} \end{bmatrix}_0$

l - Vector coluna das observações $l_{n,1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$

O sistema (3) vai ser usado para fazer o ajustamento de observações e parâmetros independentes. É um sistema com c equações lineares com n + u incógnitas, que são os elementos dos vectores v e Δ. Uma vez que das equações (1) e (2) se pode concluir que

$c < n + u$

existem muitas soluções para este sistema. Para se obter uma solução única vai-se-lhe juntar o critério dos mínimos quadrados, ou seja, tornar $\Phi = v^tWv$ mínimo.

3.1.3. Determinação das variáveis do problema: v e Δ

Temos assim que resolver o sistema:

$$\begin{cases} Av + B\Delta = f \\ \Phi = v^tWv \ \text{ mínimo} \end{cases}$$

que é um problema de extremos condicionados, e vai ser resolvido pelo método de Lagrange.

Vamos então construir uma função Ψ a partir de Φ, introduzindo c multiplicadores de Lagrange de modo que:

$$\Psi = \Phi + \lambda\,(Av + B\Delta - f)$$

para simplicidade de cálculos os c multiplicadores de Lagrange serão representados na forma $\lambda = -2\,k^t$, sendo k um vector coluna de dimensão cx1, e teremos:

$$\Psi = \Phi - 2\,k^t\,(Av + B\Delta - f) = v^tWv - 2\,k^t\,(Av + B\Delta - f)$$

O mínimo da função Φ será a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\Psi}{\delta v} = 0 \\ \dfrac{\delta\Psi}{\delta\Delta} = 0 \\ Av + B\Delta - f = 0 \end{cases}$$

Sendo $\frac{\delta\Psi}{\delta v}$ as derivadas de Ψ em ordem ao vector v, e $\frac{\delta\Psi}{\delta\Delta}$ as derivadas de Ψ em ordem ao vector Δ.

Calculando as derivadas (ver apêndice) obtém-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\Psi}{\delta v} = 2v^tW - 2\,k^t A = 0 \\ \dfrac{\delta\Psi}{\delta\Delta} = -\,2\,k^tB = 0 \\ Av + B\Delta - f = 0 \end{cases}$$

Que é chamado de <u>sistema de equações normais</u>.

Para a resolução do sistema podem seguir-se os seguintes passos:

1) obtém-se da 1ª equação o valor de v;

2) substitui-se v na 3ª equação e determina-se o valor de k;

3) substitui-se o valor de k na expressão encontrada para v;

4) substitui-se o valor de k na 2ª equação para determinar Δ.

1) $v^tW = k^t A$

$v^t = k^t AW^{-1}$

$v = (k^t AW^{-1})^t = (W^{-1})^tA^tk = (W^t)^{-1}A^tk = W^{-1}A^tk$

2) $A(W^{-1}A^tk) + B\Delta - f = 0$

$A(W^{-1}A^tk) = f - B\Delta$

$$(AW^{-1}A^t)k = f - B\Delta$$

$$\boxed{k = (AW^{-1}A^t)^{-1}(f - B\Delta)}$$

3) $$v = W^{-1}A^t[(AW^{-1}A^t)^{-1}(f - B\Delta)]$$

$$\boxed{v = W^{-1}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}(f - B\Delta)}$$

4) $$- 2\, k^tB = 0$$

$$- 2\, [(AW^{-1}A^t)^{-1}(f - B\Delta)]^tB = 0$$

$$[(AW^{-1}A^t)^{-1}f - (AW^{-1}A^t)^{-1}B\Delta]^tB = 0$$

$$[(AW^{-1}A^t)^{-1}f]^t\, B - [(AW^{-1}A^t)^{-1}B\Delta]^t\, B = 0$$

$$[(AW^{-1}A^t)^{-1}f]^t\, B = [(AW^{-1}A^t)^{-1}B\Delta]^t\, B$$

Transpondo ambos os membros vem:

$$\{[(AW^{-1}A^t)^{-1}f]^t\, B\}^t = \{[(AW^{-1}A^t)^{-1}B\Delta]^t\, B\}^t$$

$$B^t\, [(AW^{-1}A^t)^{-1}f] = B^t\, [(AW^{-1}A^t)^{-1}B\Delta]$$

$$B^t\, [(AW^{-1}A^t)^{-1}B\Delta] = B^t\, [(AW^{-1}A^t)^{-1}f]$$

$$[B^t\, (AW^{-1}A^t)^{-1}B]\Delta = B^t\, (AW^{-1}A^t)^{-1}f$$

$$\boxed{\Delta = [B^t\, (AW^{-1}A^t)^{-1}B]^{-1}[B^t\, (AW^{-1}A^t)^{-1}f]}$$

considerando:

$N = B^t\, (AW^{-1}A^t)^{-1}B$ e $t = B^t\, (AW^{-1}A^t)^{-1}f$

temos:

$$\boxed{\Delta = N^{-1}t}$$

3.1.4. Cálculo das matrizes cofactor

Na resolução de um problema não basta calcular os valores mais prováveis das grandezas pretendidas. É também necessário averiguar qual a precisão desta determinação. É com esta finalidade que se calculam as matrizes cofactor.

Se conhecermos a matriz de covariância das observações (ou seja, se sabemos a variância de cada uma das observações feitas) conhecemos C_l e podemos depois determinar as matrizes de covariância dos resíduos das correcções a adicionar aos parâmetros e das observações ajustadas, respectivamente C_V, C_Δ e $C_{\hat{l}}$, através da fórmula de propagação da variância (ver apêndice), ou seja:

$$\boxed{C_V = J_{Vl}\, C_l\, J_{Vl}^t}$$

$$\boxed{C_\Delta = J_{\Delta l}\, C_l\, J_{\Delta l}^t}$$

$$\boxed{C_{\hat{l}} = J_{\hat{l}l}\, C_l\, J_{\hat{l}l}^t}$$

Se não conhecemos a variância das observações feitas teremos que lhes atribuir pesos relativos e obteremos assim a chamada matriz dos pesos W. Esta matriz W está relacionada com a matriz de covariância através da relação:

$$W_l = \sigma_0^2\, C_l^{-1} \,,$$

sendo σ_0^2 a variância de referência.

Deste modo se atribuirmos um determinado valor a σ_0 podemos determinar a matriz de covariância das observações e de seguida calcular as matrizes de covariância dos resíduos, dos parâmetros e das observações ajustadas. À priori pode-se atribuir a σ_0 qualquer valor, sendo um dos mais adoptados o valor 1. Depois de feitas as medições e calculados os valores dos parâmetros podemos estimar *à posteriori* o valor de σ_0^2 através da expressão:

$$\sigma_0^2 = \frac{v^t\, W_l\, v}{r} \,.$$

Se o valor encontrado for muito diferente do valor atribuído no início terá que se investigar a causa do erro, que poderá ser a existência de erros sistemáticos nas observações, erros nos cálculos, modelo funcional inadequado, um erro grosseiro, linearização do modelo funcional incorrecta ou a utilização de um modelo estocástico errado. A esta análise chama-se análise *à posteriori*.

Em vez de trabalharmos com as matrizes dos pesos ou as matrizes de covariância podemos trabalhar com as matrizes cofactor, que nos dão as variâncias e covariâncias relativas:

$$Q_l = W_l^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} C_l \qquad (4)$$

Desta forma poderemos determinar as matrizes cofactor dos parâmetros, dos resíduos e das observações ajustadas.

Matriz cofactor dos parâmetros

Conhecendo a matriz dos pesos, ou a matriz de covariância das observações, podemos obter Q_l, através da equação (4). Para determinarmos agora a matriz cofactor dos parâmetros vamos utilizar a expressão:

$$\Delta = N^{-1}[B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}f]$$

como f = d - Al, temos:

$$\Delta = N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}(d - Al)$$

$$\Delta = N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}d - N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}Al$$

Uma vez que

$$Q_{\Delta\Delta} = J_{\Delta l}\, Q_{ll}\, J_{\Delta l}^t$$

então:

$$Q_{\Delta\Delta} = - N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}A\, Q_{ll}\, (- N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}A)^t$$

$$Q_{\Delta\Delta} = - N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}A\, W^{-1}\, [- A^t((AW^{-1}A^t)^{-1})^t\, B\, (N^{-1})^t]$$

Como W é uma matriz simétrica, logo W^{-1} é simétrica e $AW^{-1}A^t$ também é simétrica, deste modo $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ e podemos escrever:

$$Q_{\Delta\Delta} = - N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}A\ W^{-1} [- A^t(AW^{-1}A^t)^{-1} B (N^{-1})^t]$$

Pelos mesmos motivos podemos dizer que N é uma matriz simétrica, logo $(N^{-1})^t = N^{-1}$ e temos:

$$Q_{\Delta\Delta} = - N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}A\ W^{-1} (- A^t)(AW^{-1}A^t)^{-1} B\ N^{-1}$$

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}(A\ W^{-1}\ A^t)(AW^{-1}A^t)^{-1} B\ N^{-1}$$

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}B^t (AW^{-1}A^t)^{-1} B\ N^{-1}$$

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}N\ N^{-1}$$

$$\boxed{Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}}$$

Uma vez que $\hat{x} = x_0 + \Delta$, esta matriz é igual à matriz cofactor dos parâmetros ajustados ($Q_{\hat{x}\hat{x}}$).

<u>Matrizes cofactor dos resíduos e das observações ajustadas</u>

De forma análoga se provaria que:

$$\boxed{Q_{vv}=Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll} - Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}BQ_{\Delta\Delta}B^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll}}$$

$$\boxed{Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{ll} - Q_{vv}.}$$

Conhecidas as matrizes cofactor podemos determinar as matrizes de covariância, que nos darão uma indicação da precisão dos valores estimados.

Do método dos mínimos quadrados obtêm-se estimativas para todas as variáveis do modelo, assim como as respectivas matrizes cofactor. Depois de se aplicar o algoritmo computacional aos dados, é necessário avaliar estatisticamente os resultados obtidos. De facto os resultados da avaliação estatística podem levar à remodelação da tarefa de ajustamento se se concluir que o modelo não era adequado.

Por fim, convém frisar que a qualidade do ajustamento obtido com o método dos mínimos quadrados depende fundamentalmente da escolha do modelo e da correcta determinação de n_0.

3.2. CASOS PARTICULARES

O método dos mínimos quadrados tem sido principalmente usado em dois casos particulares, que se tornam mais simples do que o caso geral, que são normalmente conhecidas como "ajustamento com equações de observação" e "ajustamento com equações de condição". A escolha do caso geral ou de um dos casos particulares depende principalmente do modelo matemático do problema a resolver, mas também do tipo de instrumentação de calculo disponível, da dimensão do problema e da preferência do utilizador.

3.2.1. Ajustamento utilizando equações de observação

Esta técnica de ajustamento, também conhecida como ajustamento de observações indirectas, caracteriza-se pelo facto de cada uma das equações que formam o modelo funcional conter apenas uma observação e essa observação ter um coeficiente unitário. Desta forma têm-se n observações, n equações e u parâmetros e evidentemente c = n.

<u>1 – A forma linearizada do modelo funcional (obtida a partir do caso geral):</u>

Tínhamos obtido no caso geral como forma linearizada do modelo funcional a seguinte expressão:

$$Av + B\Delta = f$$

sendo

$$A = \left(\frac{\delta f}{\delta l}\right)_0 \qquad e \qquad B = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0$$

Como neste caso particular cada função f contém apenas uma observação com coeficiente unitário, a matriz A fica reduzida à matriz identidade e teremos:

$$v + B\Delta = f$$

como forma linear do modelo funcional. Como $f = d - Al$ poderemos ainda apresentá-lo da seguinte forma:

$\boxed{f = d - l}$ $\boxed{l + v + B\Delta = d}$

com $d = - f(l,x_0) + l_0$

<u>2 - Expressões que permitem calcular as variáveis do problema e as matrizes cofactor (obtidas a partir do caso geral):</u>

De forma análoga se podem obter as expressões que permitem calcular v e Δ a partir do caso geral, substituindo apenas A pela matriz identidade:

Tínhamos que:

$$v = W^{-1}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}(f - B\Delta)$$

substituindo A pela matriz identidade temos:

$$v = (W^{-1}W)(f - B\Delta) = f - B\Delta$$

$$\boxed{v = f - B\Delta}$$

Tínhamos também que:

$$\Delta = N^{-1}t$$

com $N = B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}B$ e $t = B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}f$

Deste modo podemos ainda dizer que:

$$D = N^{-1}t$$

sendo $N = B^t W B$ e $t = B^t W f$

Quanto às matrizes cofactor dos parâmetros, dos resíduos e das observações ajustadas, respectivamente $Q_{\Delta\Delta}$, Q_{vv}, $Q_{\hat{l}\hat{l}}$, temos:

$$\boxed{Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}}$$

$$Q_{vv} = Q_lWQ_l - Q_lWBQ_{\Delta\Delta}B^tWQ_l$$

$\boxed{Q_{vv} = Q_{ll} - BQ_{\Delta\Delta}B^t}$ $\boxed{Q_{vv} = Q_{ll} - BN^{-1}B^t}$

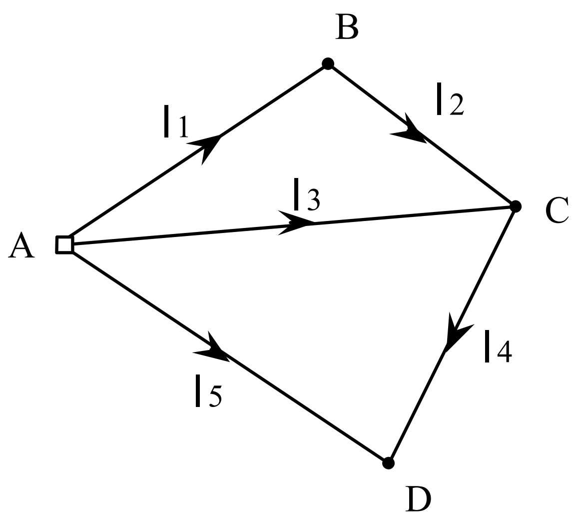
De modo semelhante:

$Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{ll} - Q_{vv}$ $\qquad\qquad$ $Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{ll} - Q_{ll} + BN^{-1}B^t$

$\boxed{Q_{\hat{l}\hat{l}} = BN^{-1}B^t}$

3 - Exercício de aplicação:

Estabeleça um modelo funcional, utilizando equações de observação, para determinar as cotas ajustadas dos pontos B, C e D (respectivamente N_B, N_C e N_D), sabendo que se conhece a cota do ponto A (N_A), e se mediram-se as seguintes diferenças de nível (ver Fig 1):



$l_1 = dN_{AB}$

$l_2 = dN_{BC}$

$l_3 = dN_{AC}$

$l_4 = dN_{CD}$

$l_5 = dN_{AD}$

Figura 1 - Esquema das diferenças de nível observadas

Pretende-se determinar as cotas ajustadas dos pontos B, C e D, respectivamente N_B, N_C e N_D.

Estabelecimento do modelo funcional utilizando equações de observação:

Resolução:

Mediram-se 5 diferenças de nível, logo $\qquad n = 5$

Conhecendo a cota do ponto A, para determinar as cotas dos pontos B, C e D bastava medir 3 diferenças de nível, logo:

$n_0 = 3$

$r = n - n_0 = 2$

Como queremos determinar as cotas de 3 pontos, temos 3 parâmetros, ou seja:

u = 3

Assim teremos que escrever c = n = 5 equações, de modo que tenhamos uma observação em cada equação:

$$\begin{cases} N_A + dN_{AB} = N_B \\ N_B + dN_{BC} = N_C \\ N_A + dN_{AC} = N_C \\ N_C + dN_{CD} = N_D \\ N_A + dN_{AD} = N_D \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = N_A + \bar{l}_1 - N_B = 0 \\ f_2 = N_B + \bar{l}_2 - N_C = 0 \\ f_3 = N_A + \bar{l}_3 - N_C = 0 \\ f_4 = N_C + \bar{l}_4 - N_D = 0 \\ f_5 = N_A + \bar{l}_5 - N_D = 0 \end{cases}$$

Sendo estas as equações que constituem o modelo funcional, que podemos escrever da seguinte forma:

$v + B\Delta = f$

sendo: $$B = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta N_B} & \frac{\delta f_1}{\delta N_C} & \frac{\delta f_1}{\delta N_D} \\ \frac{\delta f_2}{\delta N_B} & \frac{\delta f_2}{\delta N_C} & \frac{\delta f_2}{\delta N_D} \\ \frac{\delta f_3}{\delta N_B} & \frac{\delta f_3}{\delta N_C} & \frac{\delta f_3}{\delta N_D} \\ \frac{\delta f_4}{\delta N_B} & \frac{\delta f_4}{\delta N_C} & \frac{\delta f_4}{\delta N_D} \\ \frac{\delta f_5}{\delta N_B} & \frac{\delta f_5}{\delta N_C} & \frac{\delta f_5}{\delta N_D} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

sendo: $$\boxed{\begin{matrix} N_B = N_{B_0} + x1 \\ N_C = N_{C_0} + x2 \\ N_D .= N_{D_0} + x3 \end{matrix}}$$

e finalmente $f = d - l = -f(x_0, l_0) + l_0 - l$

Na 1ª iteração $l_0 = l$ logo:

$$f = -f(x_0, l) = -\begin{bmatrix} N_A + l_1 - N_{B_0} \\ N_{B_0} + l_2 - N_{C_0} \\ N_A + l_3 - N_{C_0} \\ N_{C_0} + l_{4-} N_{D_0} \\ N_{A+} l_5 - N_{D_0} \end{bmatrix}$$

Nas iterações seguintes:

$$f = d - l = -f(x_0, l_0) + l_0 - l = -\begin{bmatrix} N_A + (l_1)_0 - N_{B_0} \\ N_{B_0} + (l_2)_0 - N_{C_0} \\ N_A + (l_3)_0 - N_{C_0} \\ N_{C_0} + (l_4)_0 - N_{D_0} \\ N_A + (l_5)_0 - N_{D_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (l_1)_0 \\ (l_2)_0 \\ (l_3)_0 \\ (l_4)_0 \\ (l_5)_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} N_A + l_1 - N_{B_0} \\ N_{B_0} + l_2 - N_{C_0} \\ N_A + l_3 - N_{C_0} \\ N_{C_0} + l_{4-} N_{D_0} \\ N_{A+} l_5 - N_{D_0} \end{bmatrix} = -f(x_0, l)$$ pois o modelo funcional era, à partida, linear.

Passando imediatamente para notação matricial teríamos:

$$\begin{cases} f_1 = N_A + \overline{l_1} - N_B = 0 \\ f_2 = N_B + \overline{l_2} - N_C = 0 \\ f_3 = N_A + \overline{l_3} - N_C = 0 \\ f_4 = N_C + \overline{l_4} - N_D = 0 \\ f_5 = N_A + \overline{l_5} - N_D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = N_A + (l_1 + v_1) - (N_{B_0} + x_1) = 0 \\ f_2 = (N_{B_0} + x_1) + (l_2 + v_2) - (N_{C_0} + x_2) = 0 \\ f_3 = N_A + (l_3 + v_3) - (N_{C_0} + x_2) = 0 \\ f_4 = (N_{C_0} + x_2) + (l_4 + v_4) - (N_{D_0} + x_3) = 0 \\ f_5 = N_A + (l_5 + v_5) - (N_{D_0} + x_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 - x_1 = -N_A - l_1 + N_{B_0} \\ v_2 + x_1 - x_2 = -N_{B_0} - l_2 + N_{C_0} \\ v_3 - x_2 = -N_A - l_3 + N_{C_0} \\ v_4 + x_2 - x_3 = -N_{C_0} - l_4 + N_{D_0} \\ v_5 - x_3 = -N_A - l_5 + N_{D_0} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_A + l_1 - N_{B_0} \\ N_{B_0} + l_2 - N_{C_0} \\ N_A + l_3 - N_{C_0} \\ N_{C_0} + l_{4-} N_{D_0} \\ N_{A+} l_5 - N_{D_0} \end{bmatrix}$$

3.2.2. Ajustamento utilizando equações de condição

Nesta técnica de ajustamento não são incluídos parâmetros nas equações que constituem o modelo funcional. Desta forma u = 0, e teremos c = r.

1 - Obtenção, a partir do caso geral, da forma linearizada do modelo funcional:

Se não existem parâmetros nas equações do modelo funcional o vector Δ não existe e a matriz B será uma matriz nula.

Teremos então como modelo funcional linearizado apenas:

$\boxed{Av = f}$

sendo $f = d - Al = -f(l_0) + Al_0 - Al$

2 - Obtenção, a partir do caso geral, das expressões que permitem calcular as variáveis do problema e as matrizes cofactor:

Para se obter a expressão que permite calcular os resíduos basta substituir na expressão correspondente ao caso geral o vector Δ por um vector nulo e a matriz B por uma matriz identicamente nula. Tínhamos:

$v = W^{-1}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}(f - B\Delta)$

e passaremos a ter:

$$\boxed{v = W^{-1}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}f}$$

Depois de calculada a matriz dos resíduos podemos obter as observações ajustadas $\hat{l}$ através de $\hat{l} = l + v$.

Quanto às matrizes cofactor dos resíduos e das observações ajustadas, respectivamente Q_{VV} e $Q_{\hat{l}\hat{l}}$ tínhamos:

$$Q_{VV}=Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll} - Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}BN^{-1}B^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll}$$

e passaremos a ter:

$$\boxed{Q_{VV} = Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{ll} - Q_{VV}.}$$

3 - Exercício de aplicação:

Estabeleça um modelo funcional, utilizando equações de condição, para determinar as coordenadas ajustadas do ponto P (M_P e P_P), sabendo que são conhecidas as coordenadas dos pontos A e B, se mediram os três ângulos α, β e γ e a distância $\overline{BP} = a$ (ver Fig. 2)

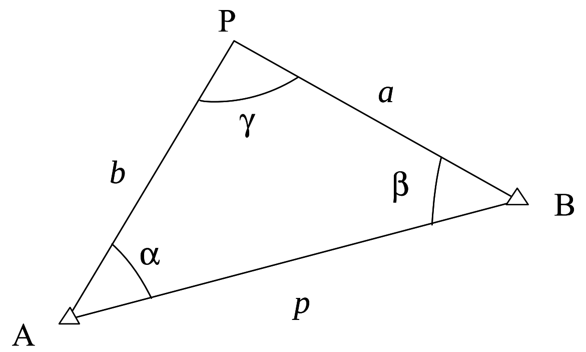


Figura 2 - Esquema da posição dos pontos e das quantidades envolvidas na resolução do problema

Resolução:

Mediram-se quatro elementos, três ângulos (α, β e γ) e uma distância (a), logo n = 4.

Para determinar as coordenadas de P bastava ter medido, por exemplo, a distância $\overline{BP}$ e o ângulo β, logo:

$n_0 = 2$ e $r = n - n_0 = 2$

Queremos determinar as coordenadas de P que são M_P e P_P, considerando estas quantidades como variáveis a ajustar teríamos dois parâmetros, mas como vamos utilizar equações de condição, vamos escrever o modelo funcional sem considerar parâmetros. Assim c = r = 2, ou seja, teremos que escrever duas equações, que podem ser:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\pi \\ \dfrac{a}{sin\,\alpha}=\dfrac{p}{sin\,\gamma} \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1=\alpha+\beta+\gamma-\pi=0 \\ f_2=\dfrac{a}{sin\,\alpha}-\dfrac{p}{sin\,\gamma}=0 \end{cases}$$

Sendo estas as equações que constituem o modelo funcional, estamos em condições de as escrever na forma linearizada

Av = f

sendo:

$$A=\left(\frac{df}{dl}\right)_0=\begin{bmatrix} \dfrac{df_1}{da} & \dfrac{df_1}{db} & \dfrac{df_1}{dg} & \dfrac{df_1}{da} \\ \dfrac{df_2}{da} & \dfrac{df_2}{db} & \dfrac{df_2}{dg} & \dfrac{df_2}{da} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -a.cosec\,a.cotg\,a & 0 & p.cosec\,g.cotg\,g & cosec\,a \end{bmatrix}$$

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$f = d - Al = -f(l_0) + Al_0 - Al$

Na 1ª iteração $l_0 = l$ logo

$$f=-f(l)=\begin{bmatrix} \pi-\alpha-\beta-\gamma \\ -\dfrac{a}{sin\,\alpha}+\dfrac{p}{sin\,\gamma} \end{bmatrix}$$

Nas iterações seguintes

$f = d - Al = -f(l_0) + Al_0 - Al$

com $\quad l=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ a \end{bmatrix} \qquad l_0=\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ a_0 \end{bmatrix}$

d = -f(l0) + Al0 =

$$=-\begin{bmatrix} \alpha_0+\beta_0+\gamma_0-\pi \\ \dfrac{a_0}{sin\alpha_0}-\dfrac{p}{sin\gamma_0} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -a_0.cosec\,\alpha_0.cotg\,\alpha_0 & 0 & p.cosec\,\gamma_0.cotg\,\gamma_0 & cosec\,\alpha_0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ a_0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0-\pi)+\alpha_0+\beta_0+\gamma_0 \\ -(\dfrac{a_0}{sin\,\alpha_0}-\dfrac{p}{sin\,\gamma_0})+(-a_0.\alpha_0.cosec\,\alpha_0.cotg\,\alpha_0+p.\gamma_0.cosec\,\gamma_0.cotg\,\gamma_0+a_0.cosec\,\alpha_0) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \pi \\ -(\dfrac{a_0}{sin\,\alpha_0}-\dfrac{p}{sin\,\gamma_0})+(-a_0.\alpha_0.cosec\,\alpha_0.cotg\,\alpha_0+p.\gamma_0.cosec\,\gamma_0.cotg\,\gamma_0+a_0.cosec\,\alpha_0) \end{bmatrix}$$

logo

$$f=\begin{bmatrix} \pi \\ -(\dfrac{a_0}{sin\,\alpha_0}-\dfrac{p}{sin\,\gamma_0})+(-a_0.\alpha_0.cosec\,\alpha_0.cotg\,\alpha_0+p.\gamma_0.cosec\,\gamma_0.cotg\,\gamma_0+a_0.cosec\,\alpha_0) \end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -a_0.cosec\,\alpha_0.cotg\,\alpha_0 & 0 & p.cosec\,\gamma_0.cotg\,\gamma_0 & cosec\,\alpha_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ a \end{bmatrix}$$

3.2.3. Aplicação das duas últimas técnicas de ajustamento

Determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos pontos C e D da poligonal representada na Figura 3.

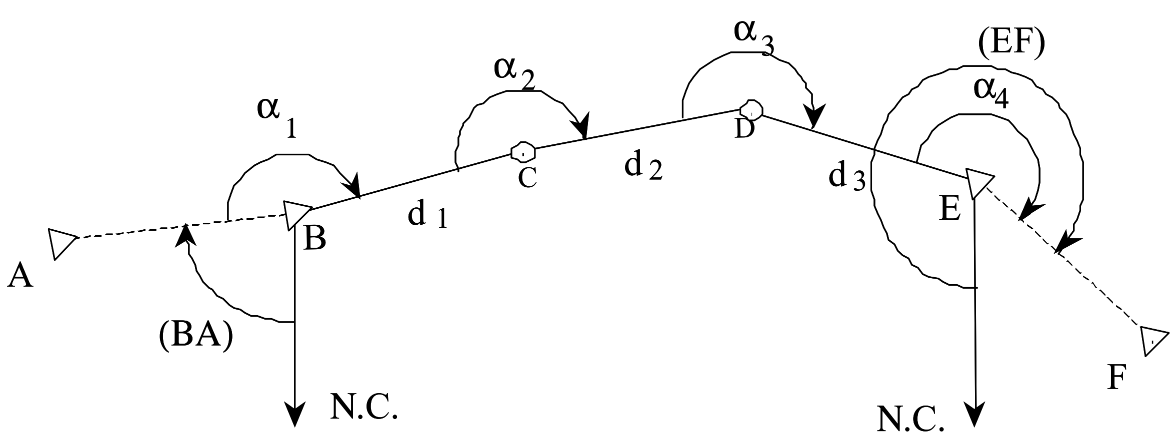


Figura 3 - Esquema da poligonal

DADOS:	QUANTIDADES OBSERVADAS:	PEDIDOS:
$M_B = 8478{,}139$ m	$\alpha_1 = 172^\circ\ 53'\ 34'' \pm 2''$	$M_C = ?$
$P_B = 2483{,}826$ m	$\alpha_2 = 185^\circ\ 22'\ 14'' \pm 2''$	$P_C = ?$
$M_F = 7709{,}336$ m	$\alpha_3 = 208^\circ\ 26' 19'' \pm 2''$	$M_D = ?$
$P_F = 2263{,}411$ m	$\alpha_4 = 205^\circ\ 13' 51'' \pm 2''$	$P_D = ?$
$(BA) = 68^\circ\ 15' 20{,}7''$	$d_1 = 281{,}832 \pm 0{,}016$ m	
$(EF) = 300^\circ\ 11' 30{,}5''$	$d_2 = 271{,}300 \pm 0{,}016$ m	
	$d_3 = 274{,}100 \pm 0{,}016$ m	

Nº de observações: $n = 7$

Nº de observações necessárias: $n_0 = 4$

Nº de parâmetros: $u = 4$

Redundância: $r = n - n_0 = 3$

CALCULO DAS COORDENADAS AJUSTADAS DE C E D

A - UTILIZANDO EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO:

1 - Estabelecer as equações que formam o modelo funcional

Nº de equações: $c = r + u = n = 7$

Temos então que escrever sete equações que nos relacionem todos os elementos envolvidos, de modo que em cada equação se tenha apenas uma observação, com um coeficiente unitário. Assim se tivermos em consideração que:

$$\begin{cases} (BA) + \alpha_1 - (BC) = 0 \\ (CB) + \alpha_2 - (CD) = 0 \\ (DC) + \alpha_3 - (DE) = 0 \\ (ED) + \alpha_4 - (EF) = 0 \\ d_1 - \overline{BC} = 0 \\ d_2 - \overline{CD} = 0 \\ d_3 - \overline{DE} = 0 \end{cases}$$

podemos escrever as seguinte sete equações, em função dos parâmetros a considerar, das quantidades observadas e das quantidades conhecidas:

$$
\begin{cases}
f_1 = (BA) + \alpha_1 - \operatorname{arctg}\dfrac{M_C - M_B}{P_C - P_B} = 0 \\[2ex]
f_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{M_B - M_C}{P_B - P_C} + \alpha_2 - \operatorname{arctg}\dfrac{M_D - M_C}{P_D - P_C} = 0 \\[2ex]
f_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{M_C - M_D}{P_C - P_D} + \alpha_3 - \operatorname{arctg}\dfrac{M_E - M_D}{P_E - P_D} = 0 \\[2ex]
f_4 = \operatorname{arctg}\dfrac{M_D - M_E}{P_D - P_E} + \alpha_4 - (EF) = 0 \\[2ex]
f_5 = d_1 - \sqrt{(M_C - M_B)^2 + (P_C - P_B)^2} = 0 \\[1ex]
f_6 = d_2 - \sqrt{(M_D - M_C)^2 + (P_D - P_C)^2} = 0 \\[1ex]
f_7 = d_3 - \sqrt{(M_E - M_D)^2 + (P_E - P_D)^2} = 0
\end{cases}
$$

Temos assim construído o modelo funcional, que não é linear. Para o escrever na sua forma linearizada

$$\boxed{l + v + B\Delta = d} \quad \text{ou} \quad \boxed{v + B\Delta = d - l = f}$$

temos que formar e calcular as matrizes e os vectores aí envolvidos:

$$
B = \begin{bmatrix}
\dfrac{\delta f_1}{\delta M_C} & \dfrac{\delta f_1}{\delta P_C} & \dfrac{\delta f_1}{\delta M_D} & \dfrac{\delta f_1}{\delta P_D} \\[2ex]
\dfrac{\delta f_2}{\delta M_C} & \dfrac{\delta f_2}{\delta P_C} & \dfrac{\delta f_2}{\delta M_D} & \dfrac{\delta f_2}{\delta P_D} \\[2ex]
\dfrac{\delta f_3}{\delta M_C} & \dfrac{\delta f_3}{\delta P_C} & \dfrac{\delta f_3}{\delta M_D} & \dfrac{\delta f_3}{\delta P_D} \\[2ex]
\dfrac{\delta f_4}{\delta M_C} & \dfrac{\delta f_4}{\delta P_C} & \dfrac{\delta f_4}{\delta M_D} & \dfrac{\delta f_4}{\delta P_D} \\[2ex]
\dfrac{\delta f_5}{\delta M_C} & \dfrac{\delta f_5}{\delta P_C} & \dfrac{\delta f_5}{\delta M_D} & \dfrac{\delta f_5}{\delta P_D} \\[2ex]
\dfrac{\delta f_6}{\delta M_C} & \dfrac{\delta f_6}{\delta P_C} & \dfrac{\delta f_6}{\delta M_D} & \dfrac{\delta f_6}{\delta P_D} \\[2ex]
\dfrac{\delta f_7}{\delta M_C} & \dfrac{\delta f_7}{\delta P_C} & \dfrac{\delta f_7}{\delta M_D} & \dfrac{\delta f_7}{\delta P_D}
\end{bmatrix}_0
$$

Como (arctg u)' = $\dfrac{u'}{1 + u^2}$ tem-se que por exemplo:

$$b_{11} = \frac{\delta f_1}{\delta M_C} = - \frac{P_C - P_B}{(P_C - P_B)^2 + (M_C - M_B)^2}$$

$$b_{12} = \frac{\delta f_1}{\delta P_C} = - \frac{M_C - M_B}{(P_C - P_B)^2 + (M_C - M_B)^2}$$

$\vdots$

tendo que se determinar vinte e oito derivadas parciais das sete funções que constituem o modelo funcional.

Depois de determinadas todas as derivadas e substituindo as coordenadas de B e F, e os rumos de (BA) e (EF) pelos seus valores e substituindo as coordenadas de C e D por valores aproximados, obtém-se a matriz B.

Quanto aos vectores v, Δ e f = d - l = - f(l_0,x_0) + l_0 - l temos:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{sendo: } \begin{cases} M_C = M_{C_0} + x_1 \\ P_C = P_{C_0} + x_2 \\ M_D = M_{D_0} + x_3 \\ P_D = P_{D_0} + x_4 \end{cases}$$

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad l_0 = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_0 \\ (\alpha_2)_0 \\ (\alpha_3)_0 \\ (\alpha_4)_0 \\ (d_1)_0 \\ (d_2)_0 \\ (d_3)_0 \end{bmatrix}$$

Na 1ª iteração l_0 = l logo f = - f(l,x_0)

$$f = -\begin{bmatrix} (BA) + \alpha_1 - \operatorname{arctg} \dfrac{M_{C_0} - M_B}{P_{C_0} - P_B} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{M_B - M_{C_0}}{P_B - P_{C_0}} + \alpha_2 - \operatorname{arctg} \dfrac{M_{D_0} - M_{C_0}}{P_{D_0} - P_{C_0}} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{M_{C_0} - M_{D_0}}{P_{C_0} - P_{D_0}} + \alpha_3 - \operatorname{arctg} \dfrac{M_E - M_{D_0}}{P_E - P_{D_0}} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{M_{D_0} - M_E}{P_{D_0} - P_E} + \alpha_4 - (EF) \\ d_1 - \sqrt{(M_{C_0} - M_B)^2 + (P_{C_0} - P_B)^2} \\ d_2 - \sqrt{(M_{D_0} - M_{C_0})^2 + (P_{D_0} - P_{C_0})^2} \\ d_3 - \sqrt{(M_E - M_{D_0})^2 + (P_E - P_{D_0})^2} \end{bmatrix}$$

Nas iterações seguintes $f = -f(x_0, l_0) + l_0 - l$

$$f = -\begin{bmatrix} (BA) + (\alpha_1)_0 - \operatorname{arctg} \dfrac{M_{C_0} - M_B}{P_{C_0} - P_B} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{M_B - M_{C_0}}{P_B - P_{C_0}} + (\alpha_2)_0 - \operatorname{arctg} \dfrac{M_{D_0} - M_{C_0}}{P_{D_0} - P_{C_0}} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{M_{C_0} - M_{D_0}}{P_{C_0} - P_{D_0}} + (\alpha_3)_0 - \operatorname{arctg} \dfrac{M_E - M_{D_0}}{P_E - P_{D_0}} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{M_{D_0} - M_E}{P_{D_0} - P_E} + (\alpha_4)_0 - (EF) \\ (d_1)_0 - \sqrt{(M_{C_0} - M_B)^2 + (P_{C_0} - P_B)^2} \\ (d_2)_0 - \sqrt{(M_{D_0} - M_{C_0})^2 + (P_{D_0} - P_{C_0})^2} \\ (d_3)_0 - \sqrt{(M_E - M_{D_0})^2 + (P_E - P_{D_0})^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\alpha_1)_0 \\ (\alpha_2)_0 \\ (\alpha_3)_0 \\ (\alpha_4)_0 \\ (d_1)_0 \\ (d_2)_0 \\ (d_3)_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Considerando como aproximações iniciais para os parâmetros os seguintes valores:

$M_C = 8200$ m $\qquad P_C = 2340$ m

$M_D = 7980$ m $\qquad P_D = 2230$ m

obtém-se para a primeira iteração:

$$B = 10^{-3}\begin{bmatrix} 1.4669056 & -2.836786 & 0 & 0 \\ -3.285087 & 6.473150 & 1.818182 & -3.636364 \\ 1.818182 & -3.636364 & -1.368960 & 7.275529 \\ 0 & 0 & 0.4492217 & -3.639165 \\ 888.2685 & 459.3247 & 0 & 0 \\ -894.4272 & -447.2136 & 894.4272 & 447.2136 \\ 0 & 0 & -992.4672 & 122.511 \end{bmatrix}$$

$$f = -\begin{bmatrix} 0.026318430\ (\text{rad}) \\ -0.080146734\ (\text{rad}) \\ 0.09011977\ (\text{rad}) \\ -0.036234261\ (\text{rad}) \\ 31.2929\ (\text{m}) \\ -25.3325\ (\text{m}) \\ -1.3817\ (\text{m}) \end{bmatrix}$$

Temos assim formado o modelo funcional linearizado:

$v + B\Delta = f$

Para podermos calcular os valores das incógnitas temos ainda que conhecer a matriz dos pesos, que tem da seguinte forma:

$$W = \sigma_0^2 \cdot \text{diag}\left[\ 1/\sigma\alpha_1^2 \quad 1/\sigma\alpha_2^2 \quad 1/\sigma\alpha_3^2 \quad 1/\sigma\alpha_4^2 \quad 1/\sigma d_1^2 \quad 1/\sigma d_2^2 \quad 1/\sigma d_3^2\ \right]$$

Como conhecemos o desvio padrão associado a cada medição angular e a cada medição de distâncias, podemos calcular as respectivas variâncias, obtendo-se:

$$\sigma\alpha_1{}^2 = \sigma\alpha_2{}^2 = \sigma\alpha_3{}^2 = \sigma\alpha_4{}^2 = 4'' = 9.401772217 \times 10^{-11}\ \text{rad}^2$$

$$\sigma d_1{}^2 = \sigma d_2{}^2 = \sigma d_3{}^2 = 0.016^2 = 2.56 \times 10^{-4}\ \text{m}^2.$$

Considerando a variância de referência igual a 1 temos que:

$$W = 3906.25\ \text{diag}[\ 2722890.898 \quad 2722890.898 \quad 2722890.898 \quad 2722890.898 \quad 1.0 \quad 1.0 \quad 1.0\ ]$$

Agora estamos em condições de resolver o problema, através das expressões:

$\Delta = N^{-1}t$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $v = f - B\Delta$

Fazendo várias iterações obtêm-se os seguintes resultados para as correcções a adicionar aos valores aproximados dos parâmetros:

1ª iteração	**2ª iteração**	**3ª iteração**	**4ª iteração**
Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
32,52094	-1,25186	-0,00606	-5,2E-08
7,861685	-0,04199	-0,00202	-6,6E-09
4,82137	-2,40815	-0,00892	-2,2E-08
9,134401	0,581442	-0,00143	3,54E-08
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
M_{C_1} = 8232,521	M_{C_2} =8231,269	M_{C_3} =8231,263	M_{C_4} =8231,263
P_{C_1} = 2347,862	P_{C_2} = 2347,820	P_{C_3} = 2347,818	P_{C_4} = 2347,818
M_{D_1} = 7984,821	M_{D_2} = 7982,413	M_{D_3} = 7982,404	M_{D_4} = 7982,404
P_{D_1} = 2239,134	P_{D_2} = 2239,716	P_{D_3} = 2239,714	P_{D_4} = 2239,714

Sendo as sucessivas coordenadas ajustadas calculadas através de:

$M_C = M_{C_0} + x_1$

$P_C = P_{C_0} + x_2$

$M_D = M_{D_0} + x_3$

$P_D = P_{D_0} + x_4$

Coordenadas ajustadas finais:

M_C = 8231.263 m

P_C = 2347.818 m

M_D = 7982.404 m

P_D = 2239.714 m

Quanto aos resíduos obtém-se:

1ª iteração	**2ª iteração**	**3ª iteração**	**4ª iteração**
$v^{(1)}$	$v^{(2)}$	$v^{(3)}$	$v^{(4)}$
0,000915 rad	$9,68 \times 10^{-6}$ rad	$5,73 \times 10^{-6}$ rad	$5,73 \times 10^{-6}$ rad
0,000247 rad	$1,26 \times 10^{-5}$ rad	$1,13 \times 10^{-5}$ rad	$1,13 \times 10^{-5}$ rad
-0,00028 rad	$1,56 \times 10^{-5}$ rad	$1,7 \times 10^{-5}$ rad	$1,7 \times 10^{-5}$ rad
-0,00083 rad	$1,93 \times 10^{-5}$ rad	$2,32 \times 10^{-5}$ rad	$2,32 \times 10^{-5}$ rad
-1,20546 m	0,02283 m	0,029689 m	0,029689 m
-1,12645 m	0,02013 m	0,024493 m	0,024493 m
2,284332 m	0,003069 m	-0,00545 m	-0,00545 m

$\hat{l}^{(1)}$	$\hat{l}^{(2)}$	$\hat{l}^{(3)}$	$\hat{l}^{(4)}$
172° 56' 42.6"	172° 53' 36"	172° 53' 35.1"	172° 53' 35.1"
185° 23' 5.04"	185° 22' 16.5"	185° 22' 16.3"	185° 22' 16.3"
208° 25' 21.4"	208° 26' 22.2"	208° 26' 22.5"	208° 26' 22.5"
205° 11' 0.47"	205° 13' 54.9"	205° 13' 55.7"	205° 13' 55.7"
280,6265 m	281,8548 m	281,8617 m	281,8617 m
270,1735 m	271,3201 m	271,3245 m	271,3245 m
276,3843 m	274,1031 m	274,0946 m	274,0946 m

Tomando como valores aproximados para os parâmetros

$M_{C_0} = 8231{,}290$ m obtido a partir de: $M_{C_0} = M_B + d_1 \sin [(BA) + \alpha_1]$

$P_{C_0} = 2347{,}831$ m obtido a partir de: $P_{C_0} = P_B + d_1 \cos [(BA) + \alpha_1]$

$M_{D_0} = 7982{,}409$ m obtido a partir de: $M_{D_0} = M_E + d_3 \sin [(EF) - \alpha_4]$

$P_{D_0} = 2239{,}708$ m obtido a partir de: $P_{D_0} = P_E + d_3 \cos [(EF) - \alpha_4]$

obtém-se:

1ª iteração	**2ª iteração**
Δ_1	Δ_2
-0,02697	-2,8E-07
-0,01333	-6,7E-08
-0,0047	1,53E-06
0,00641	-2,8E-07
$\Downarrow$	$\Downarrow$
M_{C_1} = 8231,263	M_{C_2} = 8231,263
P_{C_1} = 2347,818	P_{C_2} = 2347,818
M_{D_1} = 7982,404	M_{D_2} = 7982,404
P_{D_1} = 2239,714	P_{D_2} = 2239,714

Sendo as coordenadas ajustadas:

M_C = 8231.263 m

P_C = 2347.818 m

M_D = 7982.404 m

P_D = 2239.714 m

Para os resíduos e observações ajustadas temos:

1ª iteração	**2ª iteração**
$v_{(1)}$	$v_{(2)}$
$5{,}73 \times 10^{-6}$ rad	$5{,}73 \times 10^{-6}$ rad
$1{,}13 \times 10^{-5}$ rad	$1{,}13 \times 10^{-5}$ rad
$1{,}7 \times 10^{-5}$ rad	$1{,}7 \times 10^{-5}$ rad
$2{,}32 \times 10^{-5}$ rad	$2{,}32 \times 10^{-5}$ rad
0,029689 m	0,029689 m
0,024495 m	0,024493 m
-0,00545 m	-0,00545 m
$\hat{l}_{(1)}$	$\hat{l}_{(2)}$
172° 53' 35.1"	172° 53' 35.1"
185° 22' 16.3"	185° 22' 16.3"
208° 26' 22.5"	208° 26' 22.5"
205° 13' 55.7"	205° 13' 55.7"
281,8617 m	281,8617 m
271,3245 m	271,3245 m
274,0946 m	274,0946 m

Falta fazer a análise de resultados através de:

$$\boxed{Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}}$$

$$\boxed{Q_{vv} = Q_{ll} - BN^{-1}B^t}$$

$$\boxed{Q_{\hat{l}\hat{l}} = BN^{-1}B^t}$$

$$Q_{VV} = \begin{vmatrix} 4.0922E-11 & 2.90692E-11 & 1.74828E-11 & 6.54371E-12 & -2.4321E-08 & -1.3496E-08 & 4.35071E-08 \\ 2.90692E-11 & 2.52977E-11 & 2.15997E-11 & 1.80511E-11 & -8.9502E-09 & -5.5004E-09 & 1.28372E-08 \\ 1.74828E-11 & 2.15997E-11 & 2.561E-11 & 2.93252E-11 & 6.94141E-09 & 3.1881E-09 & -1.6363E-08 \\ 6.54371E-12 & 1.80511E-11 & 2.93252E-11 & 4.00978E-11 & 2.63297E-08 & 1.58081E-08 & -3.9981E-08 \\ -2.4321E-08 & -8.9502E-09 & 6.94141E-09 & 2.63297E-08 & 0.000124415 & 0.000109969 & 2.07477E-05 \\ -1.3496E-08 & -5.5004E-09 & 3.1881E-09 & 1.58081E-08 & 0.000109969 & 0.000102256 & 4.8391E-05 \\ 4.35071E-08 & 1.28372E-08 & -1.6363E-08 & -3.9981E-08 & 2.07477E-05 & 4.8391E-05 & 0.000182106 \end{vmatrix}$$

$$Q_{\hat{l}\hat{l}} = \begin{vmatrix} 5{,}31E-11 & -2{,}9\ E-11 & -1{,}7\ E-11 & -6{,}5\ E-12 & 2.43\ E-8 & 1.35\ E-8 & -4.4\ E-8 \\ -2{,}9\ E-11 & 6{,}87\ E-11 & -2{,}2\ E-11 & -1{,}8\ E-11 & 8.95\ E-9 & 5.5\ E-9 & -1.3\ E-8 \\ -1{,}7\ E-11 & -2{,}2\ E-11 & 6{,}84\ E-11 & -2{,}9\ E-11 & -6.9\ E-9 & -3.2\ E-9 & 1.64\ E-8 \\ -6{,}5\ E-12 & -1{,}8\ E-11 & -2{,}9\ E-11 & 5{,}39\ E-11 & -2.6\ E-8 & -1.6\ E-8 & 4\ E-8 \\ 2.43\ E-8 & 8.95\ E-9 & -6.9\ E-9 & -2.6\ E-8 & 0.000132 & -0.00011 & -2.1\ E-5 \\ 1.35\ E-8 & 5.5\ E-9 & -3.2\ E-9 & -1.6\ E-8 & -0.00011 & 0.000154 & -4.8\ E-5 \\ -4.4\ E-8 & -1.3\ E-8 & 1.64\ E-8 & 4\ E-8 & -2.1\ E-5 & -4.8\ E-5 & 7.39\ E-5 \end{vmatrix}$$

$$Q_{\hat{\Delta}\hat{\Delta}} = \begin{vmatrix} 0{,}000108 & 5{,}02\ E-5 & 2{,}46\ E-5 & 4{,}46\ E-6 \\ 5{,}02\ E-5 & 2{,}81\ E-5 & -4{,}6\ E-7 & 3{,}09\ E-6 \\ 2{,}46\ E-5 & -4{,}6\ E-7 & 7{,}53\ E-5 & 4{,}78\ E-6 \\ 4{,}46\ E-6 & 3{,}09\ E-6 & 4{,}78\ E-6 & 2{,}69\ E-6 \end{vmatrix}$$

Cálculo de σ_0 à posteriori:

$\sigma_0^2 =$ 5,464092

$\sigma_0 =$ 2,33754

Valor próximo do valor escolhido (o valor escolhido foi 1) logo o ajustamento não apresenta problemas.

B - UTILIZANDO EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

1 - Estabelecer as equações que formam o modelo funcional:

Nº de equações: $c = r = 3$

$$\begin{cases} f_1 = (BA) + (\alpha_1 - \pi) + (\alpha_2 - \pi) + (\alpha_3 - \pi) + \alpha_4 - (EF) = 0 \\ f_2 = M_B + d_1.\sin[(BA)+\alpha_1] + d_2.\sin[(BA)+\alpha_1-\pi+\alpha_2] + d_3.\sin[(EF)-\alpha_4-\pi] - M_E = 0 \\ f_3 = P_B + d_1.\cos[(BA)+\alpha_1] + d_2.\cos[(BA)+\alpha_1-\pi+\alpha_2] + d_3.\cos[(EF)-\alpha_4-\pi] - P_E = 0 \end{cases}$$

Assim teremos como modelo funcional linearizado:

$$\boxed{Av = f}$$

sendo:

$$A = \left(\frac{\delta f}{\delta l}\right)_0 = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta \alpha_1} & \frac{\delta f_1}{\delta \alpha_2} & \frac{\delta f_1}{\delta \alpha_3} & \frac{\delta f_1}{\delta \alpha_4} & \frac{\delta f_1}{\delta d_1} & \frac{\delta f_1}{\delta d_2} & \frac{\delta f_1}{\delta d_3} \\ \frac{\delta f_2}{\delta \alpha_1} & \frac{\delta f_2}{\delta \alpha_2} & \frac{\delta f_2}{\delta \alpha_3} & \frac{\delta f_2}{\delta \alpha_4} & \frac{\delta f_2}{\delta d_1} & \frac{\delta f_2}{\delta d_2} & \frac{\delta f_2}{\delta d_3} \\ \frac{\delta f_3}{\delta \alpha_1} & \frac{\delta f_3}{\delta \alpha_2} & \frac{\delta f_3}{\delta \alpha_3} & \frac{\delta f_3}{\delta \alpha_4} & \frac{\delta f_3}{\delta d_1} & \frac{\delta f_3}{\delta d_2} & \frac{\delta f_3}{\delta d_3} \end{bmatrix}_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -244.093 & -108.098 & 0 & -23.697 & -0.876 & -0.917 & -0.996 \\ 495.684 & 248.834 & 0 & -273.073 & -0.483 & -0.398 & 0.086 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}$$

$f = - f(l_0) + Al_0 - Al$

Na 1ª iteração $l = l_0$ logo:

$$f = - f(l) = - \begin{bmatrix} (BA) + (\alpha_1 - \pi) + (\alpha_2 - \pi) + (\alpha_3 - \pi) + \alpha_4 - (EF) \\ M_B + d_1 \sin[(BA)+\alpha_1] + d_2 \sin[(BA)+\alpha_1-\pi+\alpha_2] + d_3 \sin[(EF)-\alpha_4-\pi] - M_E \\ P_B + d_1 \cos[(BA)+\alpha_1] + d_2 \cos[(BA)+\alpha_1-\pi+\alpha_2] + d_3 \cos[(EF)-\alpha_4-\pi] - P_E \end{bmatrix}$$

Obtendo-se:

$$f = \begin{bmatrix} 5.72066569\text{x}10^{-5}(\text{rad}) \\ -0.046217\ (\text{m}) \\ -0.025221\ (\text{m}) \end{bmatrix}$$

Nas iterações seguintes $f = - f(l_0) + Al_0 - Al$.

Uma vez que a matriz dos pesos é:

$$W = 3906.25\ \text{diag}[\ 2722890.898 \quad 2722890.898 \quad 2722890.898 \quad 2722890.898 \quad 1.0 \quad 1.0 \quad 1.0\ ]$$

obtém-se:

Resultados da 1ª iteração

$$v_{(1)} = \begin{bmatrix} 5.73149\text{x}10^{-6}\ (\text{rad}) \\ 1.13325\text{x}10^{-5}\ (\text{rad}) \\ 1.69774\text{x}10^{-5}\ (\text{rad}) \\ 2.31666\text{x}10^{-5}\ (\text{rad}) \\ 0.02968891\ (\text{m}) \\ 0.02449371\ (\text{m}) \\ -0.00544557\ (\text{m}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{l}_{(1)} = l + v_{(1)} = \begin{bmatrix} 172°53'35.1'' \\ 185°22'16.3'' \\ 208°26'22.5'' \\ 205°13'55.7'' \\ 281.862\ (\text{m}) \\ 271.324\ (\text{m}) \\ 274.095\ (\text{m}) \end{bmatrix}$$

Resultados da 2ª iteração:

$$v_{(2)} = \begin{bmatrix} 5.73039\text{x}10^{-6}\ (\text{rad}) \\ 1.13323\text{x}10^{-5}\ (\text{rad}) \\ 1.6978\text{x}10^{-5}\ (\text{rad}) \\ 2.31673\text{x}10^{-5}\ (\text{rad}) \\ 0.029689208\ (\text{m}) \\ 0.024493105\ (\text{m}) \\ -0.005445117\ (\text{m}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{l}_{(2)} = l + v_{(2)} = \begin{bmatrix} 172°53'35.1'' \\ 185°22'16.3'' \\ 208°26'22.5'' \\ 205°13'55.7'' \\ 281.862\ (\text{m}) \\ 271.324\ (\text{m}) \\ 274.095\ (\text{m}) \end{bmatrix}$$

Podendo-se agora calcular as coordenadas ajustadas de C e D, por exemplo, através de:

$M_C = M_B + d_1 \sin [(BA) + \alpha_1] = 8231.263$ m

$P_C = P_B + d_1 \cos [(BA) + \alpha_1] = 2347.818$ m

$M_D = M_E + d_3 \sin [(EF) - \alpha_4] = 7982.405$ m

$P_D = P_E + d_3 \cos [(EF) - \alpha_4] = 2239.714$ m

Quanto à análise de resultados tem-se:

$$Q_{\hat{v}\hat{v}} = \begin{vmatrix} 4{,}09188E\text{-}11 & 2{,}90685E\text{-}11 & 1{,}74843E\text{-}11 & 6{,}54613E\text{-}12 & -2{,}43189E\text{-}08 & -1{,}34962E\text{-}08 & 4{,}35056E\text{-}08 \\ 2{,}90685E\text{-}11 & 2{,}52976E\text{-}11 & 2{,}16001E\text{-}11 & 1{,}80516E\text{-}11 & -8{,}94991E\text{-}09 & -5{,}5007E\text{-}09 & 1{,}28375E\text{-}08 \\ 1{,}74843E\text{-}11 & 2{,}16001E\text{-}11 & 2{,}56094E\text{-}11 & 2{,}9324E\text{-}11 & 6{,}94007E\text{-}09 & 3{,}18781E\text{-}09 & -1{,}63616E\text{-}08 \\ 6{,}54613E\text{-}12 & 1{,}80516E\text{-}11 & 2{,}9324E\text{-}11 & 4{,}0096E\text{-}11 & 2{,}63288E\text{-}08 & 1{,}58091E\text{-}08 & -3{,}99815E\text{-}08 \\ -2{,}43189E\text{-}08 & -8{,}94991E\text{-}09 & 6{,}94007E\text{-}09 & 2{,}63288E\text{-}08 & 0{,}000124416 & 0{,}000109972 & 2{,}07434E\text{-}05 \\ -1{,}34962E\text{-}08 & -5{,}5007E\text{-}09 & 3{,}18781E\text{-}09 & 1{,}58091E\text{-}08 & 0{,}000109972 & 0{,}000102259 & 4{,}83847E\text{-}05 \\ 4{,}35056E\text{-}08 & 1{,}28375E\text{-}08 & -1{,}63616E\text{-}08 & -3{,}99815E\text{-}08 & 2{,}07434E\text{-}05 & 4{,}83847E\text{-}05 & 0{,}000182117 \end{vmatrix}$$

$$Q_{\hat{l}\hat{l}} = \begin{vmatrix} 5{,}30989E\text{-}11 & -2{,}90685E\text{-}11 & -1{,}74843E\text{-}11 & -6{,}54613E\text{-}12 & 2{,}43189E\text{-}08 & 1{,}34962E\text{-}08 & -4{,}35056E\text{-}08 \\ -2{,}90685E\text{-}11 & 6{,}87201E\text{-}11 & -2{,}16001E\text{-}11 & -1{,}80516E\text{-}11 & 8{,}94991E\text{-}09 & 5{,}5007E\text{-}09 & -1{,}28375E\text{-}08 \\ -1{,}74843E\text{-}11 & -2{,}16001E\text{-}11 & 6{,}84083E\text{-}11 & -2{,}9324E\text{-}11 & -6{,}94007E\text{-}09 & -3{,}18781E\text{-}09 & 1{,}63616E\text{-}08 \\ -6{,}54613E\text{-}12 & -1{,}80516E\text{-}11 & -2{,}9324E\text{-}11 & 5{,}39217E\text{-}11 & -2{,}63288E\text{-}08 & -1{,}58091E\text{-}08 & 3{,}99815E\text{-}08 \\ 2{,}43189E\text{-}08 & 8{,}94991E\text{-}09 & -6{,}94007E\text{-}09 & -2{,}63288E\text{-}08 & 0{,}000131584 & -0{,}000109972 & -2{,}07434E\text{-}05 \\ 1{,}34962E\text{-}08 & 5{,}5007E\text{-}09 & -3{,}18781E\text{-}09 & -1{,}58091E\text{-}08 & -0{,}000109972 & 0{,}000153741 & -4{,}83847E\text{-}05 \\ -4{,}35056E\text{-}08 & -1{,}28375E\text{-}08 & 1{,}63616E\text{-}08 & 3{,}99815E\text{-}08 & -2{,}07434E\text{-}05 & -4{,}83847E\text{-}05 & 7{,}38829E\text{-}05 \end{vmatrix}$$

O σ_0 à posteriori é 2.4.

APÊNDICE A - CONCEITOS NECESSÁRIOS

ÁLGEBRA DE MATRIZES

Propriedades da transposta

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(AB)^t = B^tA^t$

$(\alpha A)^t = \alpha A^t$

$(A^t)^t = A$

- Uma matriz A é simétrica se é igual à sua transposta. $A = A^t$

- Se B é uma matriz simétrica, então para qualquer matriz de dimensões que convenientes tem-se que tanto ABA^t como A^tBA são simétricas

Propriedades da matriz inversa

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

$(\alpha A)^{-1} = 1/\alpha\, A^{-1}$

Formas quadráticas

Se A for uma matriz simétrica de ordem n e x um vector de dimensão (n,1), o escalar x^tAx chama-se uma forma quadrática.

Diferenciação de matrizes e formas quadráticas

- Se A for uma matriz cujos elementos dependem de uma variável u então a derivada de A em ordem a u é a matriz que se obtém derivando todos os elementos de A em ordem a u.

- Se um vector coluna y é composto por m funções que são dependentes das variáveis do vector coluna x, então a derivada parcial de y em ordem a x é uma matriz m por n, chamada a matriz Jacobiana e tem elementos:

$$J_{yx} = \left(\frac{\delta y_j}{\delta x_i}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\delta y_1}{\delta x_1} & \frac{\delta y_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta y_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta y_2}{\delta x_1} & \frac{\delta y_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta y_2}{\delta x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\delta y_m}{\delta x_1} & \frac{\delta y_m}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta y_m}{\delta x_n} \end{bmatrix} \qquad j = 1,...,m \qquad i = 1,...,n$$

- Sendo A uma matriz simétrica de ordem n e x um vector (n;1), demonstra-se que:

$$\frac{\delta\left(x^t A x\right)}{\delta x} = 2x^t A \qquad \text{e} \qquad \frac{\delta\left(x^t A\right)}{\delta x} = A^t$$

(demonstração em Surveying, theory and practice. pag. 902)

MÉTODO DE LAGRANGE PARA DETERMINAÇÃO DE EXTREMOS CONDICIONADOS:

O método de Lagrange diz que para se encontrar um extremo relativo de uma função f de n variáveis que estão relacionadas entre si por k condições $\phi_1,...,\phi_k$ (com k<n), introduzem-se k multiplicadores de Lagrange λ_i (i=1,...,k) e estuda-se uma nova função Ψ de n+k variáveis, sendo

$\Psi = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + ... + \lambda_k\phi_k$

Os extremos relativos da função f serão as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \\ \vdots \\ \phi_k = 0 \\ \Psi'_{x1} = 0 \\ \Psi'_{x2} = 0 \\ \vdots \\ \Psi'_{xn} = 0 \end{cases}$$

FÓRMULA DE PROPAGAÇÃO DA VARIÂNCIA

Se y = f(x), então através das leis de propagação da variância, sabe-se que:

$$\boxed{C_y = J_{yx}\, C_x\, J_{yx}^t}$$

APÊNDICE B - SIMBOLOGIA

x_i - Parâmetros

u - Nº de parâmetros

l_i - Observações

n - Nº de observações

l - Vector coluna das observações $\quad l_{n,1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$

n_0 - Nº mínimo de observações necessárias para resolver o problema em estudo.

v_i - Resíduos

v - Vector dos resíduos $\quad v_{n,1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$\hat{l}_i$ - Observações ajustadas ($\hat{l}_i = l_i + v_i$)

$\hat{l}$ - Vector coluna das observações ajustadas $\quad \hat{l}_{n,1} = l + v = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \vdots \\ \hat{l}_n \end{bmatrix}$

r - Graus de liberdade ($r = n - n_0$)

$f(x,l) = 0$ - Modelo funcional

Δ - Vector das correcções dos parâmetros $\quad \Delta_{u,1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix}$

A - Matriz Jacobiana $J_{fl} = \left(\frac{\delta f_i}{\delta l_i}\right)_0 \quad A_{c,n} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta l_1} & \frac{\delta f_1}{\delta l_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta l_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta l_1} & \frac{\delta f_2}{\delta l_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta l_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\delta f_c}{\delta l_1} & \frac{\delta f_c}{\delta l_2} & \cdots & \frac{\delta f_c}{\delta l_n} \end{bmatrix}_0$

B - Matriz Jacobiana $J_{fx} = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_i}\right)_0 \quad B_{c,u} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_u} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_u} \\ \vdots & & & \\ \frac{\delta f_c}{\delta x_1} & \frac{\delta f_c}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_c}{\delta x_u} \end{bmatrix}_0$

W - Matriz dos pesos $W = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1/\sigma_{1^2} & & & \\ & 1/\sigma_{2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_{n^2} \end{bmatrix}$

$\hat{x}$ - vector dos parâmetros ajustados $\quad \hat{x}_{u,1} = x_0 + \Delta = \begin{bmatrix} x_{1^0} \\ x_{2^0} \\ \vdots \\ x_{u^0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \\ \vdots \\ \widehat{x_u} \end{bmatrix}$

BIBLIOGRAFIA

Mikhail, E.; Ackerman, F. - "Observations and Least Squares". University Press of America,1976.

Cooper, M. - "Control Surveys in Civil Engineering". Collins Professional and Technical Books, 1987.

Davis, R.; Foote, F.; et. al. - "Surveying, theory and practice". McGraw-Hill Book Company, 1981.

CASO GERAL:

Forma linearizada do modelo funcional:

$$\boxed{Av + B\Delta = f}$$

Sendo:

$A = (\frac{\delta f}{\delta l})_0$ $\qquad$ $B = (\frac{\delta f}{\delta x})_0$

$v = \hat{l} - l$ $\qquad$ $\Delta = \hat{x} - x_0$

$f = d - Al$ $\qquad$ com $\qquad$ $d = - f(l_0,x_0) + Al_0$

Expressões que permitem calcular os valores mais prováveis para as variáveis do problema:

$$\boxed{v = W^{-1}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}(f - B\Delta)}$$

$$\boxed{\Delta = N^{-1}t}$$

Com:

$N = B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}B$

$t = B^t (AW^{-1}A^t)^{-1}f$

Expressões que permitem calcular as matrizes cofactor dos parâmetros, dos resíduos e das observações ajustadas:

$$\boxed{Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}}$$

$$\boxed{Q_{vv}=Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll}-Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}BN^{-1}B^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll}}$$

$$\boxed{Q_{\uparrow\uparrow} = Q_{ll} - Q_{vv}}$$

CASOS PARTICULARES:

a) Ajustamento utilizando equações de observação

Forma linearizada do modelo funcional:

$\boxed{v + B\Delta = f}$ ou $\boxed{l + v + B\Delta = d}$

Expressões que permitem calcular os valores mais prováveis para as variáveis do problema:

$\boxed{v = f - B\Delta}$ $\boxed{\Delta = N^{-1}t}$

Com:

$N = B^t\, W\, B$ $t = B^t\, W\, f$

Expressões que permitem calcular as matrizes cofactor dos parâmetros, dos resíduos e das observações ajustadas:

$\boxed{Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}}$ $\boxed{Q_{vv} = Q_{ll} - BN^{-1}B^t}$ $\boxed{Q_{\uparrow\uparrow} = BN^{-1}B^t}$

b) Ajustamento utilizando equações de condição

Forma linearizada do modelo funcional:

$\boxed{Av = f}$

Expressões que permitem calcular os valores mais prováveis para as variáveis do problema:

$\boxed{v = W^{-1}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}f}$

Expressões que permitem calcular as matrizes cofactor dos resíduos e das observações ajustadas:

$\boxed{Q_{vv} = Q_{ll}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}AQ_{ll}}$ $\boxed{Q_{\uparrow\uparrow} = Q_{ll} - Q_{vv}.}$