Alfredo Costa
Universidade
de Coimbra
amgc@mat.uc.pt

TERNOS PITAGÓRICOS E TIJOLOS DE EULER

O título deste *Canto Délfico* é o mesmo de uma jornada da Liga Delfos, cujos problemas aqui apresentamos. Começando por explicar o que é a Liga Delfos, introduzimos de seguida o que são os tijolos de Euler. Estes objetos matemáticos constituem um análogo espacial do familiar conceito de terno pitagórico. Destacamos o problema em aberto sobre a existência ou não de tijolos de Euler perfeitos.

1. INTRODUÇÃO

A *Escola Delfos*[1] organiza-se em torno de estágios de dois dias, congregando na Universidade de Coimbra estudantes dos ensinos Básico e Secundário, com uma regularidade de aproximadamente mensal. Estes estudantes são referidos como sendo os *délficos*.

Uma atividade-farol da Escola Delfos é a *Liga Delfos*. A Liga Delfos é uma competição entre equipas de délficos, decorrendo nos seus estágios. Cada edição corresponde a um ano letivo, e está dividida em cerca de sete jornadas, garantindo que a maioria dos estágios conte com uma jornada na sua programação. Em geral, cada jornada tem a duração de duas horas e meia, e cada edição tem cinco equipas. A Liga Delfos foi criada em 2004 por Jorge Neves, o qual por largos anos a organizou e moldou. Contou ainda com vários outros organizadores ao longo da sua história.

O autor destas notas pode testemunhar o quão entusiasmante é a Liga Delfos para os seus participantes. A Liga Delfos fomenta a partilha de conhecimentos, facilitada pela camaradagem. A competição entre as equipas é amigável e bem humorada, como o demonstram os nomes que as equipas escolhem para si, frequentemente associados a objetos, conceitos e problemas matemáticos com que os délficos se deparam. Exercendo o seu habitual bom humor, vários délficos pediram a certa altura ao autor destas notas que preparasse uma jornada envolvendo de alguma forma a palavra "Tijolo", a qual já fazia parte do nome de uma equipa. Acedeu com gosto, organizando uma jornada intitulada *Ternos Pitagóricos e Tijolos de Euler*, que decorreu a 7 de outubro de 2017. Neste *Canto Délfico*, espreitamos um pouco a Liga Delfos, propondo ao leitor os problemas dessa jornada. Antes disso, fazemos uma breve contextualização dos problemas.

2. TIJOLOS DE EULER

Figura 1. Leonard Euler [2] (1707-1783).

[1] *https://www.uc.pt/fctuc/dmat/delfos*

[2] Imagem do domínio público, retirada de *https://www.nndb.com/people/954/000048810*

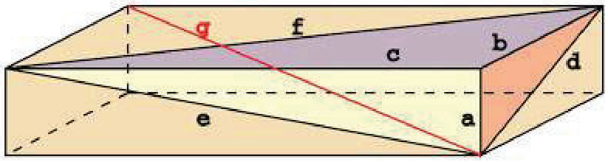

Figura 2. Ilustração[3] de um tijolo com dimensões a, b, c, diagonais faciais d, e, f, e diagonal espacial g.

Um paralelepípedo retangular (i.e., um prisma de base e faces retangulares) é um *tijolo de Euler* se todas as suas arestas e diagonais faciais têm comprimentos inteiros. Estes objetos matemáticos devem o seu nome às investigações sobre eles feitas pelo afamado matemático suíço Leonard Euler (1707-1783). O tijolo de Euler de menor volume tem dimensões 44, 117 e 240.

Um tijolo de Euler *perfeito* é um tijolo de Euler cuja diagonal espacial também é um inteiro. O problema da existência de um tijolo de Euler perfeito traduz-se em saber se o sistema de equações

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 \\ a^2 + c^2 = e^2 \\ b^2 + c^2 = f^2 \\ a^2 + f^2 = g^2 \end{cases}$$

tem uma solução apenas em inteiros (cf. figura 2). Não se sabe se existe algum tijolo de Euler perfeito [7].

Mais geralmente, um paralelepípedo (não necessariamente retangular) diz-se *perfeito* se todas as suas arestas, e todas as suas diagonais faciais e espaciais têm comprimento inteiro. Em 2011, Jorge F. Sawyer e Clifford A. Reiter provaram que existem paralelepípedos perfeitos (mas não retangulares), exibindo vários exemplos concretos, encontrados com recurso a força bruta computacional [11]. Num artigo de 2014, Sokolowsky et al. demonstraram a existência de uma família infinita de paralelepípedos perfeitos, dois a dois não semelhantes, cada um dos quais com exatamente duas faces não retangulares [12]. Nesta família, os ângulos das faces não retangulares podem ser tomados tão próximo de 90º quanto se queira. Nesse mesmo artigo, com base nos argumentos de prova aí utilizados, os seus autores conjeturam que não existe um tijolo de Euler perfeito.

Fazemos notar que a expressão "Tijolo de Euler" é de facto usada na literatura, no sentido técnico que aqui apresentamos (a expressão "cuboide racional" também aparece na literatura, com o mesmo significado). Isso facilitou muito a tarefa de descobrir um tema que fosse ao encontro do desejo dos délficos!

3. TERNOS PITAGÓRICOS

Uma equação *diofantina* é uma equação em várias variáveis no domínio dos inteiros. A resolução de equações diofantinas é um dos tipos de problemas mais abordados pelos délficos. Naturalmente, uma das equações que estudam é a equação $x^2 + y^2 = z^2$, que exprime o problema de achar triângulos retângulos de lados inteiros, os chamados *triângulos pitagóricos*. Um *terno pitagórico* é um terno (u, v, w) de inteiros positivos tal que $u^2 + v^2 = w^2$. Diremos também que o terno (a, b, c) é um terno de um tijolo de Euler, ou simplesmente que é um tijolo de Euler, se for o terno das três dimensões de um tijolo de Euler. Portanto, um terno de um tijolo de Euler é um terno pitagórico.

Um terno de inteiros positivos (a, b, c) diz-se *primitivo* se o máximo divisor comum de a, b, c é 1. Note-se que se $a^2 + b^2 = c^2$, então $\text{mdc}(a, b, c) = 1$ se e só se cada par de inteiros no conjunto $\{a, b, c\}$ é primo entre si. Acresce que todas as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$ são da forma (ka, kb, kc) em que k é um inteiro e (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo.

É um bom exercício de iniciação verificar que se (u, v, w) é um terno pitagórico, então u ou v é par. A chave está em observar que os quadrados perfeitos pares são múltiplos de 4, enquanto que os quadrados perfeitos ímpares dão resto 1 quando divididos por 4.

A seguinte caracterização dos ternos pitagóricos primitivos é regularmente aprendida pelos délficos. Note-se que, sem perda de generalidade, basta-nos considerar ternos pitagóricos primitivos (u, v, w) em que u é par, pela observação feita no parágrafo anterior.

Teorema. *Seja (u, v, w) um terno de inteiros positivos em que u é par. O terno (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo se e só se $u = 2st$, $v = s^2 - t^2$ e $w = s^2 + t^2$, para alguns inteiros positivos s, t primos entre si e tais que $s - t$ é ímpar e positivo.*

Demonstração. Sejam s, t inteiros positivos primos entre si tais que $s - t$ é um número positivo ímpar, e sejam

$$u = 2st, \quad v = s^2 - t^2 \quad \text{e} \quad w = s^2 + t^2.$$

Verifica-se diretamente que $u^2 + v^2 = w^2$. Se existe um primo p que divide u e v, então tal primo divide $v + w = 2s^2$ e $w - v = 2t^2$. Como $\text{mdc}(s, t) = 1$, teremos então $p = 2$. Mas $s - t$ é ímpar, pelo que $v = (s - t)(s + t)$ é ímpar. Logo $\text{mdc}(u, v) = 1$, e portanto (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo.

Reciprocamente, suponhamos que (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo tal que u é par. Então v, w são ímpares. Daí decorre que $u^2 = w^2 - v^2 = (w+v)(w-v)$ é um múltiplo de 4, pelo que temos a seguinte fatorização de inteiros:

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{w+v}{2} \cdot \frac{w-v}{2}$$

Se d é um divisor positivo comum dos inteiros $\frac{w+v}{2}$ e $\frac{w-v}{2}$, então d divide

$$\frac{w+v}{2} + \frac{w-v}{2} = w \quad e \quad \frac{w+v}{2} - \frac{w-v}{2} = v$$

pelo que $d = 1$. Logo, a fatorização que obtivemos para $(\frac{u}{2})^2$ permite-nos concluir que existem inteiros positivos s, t primos entre si tais que

$$\begin{cases} \frac{w+v}{2} = s^2 \\ \frac{w-v}{2} = t^2 \end{cases}$$

e $u = 2st$. Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{cases} w = s^2 + t^2 \\ v = s^2 - t^2 . \end{cases}$$

Como $v^2 = (s-t)(s+t)$ é ímpar, necessariamente o número positivo $s - t$ é ímpar. □

Este teorema é um exemplo de uma solução *paramétrica* de uma equação (ou sistema de equações) em inteiros, neste caso expressa em função dos parâmetros s, t. Existem muitas soluções paramétricas parciais do problema do Tijolo de Euler (cf. [9, 5]). Na secção seguinte referimos a solução do matemático inglês Saunderson (1682-1739), porventura a mais famosa, e que foi redescoberta por Euler [6]. A título de exemplo, temos a seguinte solução parcial paramétrica, obtida por Euler, distinta da atribuída a Saunderson:

$$\begin{cases} a = 2st(3s^2 - t^2)(3t^2 - s^2) \\ b = 8st(s^4 - t^4) \\ c = (s^2 - t^2)(s^2 - 4st + t^2)(s^2 + 4st + t^2) \end{cases}$$

onde s, t são inteiros (admitindo que a, b, c possam ser negativos).

4. UMA JORNADA DA LIGA DELFOS

Nesta secção o leitor pode apreciar a lista dos sete problemas que surgiram no enunciado da jornada de 7 de outubro de 2017 da Liga Delfos. O enunciado incluía uma breve contextualização do tópico. Os problemas foram extraídos de diversas fontes. Os seus graus de dificuldade são variados, sendo alguns deles meros exercícios introdutórios, enquanto o último problema é bastante mais difícil do que os precedentes.

Cada problema é um requerimento formulado na segunda pessoa do plural, refletindo o facto de que as respostas são trabalhadas em equipa.

Problemas de 7/10/17 da Liga Delfos

1. a) Determinem todos os ternos pitagóricos primitivos da forma $(40, v, w)$.

   b) Determinem todos os ternos pitagóricos (u, v, w) tais que u, v e w estão em progressão aritmética.

   c) Determinem todos os triângulos pitagóricos de área igual ao perímetro.

2. Provem que, para todo o inteiro n maior do que 12, existe um inteiro estritamente entre n e $2n$ que é a área de um triângulo pitagórico.

3. Mostrem que o raio da circunferência inscrita num triângulo pitagórico é sempre um inteiro.

Figura 3. Nicholas Saunderson[4] (1682-1739).

[3] By Gfis - *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler_brick.svg*, CC BY-SA 4.0, *https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0*

[4] Imagem do domínio público, cf. *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nicolas_Saunderson.jpg*

4. O matemático inglês Nicholas Saunderson (1682-1739) descobriu que se (u, v, w) é um terno pitagórico então

$$\left(|u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw|\right)$$

é um terno de um tijolo de Euler (designemos estes ternos por ternos de Saunderson).

a) Verifiquem o resultado de Saunderson.

b) Verifiquem que se (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo, então o terno

$$\left(|u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw|\right)$$

é primitivo.

c) Sabendo que a equação diofantina $x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$ não tem solução se $xy \neq 0$, provem que não existem tijolos de Euler perfeitos cujas dimensões sejam ternos de Saunderson.

5. Mostrem que o terno $(85, 132, 720)$ define um tijolo de Euler que não é um tijolo cujas dimensões são dadas pela fórmula de Saunderson.

6. Mostrem que, num qualquer tijolo de Euler, para cada $n \in \{5, 9, 11, 16\}$, existe pelo menos uma aresta cujo comprimento é divisível por n.

7. Provem que a equação diofantina

$$x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$$

não tem solução se $xy \neq 0$.

5. UM PROBLEMA SOBRANTE

Por regra, o enunciado de uma jornada da Liga Delfos tem sete problemas, de igual pontuação. Na preparação do enunciado sobram naturalmente problemas, ao almejar-se uma prova equilibrada em duração e composição. Eis um problema sobrante cujo enunciado nos dá mais informações sobre os tijolos de Euler:

Verifiquem que se (x, y, z) é um tijolo de Euler então (xy, xz, yz) também é um tijolo de Euler, e que se (x, y, z) é um tijolo de Saunderson, então (xy, xz, yz) não é um tijolo de Saunderson.

Curiosamente, se repetirmos duas vezes a operação descrita neste problema, obtemos um tijolo de Euler semelhante ao inicial, pois a função $f(x, y, z) = (xy, xz, yz)$ satisfaz a igualdade $f^2(x, y, z) = xyz(x, y, z)$. Em 1977, E. Z. Chein provou que se (x, y, z) é um tijolo de Saunderson (não sendo, portanto, perfeito), então $f(x, y, z)$ também não é um tijolo de Euler perfeito [4].

6. ONDE PROCURAR SOLUÇÕES

O problema 1 é um conjunto de exercícios de aquecimento sobre ternos pitagóricos. Estes e outros exercícios semelhantes podem ser encontrados no livro de Burton [3], onde também encontramos uma solução do problema 3 como um exemplo de aplicação da solução paramétrica da equação diofantina $x^2 + y^2 = z^2$.

O problema 2 apareceu na final das Olimpíadas Coreanas de Matemática de 1993 (cf. [1, 2]).

Como referência para os problemas 4, 6 e 7, temos o apêndice de um artigo de Knill [8]. Spohn observou em 1972 que a parametrização de Saunderson não produz tijolos de Euler perfeitos [13], aplicando o resultado enunciado no problema 7 e obtido em 1912 pelo inglês Henry Cabourn Pocklington [10].

REFERÊNCIAS

[1] *https://imomath.com/othercomp/Kor/KorMOf93.pdf.*

[2] *https://math.stackexchange.com/questions/568547/korea-math-olympiad-1993.*

[3] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill, 7th edition, 2011.

[4] E. Z. Chein. "On the Derived Cuboid of an Eulerian Triple". *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques*, 20(4): 509–510, 1977.

[5] W. J. A. Colman. "Some Observations on the Classical Cuboid and its Parametric Solutions". *The Fibonacci Quarterly. The Official Journal of the Fibonacci Association*, 26(4): 338–343, 1988.

[6] Leonard Eugene Dickson. *History of the Theory of Numbers. Vol. II: Diophantine Analysis*. Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[7] Richard K. Guy. *Unsolved problems in Number Theory*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004.

[8] Oliver Knill. *The Babylonian Graph*, May 2022. arXiv:2205.13285v1 [math.CO].

[9] Maurice Kraitchik. *Théorie des Nombres. T. 3: Analyse Diophantine et Applications aux Cuboïdes Rationnels*. Paris: Gauthier- Villars, 1947.

[10] Henry C. Pocklington. "Some Diophantine Impossibilities". *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, 18: 110–118, 1912.

[11] Jorge F. Sawyer and Clifford A. Reiter. "Perfect Parallelepipeds Exist". *Mathematics of Computation*, 80(274): 1037–1040, 2011.

[12] Benjamin D. Sokolowsky, Amy G. VanHooft, Rachel M. Volkert, and Clifford A. Reiter. "An Infinite Family of Perfect Parallelepipeds". *Mathematics of Computation*, 83(289): 2441–2454, 2014.

[13] W. G. Spohn. "On the Integral Cuboid". *American Mathematical Monthly*, 79: 57–59, 1972.