Alfredo Costa
Universidade
de Coimbra
amgc@mat.uc.pt

O TEOREMA DE MINKOWSKI

Neste *Canto Délfico* propõe-se o Teorema de Minkowski como tema avançado de estudo extra-curricular, para alunos do ensino secundário especialmente motivados.

1. INTRODUÇÃO

O Teorema de Minkowski foi o tema de uma aula lecionada pelo autor destas linhas num estágio do Projeto Delfos, em 2012. Os alunos eram essencialmente dos 11.º e 12.º anos de escolaridade. Este teorema não é irrelevante na preparação para competições escolares de matemática.

É verdade que por si só é muito raramente útil em tais competições; mas as suas demonstrações e aplicações constituem um bom pretexto para a introdução, ou revisão, de ferramentas úteis em contexto olímpico. Finalmente, a sua beleza pode estimular estudantes curiosos e com sentido estético, tenham ou não inclinações competitivas.

Neste texto, apresentamos o Teorema de Minkowski no caso bidimensional, seguindo essencialmente o plano da aula de 2012. A aplicação destacada é a dedução da caracterização dos números primos que são soma de dois quadrados. Esta caracterização é relevante em contexto olímpico, desde logo pela associação com os alicerces da Aritmética Modular.

Os jovens estudantes com interesse pela Física poderão ter um especial gosto em saber que estamos a falar de um teorema do matemático Hermann Minkowski, afamado pelo seu papel no dealbar da Teoria da Relatividade (tópico abordado num outro número da *Gazeta de Matemática*, cf. [7]). Não raro, tais estudantes interessam-se precocemente pelo estudo da integração numa ou mais variáveis reais; para eles, as instâncias do Teorema de Minkowski em dimensões superiores poderão ser especialmente motivadoras.

O Teorema de Minkowski inaugurou a chamada *Geometria dos Números*. O leitor interessado nesta área matemática encontra uma introdução amigável no livro homónimo [6], onde o Teorema de Minkowski é mesmo referido como sendo o "teorema fundamental da geometria dos números". No final desse livro encontramos uma breve biografia de Minkowski. Para uma exposição sobre o teorema num livro de preparação olímpica, temos a obra de Andreescu & Dospinescu [3]. O plano da aula associada a este canto délfico apoiou-se no livro de Jones & Jones [5].

Figura 1. Hermann Minkowski[1] (1864-1909).

[1] Imagem do domínio público, via Wikimedia Commons, *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Minkowski.png.*

2. O TEOREMA DE MINKOWSKI

Um *reticulado no plano* $\mathbb{R}^2$ é um conjunto da forma

$$\Lambda = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}\},$$

onde v_1 e v_2 são vetores com direções distintas. Dizemos que v_1 e v_2 *geram* o reticulado Λ. Podemos escrever $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$. A *região fundamental* de um tal reticulado é o conjunto

$$F = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq \alpha_i < 1\}.$$

Trata-se do paralelogramo de vértices $(0,0)$, v_1, v_2 e $v_1 + v_2$, a que foram retirados os lados $[v_1, v_1 + v_2]$ e $[v_2, v_1 + v_2]$, cf. figura 2. Note-se que o único elemento de Λ em F é o ponto $(0,0)$. Escrevendo $v_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})$ e $v_2 = (v_{2,1}, v_{2,2})$, a área da região fundamental é $|v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1}|$, i.e., o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Como exemplo especial, temos o reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o *reticulado inteiro*, gerado pelos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$, e cuja região fundamental é um quadrado de área 1 sem dois dos seus lados.

Fixado um reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$, dizemos que dois vetores v e w de $\mathbb{R}^2$ são *equivalentes módulo* Λ, e escrevemos $v \sim w$, se $v - w \in \Lambda$. É um exercício elementar provar que $v \sim w$ se só se $v + \Lambda = w + \Lambda$. Reparemos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

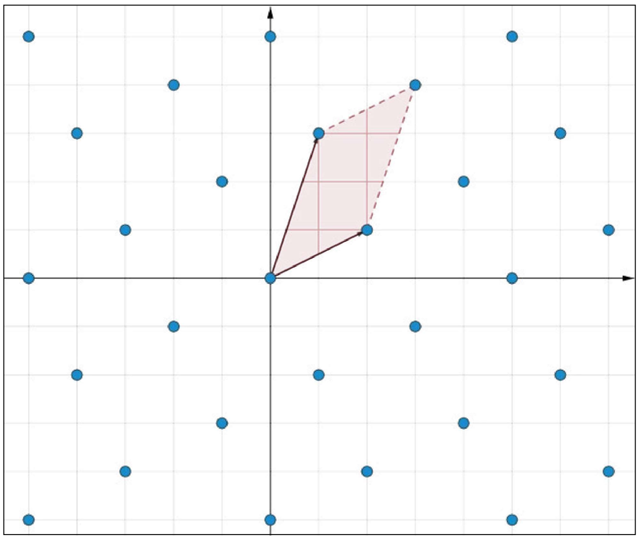


Figura 2. Ilustração do reticulado gerado pelos vetores v_1=(2,1) e v_2=(1,3). Os pontos do reticulado estão assinalados a azul, e a região fundamental aparece a sombreado.

A seguinte propriedade é fácil de intuir e provar: para cada $v \in \mathbb{R}^2$ existe um único $w \in F$ tal que $v \sim w$. Logo, podemos definir a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to F$ que a cada $v \in \mathbb{R}^2$ associa o único $w \in F$ tal que $v \sim w$.

Observemos que o plano é pavimentado por translações de F de forma natural; de facto, temos $(F + l) \cap (F + k) = \emptyset$ sempre que l, k são elementos distintos de Λ, e $\mathbb{R}^2$ é a união disjunta dos conjuntos da forma $F + l$, com $l \in \Lambda$:

$$\mathbb{R}^2 = \biguplus_{l \in \Lambda} (F + l).$$

No enunciado do teorema seguinte, pense o leitor que X é um cartão pousado no plano, com área superior à da região fundamental do reticulado $\Lambda = v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$, e que corta o cartão X ao longo das retas paralelas a v_1 ou v_2 que passam pelos pontos do reticulado. Ao trasladar para a região fundamental, de um modo natural, os pedaços resultantes do corte, nasce a intuição de que será impossível evitar que pelo menos dois dos pedaços se sobreponham (cf. figura 3).

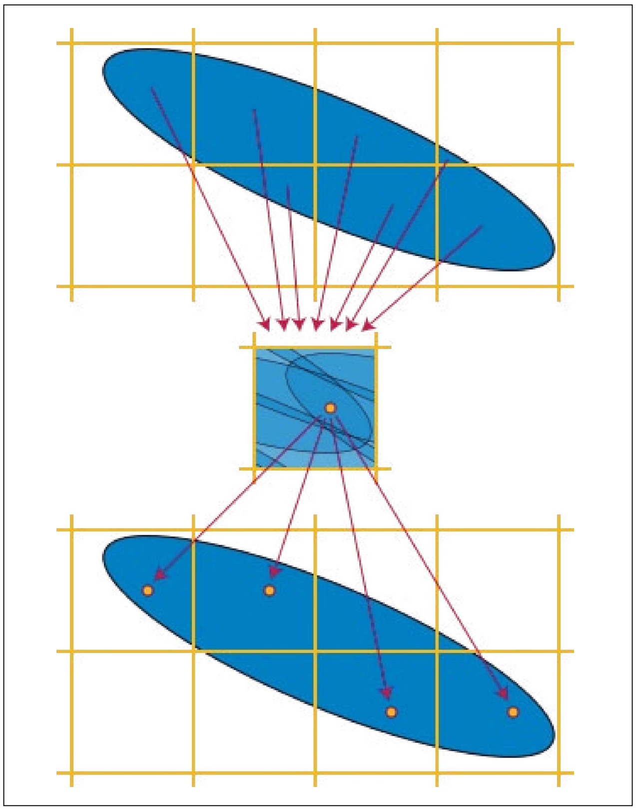


Figura 3. Ilustração[2] do Teorema 1 no caso do reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, com o cartão X representado a azul.

Teorema 1. *Consideremos um subconjunto limitado X de $\mathbb{R}^2$. Se a área de X for maior do que a área da região fundamental de Λ, então a restrição de φ a X não é injetiva.*

Demonstração. Suponhamos que a restrição de φ a X é injetiva. Para cada $l \in \Lambda$, seja $X_l = X \cap (F + l)$. Então

$$X = \biguplus_{l \in \Lambda} X_l. \tag{1}$$

Sendo esta uma reunião disjunta, temos

$$\text{Área}(X) = \sum_{l \in \Lambda} \text{Área}(X_l)\,. \tag{2}$$

A restrição de φ a $F + l$ coincide com a restrição a $F + l$ da translação $v \mapsto v - l$. Portanto, temos

$$\text{Área}(X_l) = \text{Área}(\varphi(X_l))\,. \tag{3}$$

Uma vez que a restrição de φ a X é injetiva, concluímos a partir da união disjunta (1) que temos a seguinte união disjunta:

$$\varphi(X) = \biguplus_{l \in \Lambda} \varphi(X_l).$$

Portanto, a seguinte igualdade verifica-se:

$$\text{Área}(\varphi(X)) = \sum_{l \in \Lambda} \text{Área}(\varphi(X_l))\,. \tag{4}$$

Logo, de (2), (3) e (4) deduzimos que

$$\text{Área}(X) = \text{Área}(\varphi(X)).$$

Como $\varphi(X) \subseteq F$, concluímos que $\text{Área}(X) \leq \text{Área}(F)$. □

Corolário 1. *Se a área de X for maior do que a área da região fundamental de Λ, então existem $v, w \in X$ tais que $v \neq w$ e $v - w \in \Lambda$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1, existem $v, w \in X$ tais que $v \neq w$ e $\varphi(v) = \varphi(w)$. Como $v \sim \varphi(v)$, $w \sim \varphi(w)$ e $\sim$ é uma relação de equivalência, temos $v \sim w$, ou seja, $v - w \in \Lambda$. □

No teorema anterior e seu corolário pressupõe-se implicitamente que o conjunto X é à partida *mensurável*; mas num contexto semelhante ao da aula associada a este documento, pode não ser oportuno destacar que é preciso que X tenha área, dada a delicadeza da noção de conjunto mensurável. A hipótese de que X é limitado não é necessária, mas é conveniente para evitarmos considerandos sobre séries, que seriam precisos para

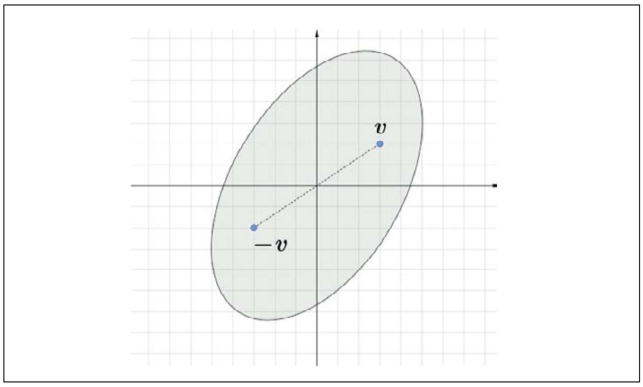


Figura 4. Um conjunto centralmente simétrico e convexo.

dar sentido às igualdades (2) e (4) no caso em que X não é limitado.

O leitor poderá querer agora exercitar-se resolvendo o seguinte problema olímpico.

Problema 1. (Teste de Seleção da China para as Olimpíadas Internacionais de Matemática, 1988) *Seja n um inteiro positivo. Um polígono do plano tem área maior do que n. Prove que podemos aplicar-lhe uma translação de tal modo que na nova posição contém pelo menos $n + 1$ pontos de coordenadas inteiras.*

O corolário 1 e o problema 1 são casos especiais do *Teorema de Blichfeldt* [6, Teorema 9.3]. Este resultado de 1914 deve-se ao matemático americano de naturalidade dinamarquesa Hans Frederik Blichfeldt (1873-1945), cuja biografia também é destacada no já mencionado livro [6] de introdução à Geometria dos Números. No popular fórum olímpico da página web *AoPS Online* encontra-se uma discussão sobre a solução do problema [1].

Precisamos de mais algumas definições antes de enunciar o Teorema de Minkowski. Um subconjunto de X de $\mathbb{R}^2$ diz-se:

- *centralmente simétrico*, ou *simétrico em relação à origem*, se $v \in X \Rightarrow -v \in X$;

- *convexo* se, sempre que $v, w \in X$, o segmento de reta $[v, w]$ que une v a w está contido em X .

Por exemplo, um círculo com centro na origem é centralmente simétrico. Mais geralmente, todas as regiões elípticas cujos dois eixos passem pela origem são cen-

[2] David Eppstein, CC0, via Wikimedia Commons - *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blichfeldts_theorem.svg*.

tralmente simétricas.

Teorema 2. (Teorema de Minkowski, c. 1890). *Seja Λ um reticulado de $\mathbb{R}^2$ com região fundamental F, e seja X um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ que é centralmente simétrico e convexo. Se*

$$\text{Área}(X) > 4\,\text{Área}(F),$$

então o conjunto X contém um ponto do reticulado Λ distinto de (0,0).

Demonstração. Suponhamos que

$$\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$$

é gerado pelos vetores $v_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})$ e $v_2 = (v_{2,1}, v_{2,2})$. Recordemos que a área da respetiva região fundamental F é o módulo do determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Consideremos também o reticulado

$$2\Lambda = \mathbb{Z}(2v_1) + \mathbb{Z}(2v_2).$$

A região fundamental deste reticulado é o conjunto $2F = \{(2x, 2y) : (x, y) \in F\}$, cuja área é $|\det(2M)| = 4|\det(M)| = 4\,\text{Área}(F)$. Por hipótese, temos portanto $\text{Área}(X) > \text{Área}(2F)$. Decorre então do corolário 1, aplicado ao reticulado 2Λ, que existem $x, y \in X$ tais que $x \neq y$ e $x - y \in 2\Lambda$. Logo, o ponto

$$P = \frac{x-y}{2}$$

pertence a Λ. Observemos o seguinte:

- $x \neq y$ significa que $P \neq (0, 0)$;
- $-y \in X$, pois X é centralmente simétrico;
- o ponto médio de $x \in X$ e $-y \in X$, que é P, pertence a X porque X é convexo.

Portanto temos $P \in (X \cap \Lambda) \setminus \{(0, 0)\}$. □

3. CONGRUÊNCIAS

Usamos a notação $a \equiv_n b$ para significar que a e b são *congruentes módulo n*, o que significa que os inteiros a e b deixam o mesmo resto quando divididos pelo número natural n. Dito de outro modo, $a \equiv_n b$ se e só se $a - b$ é múltiplo de n. Recordemos algumas propriedades básicas da Aritmética Modular:

- se $a \equiv_n b$ e $c \equiv_n d$, então $a + c \equiv_n b + d$ e $ac \equiv_n bd$;
- a é primo com n se e só existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $ac \equiv_n 1$; o inteiro c é único módulo n (isto é, se $ac \equiv_n ac' \equiv_n 1$ então $c \equiv_n c'$) e diz-se que c é o *inverso de a módulo n*.

O *Pequeno Teorema de Fermat* e o *Teorema de Wilson* são das primeiras propriedades avançadas da Aritmética Modular que são ensinadas.

Teorema 3. (Pequeno Teorema de Fermat). *Se p é primo e o inteiro x não é múltiplo de p, então $x^{p-1} \equiv_p 1$.*

Esboço da demonstração. As seguintes ideias permitem uma demonstração curta:

- Justificar que basta provar que $x^p \equiv_p x$.
- Reduzir a prova ao caso $x \geq 1$.
- Provar que $x^p \equiv_p x$ por indução em x, usando o binómio de Newton e o facto de que p divide $\binom{p}{k}$ quando $0 < k < p$.

Com estas pistas, a demonstração torna-se um exercício bastante acessível.

Teorema 4. (Teorema de Wilson) *Se p é primo, então $(p-1)! \equiv_p -1$.*

Esboço da demonstração. Comecemos por reparar que 1 e $p - 1$ são os únicos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ que são solução da equação $x^2 \equiv_p 1$ (porquê?). De seguida, observemos que se no produto

$$(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (p-2) \cdot (p-1)$$

emparelharmos os elementos de $\{2, 3, \ldots, p-2\}$ que são mutuamente inversos módulo p, cancelando esses pares de inversos mútuos, obtemos $(p-1)! \equiv_p 1 \cdot (p-1) \equiv_p -1$. □

As demonstrações destes dois bem conhecidos teoremas tinham sido feitas em aulas anteriores àquela cujo plano serve de base para este texto.

Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a é um *resíduo quadrático módulo n* se existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 \equiv_n a$. Na demonstração do seguinte resultado, vemos o Pequeno Teorema de Fermat e o Teorema de Wilson em ação.

Teorema 5. *Seja p um primo ímpar. Então -1 é um resíduo quadrático módulo p se e só se $p \equiv_4 1$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 \equiv_p -1$. Então temos

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p x^{p-1} \equiv_p 1$$

onde a última congruência resulta do Pequeno Teorema de Fermat. Portanto, p divide $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1$, o que só é possível se $\frac{p-1}{2}$ é par, isto é, se $p \equiv_4 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $p = 4k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Para $x = (\frac{p-1}{2})!$ temos:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \cdots \cdot 1 \\ &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2} - p\right) \cdots \cdot \left(1-p\right). \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 cada um dos últimos $\frac{p-1}{2} = 2k$ fatores, segue que

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \left(p - \frac{p-1}{2}\right) \cdots \cdot \left(p-1\right) \\ &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdots \cdot \left(p-1\right) \\ &\equiv_p (p-1)! \\ &\equiv_p -1 \end{aligned}$$

onde a última congruência se deve ao Teorema de Wilson. Portanto -1 é um resíduo quadrático módulo p. $\square$

4. CARACTERIZAÇÃO DOS PRIMOS QUE SÃO SOMA DE DOIS QUADRADOS

O próximo lema estabelece as condições para aplicarmos o Teorema de Minkowski na caracterização dos primos que são soma de dois quadrados.

Lema 1. *Consideremos inteiros n e u, com $n \geq 1$. O conjunto*

$$\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \equiv_n ux\}$$

é o reticulado no plano $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,u)$ e $v_2 = (0,n)$. A área da sua região fundamental é n.

Demonstração. Seja $(x,y) \in \Lambda$. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y = kn + ux$, donde

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x, kn+ux) \\ &= x(1,u) + k(0,n) \in \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2. \end{aligned}$$

Portanto sabemos que $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$. Reciprocamente, seja $(x,y) \in \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$. Então temos

$$(x,y) = \alpha(1,u) + \beta(0,n)$$

para alguns $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Necessariamente $x = \alpha$ e $y = ux + \beta n$, obtendo-se $y \equiv_n ux$. Provou-se pois que Λ é o reticulado $\mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$.

Finalmente, a área da região fundamental de Λ é o módulo do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

o qual vemos ser igual a n. $\square$

Estamos em condições de deduzir do Teorema de Minkowski o resultado almejado.

Teorema 6. *Seja p um primo ímpar. Então p é a soma de dois quadrados se e só se $p \equiv_4 1$.*

Demonstração. Graças ao Teorema 5, basta-nos mostrar que p é a soma de dois quadrados se e só se -1 é um resíduo quadrático módulo p.

Se x e y são inteiros tais que $p = x^2 + y^2$, então p não divide x nem y (porquê?). Em particular, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $yz \equiv_p 1$. Então temos

$$0 \equiv_p (x^2+y^2) \equiv_p (x^2+y^2)z^2 \equiv_p (xz)^2 + 1.$$

Portanto $u = xz$ satisfaz $u^2 \equiv_p -1$.

Reciprocamente, suponhamos que existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $u^2 \equiv_p -1$. Seja

$$\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \equiv_p ux\}.$$

Pelo Lema 1, o conjunto Λ é um reticulado cuja região fundamental F tem área p. Consideremos ainda o interior do círculo de centro (0, 0) e raio $\rho = \sqrt{2p}$, ou seja, consideremos o conjunto

$$\mathcal{B}_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2p\}.$$

A área de $\mathcal{B}_\rho$ é $2\pi p$. Como

$$\text{Área}(\mathcal{B}_\rho) > 4\,\text{Área}(F),$$

aplicando o Teorema de Minkowski concluímos que existe $(a,b) \in \mathcal{B}_\rho \cap \Lambda$ tal que $(a,b) \neq (0,0)$. Para um tal (a,b), temos $b \equiv_p ua$, e portanto

$$a^2 + b^2 \equiv_p a^2 + u^2a^2 \equiv_p a^2 - a^2 \equiv_p 0. \tag{5}$$

Logo $a^2 + b^2$ é um múltiplo de p. Por outro lado, como

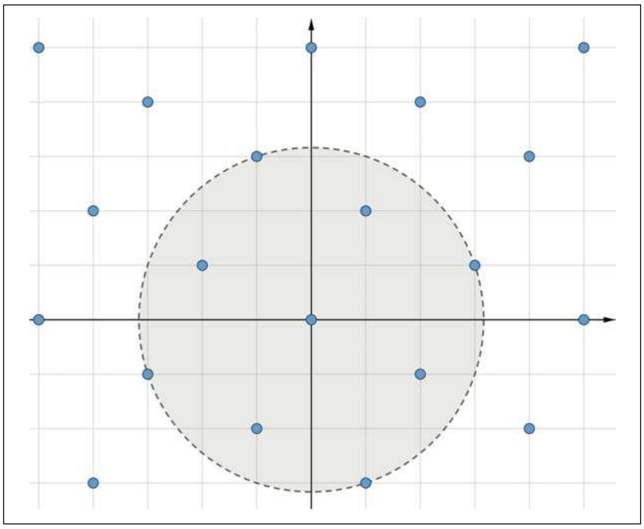
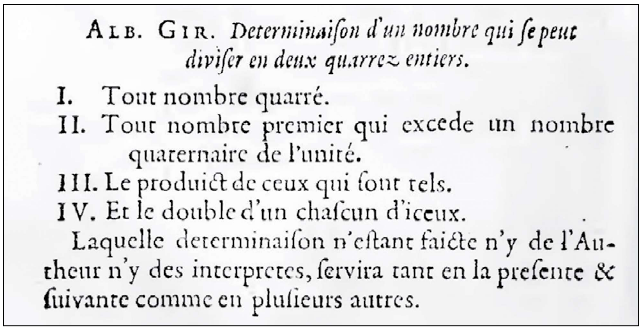


Figura 5. Ilustração da demonstração do Teorema 6 no caso p=5 e u=2.



ALB. GIR. *Determinaiſon d'un nombre qui ſe peut diviſer en deux quarrez entiers.*

I. Tout nombre quarré.
II. Tout nombre premier qui excede un nombre quaternaire de l'unité.
III. Le produict de ceux qui ſont tels.
IV. Et le double d'un chaſcun d'iceux.

Laquelle determinaiſon n'eſtant faicte n'y de l'Autheur n'y des interpretes, ſervira tant en la preſente & ſuivante comme en pluſieurs autres.

Figura 6. A conjetura de Girard na edição de 1625 de L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges, anotada por Girard.[3]

$(a, b) \in \mathcal{B}_p \setminus \{(0,0)\}$, temos

$$0 < a^2 + b^2 < 2p. \tag{6}$$

Combinando (5) e (6), vemos que temos de ter a igualdade $a^2 + b^2 = p$. □

O matemático francês Albert Girard (1595-1632) terá sido o primeiro a conjeturar este teorema em 1625 (cf. figura 6). A primeira prova conhecida foi publicada por Euler. Pelo meio, Fermat já havia afirmado ter uma prova completa, numa carta a Mersenne datada do dia de Natal de 1640 [4].

Também foi provado por Euler que a decomposição de um número primo p como soma de quadrados, a existir, é única, no seguinte sentido: se $p = x^2 + y^2 = z^2 + t^2$, com $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, $x \leq y$ e $z \leq t$, então $(x, y) = (z, t)$. Keith Conrad propõe num seu manuscrito uma prova geométrica com reticulados [2].

É frequente encontrar-se na literatura uma prova não geométrica eficiente, devida ao norueguês Axel Thue (1863-1922), da existência e unicidade da decomposição $p = x^2 + y^2$ quando p é um primo da forma $4k + 1$ $(x, y, k \in \mathbb{N})$ [4].

5. MAIS DOIS PROBLEMAS

Terminamos com mais dois problemas, nos quais é pertinente aplicar o Teorema de Minkowski.

Problema 2. Seja p um primo. Mostre que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $p = x^2 + 2y^2$ se e só se $p = 2$, $p \equiv_8 1$ ou $p \equiv_8 3$.

Algumas sugestões para a resolução deste problema:

- Use o seguinte resultado: se p é um primo ímpar, então -2 é um resíduo quadrático módulo p se e só se $p \equiv_8 1$ ou $p \equiv_8 3$.
- Use o seguinte facto: a área da região delimitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ (onde $a, b > 0$) é igual a πab.

Uma solução deste e doutros problemas semelhantes encontra-se no livro de Jones & Jones [5].

Problema 3. (Olimpíadas polacas) Sejam a, b, c inteiros positivos tais que $ac = b^2 + b + 1$. Prove que a equação $ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1$ tem soluções inteiras.

Uma solução deste problema recorrendo ao Teorema de Minkowski aparece no 13.º capítulo do livro de Andreescu & Dospinescu [3].

REFERÊNCIAS

[1] *https://artofproblemsolving.com/community/c6h42531p269131.*

[2] *https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Picksumofsq.pdf*

[3] T. Andreescu and G. Dospinescu. *Problems from the Book*. XYZ Press, 2010.

[4] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill, 7th edition, 2011.

[5] Gareth A. Jones and J. Mary Jones. *Elementary Number Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1998.

[6] C. D. Olds, Anneli Lax, and Giuliana P. Davidoff. *The Geometry of Numbers*, volume 41 of *Anneli Lax New Mathematical Library*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000. Appendix I by Peter D. Lax.

[7] José Carlos Santos. "O Espaço-tempo". *Gazeta de Matemática*, (179):26–28, 2016.

[3] Imagem de um excerto de uma cópia de *L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges*, de domínio público, disponível na *Thomas Fisher Rare Book Library*, cf. *https://archive.org/details/larithmetiqvedes00stev/page/622/mode/2up?view=theater*.

Gazeta de Matemática

TABELA DE PUBLICIDADE 2024

Características Técnicas da Revista

Periodicidade: Quadrimestral
Formato: 20,2 x 26,6 cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

Condições Gerais:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

Contactos

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

Especificações Técnicas:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4 mm

Localizações Específicas:

Verso capa: 1240€
Contracapa: 1100€
Verso contracapa: 990€

	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.