Alfredo Costa
Universidade
de Coimbra
amgc@mat.uc.pt

QUATRO PROBLEMAS

Para recreio do leitor, selecionamos quatro problemas, propostos na Escola Delfos, que nos parecem de algum modo peculiares.

Neste *Canto Délfico* exibimos quatro problemas propostos na Escola Delfos da Universidade de Coimbra [1, 14]. O autor selecionou estes desafios com base no gosto pessoal e na perceção subjetiva de que têm algo de peculiar que os destaca de entre muitos outros problemas.

1. PARA ALUNOS DO 9.º ANO?

O primeiro problema selecionado fez parte da final de 2011 das Olimpíadas Italianas de Matemática [2]. Por mais do que uma vez, foi proposto aos alunos da Escola Delfos.

Problema 1. *Determine todas as soluções (p, n) da equação*

$$n^3 = p^2 - p - 1$$

tais que p é um número primo e n é um inteiro.

Numa das anteriores versões do sítio *web* da Escola Delfos, este desafio surgia em destaque na página de acolhimento.

Não obstante o problema ser difícil, mesmo para alunos do 12.º ano, os conhecimentos escolares em 2011 de um aluno do 9.º ano da escolaridade obrigatória portuguesa seriam suficientes para obter a solução oficial. Já não é assim, uma vez que a fórmula geral resolvente da equação do segundo grau não faz parte da versão atual das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 9.º de escolaridade [3].

Este problema destaca-se pela simplicidade e pela beleza do seu enunciado, não obstante o seu carácter técnico, e pela conciliação entre uma estimulante dificuldade e o carácter elementar da solução. É uma combinação desejável. O leitor encontra na página *web* das Olimpíadas Italianas de Matemática a respetiva solução oficial [2].

2. UM ANTEGOSTO DE CÁLCULO

O próximo problema saiu na 14.ª Competição Nacional Croata de Matemática, em 2005. Foi proposto na Jornada de 18 de março de 2017 da Liga Delfos, ano em que participaram cinco equipas na Liga (para mais informações sobre a Liga Delfos, leia-se o *Canto Délfico* do mesmo autor publicado no verão de 2023 [9]).

Problema 2. *A sucessão $(a_n)_{n\geq 1}$ define-se recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_n = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + 1$ para $n \geq 2$. Determine o mais pequeno número real M tal que*

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M$$

para qualquer inteiro positivo m.

O escritor destas linhas recorda-se de que, pelo menos, uma equipa resolveu bem o problema, de forma concisa e elegante. No Fórum *web* da escola de enriquecimento curricular Art of Problem Solving [4] encontra-se uma solução [5].

Este estimulante exercício também foi proposto a alunos de um curso de Cálculo, numa edição em que o autor colaborou.

3. A EQUAÇÃO DE MORDELL

O dicionário Merriam-Webster define uma equação *diofantina* como uma equação polinomial de coeficientes inteiros para a qual procuramos apenas soluções inteiras [6]. O nome dado a este tipo de equações homenageia o matemático helenístico Diofanto de Alexandria, do século III. A redescoberta da sua obra *Aritmética* na Idade Moderna deu um novo impulso à Teoria dos Números, em parte graças à tradução de Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) publicada em 1621 (cf. figura 1) [15]. Um dos problemas abordados nesse livro reduz-se ao estudo da equação diofantina $y^2 = x^3 - 2$, que mereceu a atenção do próprio Bachet. Influenciado pela leitura da tradução de Bachet, Pierre de Fermat (1601-1665) propôs-se provar pelo método da descida infinita [10] que $(x, y) = (3, 5)$ é a sua única solução em inteiros positivos, tendo Leonhard Euler (1707-1783) publicado a primeira demonstração de que efetivamente $(3, 5)$ e $(3, -5)$ são as únicas soluções inteiras [12].

O problema seguinte tem, pois, antigos e nobres antepassados. Apareceu num teste da Escola Delfos, destinado à seleção e a preparação para as competições internacionais de matemática. Foi posteriormente repescado nalgumas fichas de trabalho. Mesmo para os olímpicos experientes, revelou-se um desafio formidável.

Problema 3. *Determine o conjunto dos pares de inteiros* (x, y) *tais que* $y^2 = x^3 + 23$.

Dizemos desde já que o conjunto procurado é vazio. Permanece o desafio de provar que assim é.

O problema foi escolhido como estimulante da criatividade e da destreza no uso de ferramentas elementares sobre resíduos quadráticos, aprendidas em cursos de preparação olímpica. No Teorema 9.12 do livro de Apostol [7] exemplifica-se o potencial destas ferramentas básicas com a demonstração de que a equação $y^2 = x^3 + k$ não tem soluções no domínio dos inteiros se k é da forma $k = (4n - 1)^3 - 4m^2$, onde m e n são inteiros tais que não existe um primo p que simultaneamente divida m e seja tal que $p + 1$ é múltiplo de 4. Por exemplo, note-se que $23 = (4 \times 1 - 1)^3 - 4 \times 1^2$.

A equação diofantina $y^2 = x^3 + k$ é conhecida como *equação de Mordell* (por vezes também designada *equação de Bachet* ou de *Bachet-Mordell*), em homenagem aos importantes avanços no seu estudo feitos pelo matemático Louis Joel Mordell (1888-1972), norte-americano da Pensilvânia que adotou a cidadania britânica. Por exemplo,

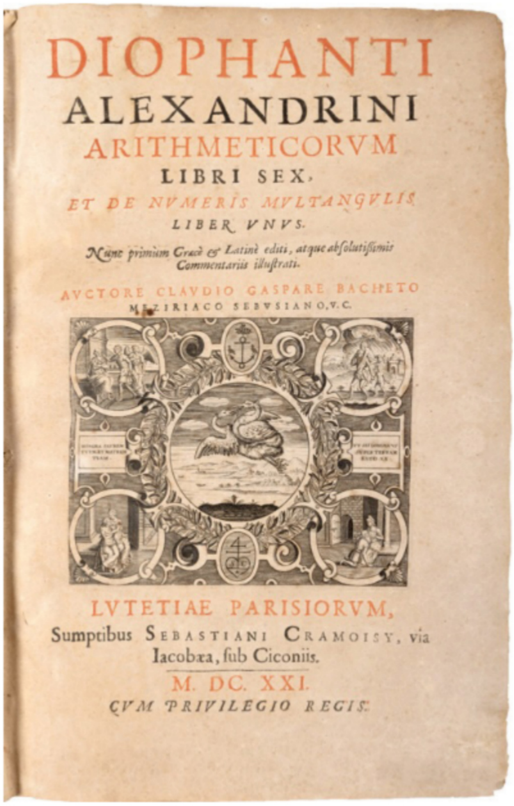

Figura 1. *Arithmeticorum Libri Sex*, tradução latina do original grego de Diofanto, por Claude Gaspard Bachet de Méziriac, 1621.[1]

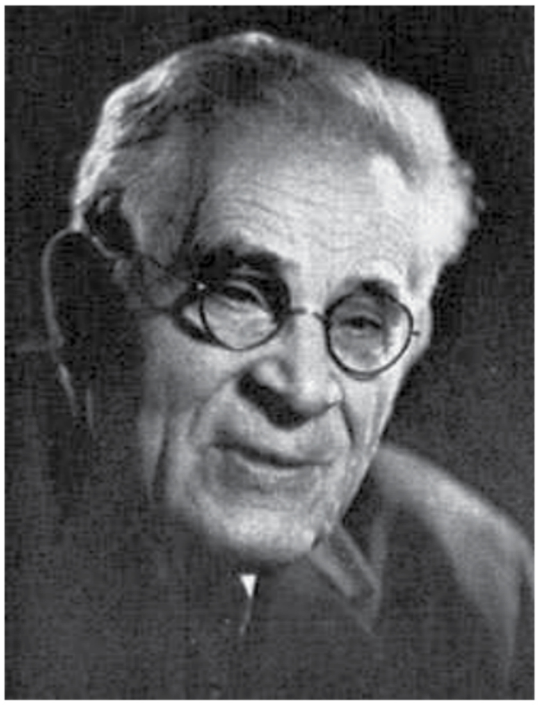

Figura 2. Louis Joel Mordell (1888-1972).[2]

Mordell demonstrou que, fixado o parâmetro k, a equação tem apenas um número finito de soluções. Os métodos que desenvolveu para estudar esta equação revelaram-se influentes. Como referência para o leitor, selecionamos na bibliografia dois artigos hodiernos e de fácil acesso na *internet* [8, 11]. O primeiro é um trabalho com novos avanços sobre a equação de Mordell, que começa por uma concisa contextualização histórica. O segundo é uma análise histórica dos trabalhos juvenis de Mordell sobre a equação com o seu nome, que inclui fascinantes informações sobre a sua maturação académica.

4. SUBTIS PROBABILIDADES

O último problema selecionado é retirado do livro *Técnicas de Resolução de Problemas*, de Steven G. Krantz, da secção do terceiro capítulo intitulada *Problemas Sofisticados de Probabilidades* [13]. Aí encontra-se uma solução completa.

Problema 4. *O Guilherme tem um saco opaco de berlindes, com um certo número de berlindes vermelhos e um certo número de berlindes azuis, sendo que tais números podem ser zero. O Guilherme convida o seu amigo Gustavo a retirar de olhos vendados um berlinde. O Gustavo retira um berlinde e mostra-o: é vermelho. O Gustavo retira um segundo berlinde, mas não o mostra. Com que probabilidade o segundo berlinde é vermelho?*

Nada sendo dito, fica implícito que estamos perante uma distribuição uniforme das probabilidades: não há viciação dos berlindes.

Este problema foi proposto num teste da Escola Delfos de início de ano letivo, e repescado alguns anos depois numa jornada da Liga Delfos. Algo atípico no contexto do Delfos, causou alguma divertida perplexidade.

REFERÊNCIAS

[1] Delfos - Escola de Matemática para jovens, *https://www.uc.pt/fctuc/dmat/divulgacao/delfos*.

[2] Olimpiadi della Matematica, Finale Nazionale, *https://olimpiadi.dm.unibo.it/le-gare/gara-nazionale/*.

[3] Direção-Geral da Educação, Aprendizagens Essenciais de Matemática, *https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_9.o_ano.pdf*.

[4] Art of Problem Solving, *https://artofproblemsolving.com/*.

[5] Tópico do Fórum da Art of Problem Solving com endereço *https://artofproblemsolving.com/community/c6h148015p836865*.

[6] Dicionário online Merriam-Webster, entrada "Equação Diofantina", *https://www.merriam-webster.com/dictionary/Diophantine%20equation*.

[7] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[8] Michael A. Bennett e Amir Ghadermarzi. "Mordell's Equation: A Classical Approach". *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 18(1):633–646, 2015.

[9] Alfredo Costa. "Ternos Pitagóricos e Tijolos de Euler". *Gazeta de Matemática*, (200):13– 17, 2023.

[10] Alfredo Costa. "Descida Infinita e Criminosos Minimais". *Gazeta de Matemática*, (205):8–13, 2025.

[11] Sébastien Gauthier and François Lê. "On the Youthful Writings of Louis J. Mordell on the Diophantine Equation $y^2 - k = x^3$". *Archive for History of Exact Sciences*, 73(5):427–468, 2019.

[12] Catherine Goldstein. "Descente Infinie et Analysediophantienne: Programmes de Travail et Mises en Œuvre Chez Fermat, Levi, Mordell et Weil". In *Analyse Diophantienne et géométrie Algébrique*, volume 3 de *Cahiers Sém. Hist. Math. Sér.* 2, 25–49. Univ. Paris VI, Paris, 1993.

[13] Steven G. Krantz. *Techniques of Problem Solving*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[14] Jorge Neves. "Canto de Aniversário". *Gazeta de Matemática*, (179):9–10, 2016.

[15] Oystein Ore. *Number Theory and Its History*. Dover Publications, Inc., New York, 1988. Reimpressão do original de 1948, com suplemento.

[1] *Domínio público, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-cover.png\#file*

[2] *Foto de mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mordell/pictdisplay/*