Números de Catalan

Os números de Catalan, chamados assim em homenagem a Eugène Charles Catalan, matemático Belga do século XIX, aparecem em inúmeros problemas de contagem. Há várias definições equivalentes destes números. Adotaremos aquela que diz que os números de Catalan, $C_0, C_1, \ldots, C_n \ldots$, contam o número de *árvores binárias com raiz* com $n+1$ folhas. Aquilo que em combinatória se designa por árvore com raiz pode ser descrito como uma árvore genealógica de uma família de seres de uma espécie hermafrodita. No topo está o vértice raiz, o ser que deu origem à família, e em cada nível seguinte representam-se os vértices da geração seguinte; a árvore diz-se binária se de uma geração para a outra cada ser dá origem a nenhum ou exatamente dois seres da geração seguinte. Os vértices sem descendência chamam-se folhas.

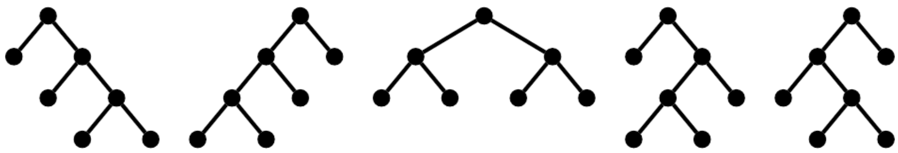

Figura 1: Ávores binárias com $3+1$ folhas.

Notemos que para definir uma árvore binária com raiz damos importância à ordem como estão dispostas as gerações. É que, como grafos, as duas primeiras árvores e as duas últimas são todas equivalentes entre si.

1. Determinem todas as árvores binárias com raiz com $1, 2, 3$ e 5 folhas.

2. Partindo da definição, mostrem que para $n \geq 1$ se tem $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$.

Uma sequência de parêntesis $\mathcal{P} = (()(()\cdots))$ diz-se admissível se os parêntesis estiverem corretamente formados. Por exemplo, "$(()())$" é uma sequência de parêntesis admissível enquanto que "$)()()($" ou "$()))(($" não são. Os números de Catalan também podem ser definidos como o número de sequências admissíveis de n pares de parêntesis.

v.s.f.f.

Jorge Neves delfos@mat.uc.pt

Para ver que assim é basta estabelecer uma bijeção entre o conjunto de árvores binárias com raiz com $n+1$ folhas e o conjunto de sequências admissíveis de n pares de parêntesis. Esta bijeção, que designaremos por φ_n, pode ser definida indutivamente da forma que passamos a explicar. Para $n = 0$ os conjuntos em questão são singulares. A sequência de parêntesis é vazia, $\mathcal{P}_0 = \emptyset$, e a árvore com 1 folha é $\mathcal{A}_0 = \bullet$. Estabelece-se $\varphi_0\mathcal{A}_0 = \mathcal{P}_0$. Seja agora $n > 0$ e $\mathcal{A}$ uma árvore com $n+1$ folhas. Então existem $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{A}^\dagger$ árvores com r e s folhas, respetivamente, com $r+s = n+1$, tais que $\mathcal{A}^*$ emana do lado esquerdo da raiz enquanto que $\mathcal{A}^\dagger$ do lado direito. Estabelecemos $\varphi_n\mathcal{A} = (\varphi_r\mathcal{A}^*)\varphi_s\mathcal{A}^\dagger$.

3. Usando indução completa, mostrem que φ_n está bem definida e tem inversa.

4. Um *caminho* em $\mathbb{Z}^2$ é uma sucessão finita de pontos de $\mathbb{Z}^2$ considerando-se também os segmentos que unem pontos consecutivos. Um *caminho de Dyck* é um caminho em $\mathbb{Z}^2$ que parte do ponto $(0,0)$, termina no ponto $(2n,0)$ e em que cada ponto é obtido do anterior adicionando-lhe ou $(1,1)$ ou $(1,-1)$, de forma a que, globalmente, o caminho não passe abaixo do eixo dos xx'. (O caminho pode tocar o eixo dos xx', eventualmente, noutros pontos para além dos seus extremos.) Mostrem que C_n conta o número de caminhos de Dyck entre $(0,0)$ e $(2n,0)$.

5. Mostrem que C_n é igual ao número de triangulações de um polígono convexo com $n+2$ vértices usando $n-1$ diagonais que não se intersetam no interior do polígono.

6. Mostrem que C_n é igual ao número de maneiras de ligar $2n$ pontos de uma reta do plano usando n arcos de semi-circunferência que não se intersetem e que fiquem todos de um dos lados da reta.

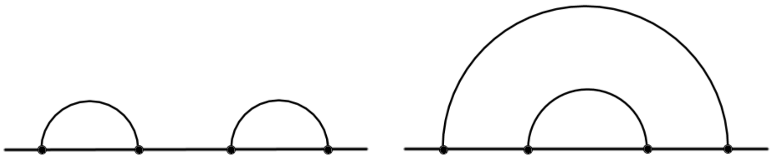

Figura 2: Arcos ligando 4 pontos de uma reta.

7. Mostrem que $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.