Polinómios

$$x^{21}+210x^{20}+20615x^{19}+1256850x^{18}+53327946x^{17}+1672280820x^{16}+40171771630x^{15}+756111184500x^{14}+11310276995381x^{13}+135585182899530x^{12}+1307535010540395x^{11}+10142299865511450x^{10}+63030812099294896x^{9}+311333643161390640x^{8}+1206647803780373360x^{7}+3599979517947607200x^{6}+8037811822645051776x^{5}+12870931245150988800x^{4}+13803759753640704000x^{3}+8752948036761600000x^{2}+2432902008176640000x$$

Bem vindos a mais uma bela prova desta bela competição. Temos hoje um belo tema: polinómios. Podem não saber, mas os polinómios são provavelmente o meu objeto matemático preferido. Não há nada melhor que um bom polinómio com um grau alto e muitos, muitos termos. E se for antes um sistema de polinómios de muitas variáveis ainda melhor. Assim, para vos premiar o esforço e a dedicação, presenteio-vos hoje com uma bela jornada polinomial, para todos poderem apreciar ao vivo a beleza dos bichos em causa. Afinal de contas o binómio de Newton, o tal que é tão belo como a Vénus de Milo, é ele próprio um polinómio, e malgrado Pessoa, nem sequer é dos melhores.

Parte I

Onde se apresenta o Teorema Fundamental da Álgebra, e o usamos fundamentalmente para fundamentar a fundo os fundamentos de quatro belos problemazitos bem fundados.

A primeira coisa a saber sobre polinómios é que eles são incríveis, impressionantes e fabulosos. A segunda coisa a saber sobre polinómios é o Teorema Fundamental da Álgebra. Caso o nome não o deixe bem claro, este é o teorema mais fundamental da álgebra (apesar de não ter demonstrações puramente algébricas). Existem muitas maneiras equivalentes de o formular, mas essencialmente ele diz que dado um polinómio de uma variável e grau d, ele tem exactamente d raízes, se contarmos raízes complexas e raízes múltiplas. Mais concretamente, todo o polinómio $p(x)$ pode ser escrito de forma única (a menos da ordem) como

$$p(x)=c(x-r_1)(x-r_2)...(x-t_k)((x-a_1)^2+b_1^2)((x-a_2)^2+b_2^2)...((x-a_l)^2+b_l^2)$$

onde $r_1,...,r_k$ são as raízes reais e $a_1\pm b_1 i,...a_l\pm b_l i$ as raízes complexas. Para quem nunca viu números complexos, não se preocupem, não serão importantes para os exercícios de hoje (ou então sim, quem sabe?).

Uma primeira consequência trivial deste Teorema é que se um polinómio de uma variável de grau menor ou igual a d tiver mais de d raízes então é o polinómio nulo.

1. Encontra todos os polinómios $p(x)$ com coeficientes reais que verificam $p(x+1)=p(x)+2x+1$.
2. Encontra todos os polinómios $p(x)$ com coeficientes reais que verificam $p(p(x))=(x^2+x+1)p(x)$.
3. Seja $p(x)=x^2+rx+s$ um polinómio de coeficientes reais. Suponhamos que p tem duas raízes reais, ambas menores que -1 e com a diferença entre as duas menor que 2. Mostra que $P(P(x))>0$ para todo o x real.

4. Mostra que para todos os polinómios $p(x)$ que são positivos para $x \geq 0$, podemos encontrar um inteiro positivo n tal que $(1+x)^n p(x)$ só tem coeficientes positivos.

   Sugestão: Começa por mostrar que basta provar o caso de polinómios quadráticos sem raízes reais, usando os resultados acima.

   Nota: Isto de facto é um caso particular de um resultado que é válido para mais que uma variável: o Teorema de Pólya, um dos meus resultados preferidos. Na presente encarnação pode ser encontrado numa shortlist de uma certa prova internacional cujo nome rima com primo.

Parte II

Onde visitamos mais dois factos basilares na polionómica olímpica (não procurem no dicionário) e os usamos para resolver mais três polionómicos enigmas olímpicos de inegável polinomialidade. Apreciem.

Outros factos triviais sobre polinómios tendem a aparecer constantemente em provas olímpicas. Como prenda aqui vão dois dos mais simples.

- **Fórmulas de Vieta:** Dado um polinómio $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_1 x + a_0$ então a soma de todas as suas raízes é $-a_{d-1}$ e o produto é $(-1)^d a_0$.

  Esboço de prova: Isto é válido quer as raízes sejam reais ou complexas e é uma consequência imediata da factorização do polinómio em termos da forma $(x - r_1)...(x - r_d)$ onde or r_i são as ráizes reais ou complexas.

  Mais geralmente $(-1)^k a_{d-k}$ é a soma de todos os produtos possíveis de k raízes de $p(x)$.

- **Lema de divisibilidade:** Para a e b inteiros e p um polinómio qualquer de coeficientes inteiros, temos que $b - a$ divide $p(b) - p(a)$.

  Esboço de prova: Isto é extremamente simples de verificar. Basta notar que $b - a$ divide $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + ... + ba^{n-2} + a^{n-1})$ para todo o n.

5. O Barão de Munchausen (um parente Nórdico afastado do Barão do Monte) apresentou um novo teorema. Se um polinómio $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + ...$ tiver n soluções inteiras positivas então existem a retas no plano que se intersectam em b pontos distintos. Será o Teorema do Barão verdadeiro?

6. Encontra o menor inteiro positivo M com a seguinte propriedade: Para cada escolha de inteiros a, b, c existe um polinómio $P(x)$ com coeficientes inteiros tal que $P(1) = aM$ e $P(2) = bM$ e $P(4) = cM$.

7. Sejam a, b e c as raízes do polinómio $x^3 - (k+1)x^2 + kx + 12$ onde k é um número real. Se $(a-2)^3 + (b-2)^3 + (c-2)^3 = -18$ descobre k.