As Torres de Hanói

São dados três suportes A, B e C. No suporte A estão encaixados n discos cujos diâmetros, de baixo para cima, estão em ordem decrescente. O jogo das torres de Hanói consiste em transferir todos os discos do suporte A para o suporte B, usando o suporte C como auxiliar, de modo a que, durante a operação, nenhum disco maior fique sobre um menor.

1. Joguem o jogo de Hanói para com $n = 4$ discos tentando encontrar uma sequência de jogadas com o menor número de movimentos possíveis.

2. Mostrem que é possível terminar um jogo com n peças com $2^n - 1$ movimentos.

Nos exercícios seguintes supõe-se que se joga um jogo com um número mínimo de movimentos.

3. Suponham que numeramos as peças do jogo de 1 a n começando pela peça da base e progredindo na direcção ascendente. Para cada r pertencente ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, calculem o número de vezes que a peça r é movida.

4. Descrevam a sucessão cujo termo de ordem k é o número da peça que está a ser movida no movimento k, i.e. cujo primeiro termo é a peça movida no primeiro movimento, o segundo termo é a peça movida no segundo movimento, etc.

5. Num jogo com 11 peças, que peça está a ser movida no movimento 2005?

6. Num jogo com 11 peças, que peça está a ser movida no movimento 2006?

7. Determinem uma fórmula para os sucessivos números de ordem em que a peça r é movida.

3-Grafos

Um 3-*grafo* é constituído por um conjunto de n vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e um conjunto de r faces, $\{\{v_{i_1}, v_{j_1}, v_{k_1}\}, \ldots, \{v_{i_r}, v_{j_r}, v_{k_r}\}\}$, (onde para cada a, os vértices v_{i_a}, v_{j_a} e v_{k_a} são distintos). Se um 3-grafo contém todas as faces possíveis, então diz-se *completo*.

1. Representem geometricamente:
   (a) um 3-grafo com 2 vértices;
   (b) um 3-grafo com 4 vértices e 2 faces;
   (c) um 3-grafo com 4 vértices e 3 faces;
   (d) um 3-grafo com 4 vértices e 4 faces.
2. Calculem o número de faces de um 3-grafo completo com n vértices.
3. Seja G um 3-grafo com 5 vértices e 8 faces. Mostrem que existe um sub-3-grafo completo com 4 vértices (um tetraedro).
4. Seja G um 3-grafo com 5 vértices e 6 faces. Mostrem que existe um sub-3-grafo com 4 vértices e 3 faces.
5. Seja $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ um conjunto de números reais. Suponham que existem 7 subconjuntos formados por 3 números de entre eles cujo produto é 1. Mostrem que existe um número real não-nulo x tal que, possivelmente após reordenação, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x, x, x, x, \frac{1}{x^2})$.
6. Mostrem que, em qualquer coloração das faces de um 3-grafo completo com 7 vértices, existe pelo menos um tetraedro com 3 faces da mesma cor.
7. Recordem que $R(4,4)$ designa um número de Ramsey. Em particular, sabemos que vale a propriedade $\mathrm{Pint}(4,4)$ para qualquer grafo completo com um número de vértices superior ou igual a $R(4,4)$. [O valor de $R(4,4)$ é 18, mas não precisam de o saber!] Mostrem que, em qualquer coloração a duas cores de um 3-grafo com $R(4,4)+1$ vértices, existe sempre um tetraédro monocromático.

O Princípio do Elemento Extremo

Em matemática, algumas vezes trabalhamos com conjuntos cujos elementos parecem estar relacionados por alguma relação de equivalência e cujas propriedades conhecidas são poucas. Uma estratégia poderosíssima em tais casos é considerar a existência de elemento, ou elementos, que de alguma forma são extremos. Por exemplo, quando consideramos um conjunto infinito de números naturais, o elemento extremo é seu menor elemento. Para um conjunto finito de números reais os elementos extremos são o máximo e o mínimo do conjunto. Em muitos casos é fundamental o conhecimento de um elemento extremo, pois das suas propriedades adicionais podemos obter propriedades sobre o conjunto total.

1. Sejam $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ os ângulos de um triângulo. Mostrem que $\gamma \geq \pi/3$.
2. Considerem o n-úplo de números reais, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e denotem a sua soma por s. Mostrem que $a_1 \leq s/n$ e que $a_n \geq s/n$.
3. Considerem seis pontos num plano tais que quaisquer três deles não são colineares. Mostrem que três desses seis pontos formam um triângulo que possui um ângulo interno de amplitude maior ou igual a $2\pi/3$.
4. Em cada quadrado de um tabuleiro com infinitas linhas e colunas, escreve-se um número natural. O número escrito em cada quadrado é igual à média aritmética dos números escritos em todos os quadrados, diferentes desse quadrado, e que partilham um lado com ele. Provem que todos os números escritos são iguais.
5. Provem que não existem inteiros positivos x, y, z e t tais que $x^2+y^2 = 3(z^2+t^2)$.
6. Pergunta: Existirá uma função $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ que satisfaça
$$\underset{n>1}{\forall} \quad f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))\,?$$
7. Considera $n > 3$ pontos num plano tais que a área de qualquer triângulo formado por quaisquer três desses pontos não excede 1. Provem que existe um triângulo (com vértices possivelmente não contidos no conjunto de pontos inicial) de área menor ou igual a 4 e que contém todos os pontos do conjunto inicial.

A Função φ de Euler.

Uma função definida no conjunto dos inteiros positivos que toma valores reais designa--se por *função aritmética*. Se uma função aritmética $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ é tal que

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

sempre que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, então f diz-se *multiplicativa*.

1. Mostrem que se f é multiplicativa então ou $f \equiv 0$ ou $f(1) = 1$.

2. Seja f uma função multiplicativa. Mostrem $g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \qquad \forall_{n\in\mathbb{Z}^+}$$

   é uma função multiplicativa. [A soma é sobre todos os divisores positivos de n.]

A *função de Möbius* é a função aritmética $\mu\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ definida por: $\mu(n) = 0$, se n for divisível por um quadrado perfeito, $\mu(p_1 \cdots p_k) = (-1)^k$, se $p_1, \ldots, p_k$ forem números primos distintos, e $\mu(1) = 1$. Evidentemente, μ é uma função multiplicativa.

3. Mostrem que se $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ for multiplicativa e $g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ for definida por $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, então vale a *fórmula de inversão de Möbius*:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

A imagem de um inteiro positivo, n, pela *função de Euler* $\varphi\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ é o número de de naturais entre $1, 2, \ldots, n$ que são primos com n.

4. Calculem $\varphi(21)$, $\varphi(p)$ e $\varphi(p^2)$ (com p um número primo).

5. Mostrem que $\varphi(p^a q^b) = p^a q^b \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$.

6. Mostrem que φ é multiplicativa.

7. Mostrem que

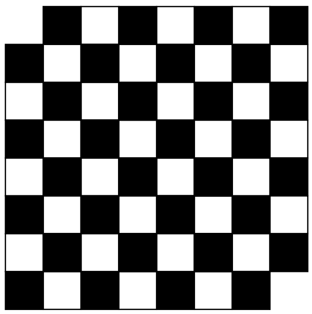
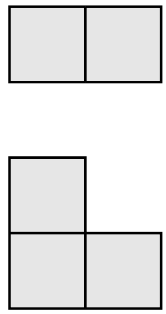
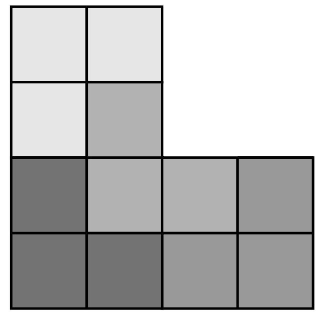
$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

O Problema do Calendário

Um ano solar contém 365.242199 dias solares. Sendo uma quantidade não-inteira, é necessário que se lhe coadune a duração do ano civil. Que a história ocidental se recorde, tal foi feito pela primeira vez no século I a.C. O imperador romano *Julius Caesar* determinou que a seguir a três anos com 365 dias viria sempre um de 366 dias. Mais tarde, aquando da introdução da cronologia cristã, os anos com 366 dias foram designados *bissextos* e passaram a corresponder aos anos múltiplos de 4. Este *calendário* é conhecido por *calendário juliano*. Todavia, a fórmula que usamos actualmente para determinar os anos bissextos, e que encerra em si uma correcção ao calendário juliano, diz que os anos múltiplos de 100, que não sejam múltiplos de 400, não são bissextos. Esta regra foi decretada por Gregório XIII, que pontificou de 1572 a 1585. Ela é conhecida como a solução do *problema do calendário* e em honra daquele papa o nosso *calendário* ainda hoje é designado por *calendário gregoriano*.

1. Expressem 365.242199 na forma: "365 dias, x horas, y minutos e z segundos".
2. Representem o número 365.2422 em fracção contínua.
3. Determinem (em forma de fracção) a parte fraccionária das aproximações de 365.2422 pelas quatro primeiras reduzidas da sua fracção contínua.
4. Comparem a fracção $\frac{97}{400}$ com as fracções calculadas anteriormente e o erro cometido na aproximação do número 0.2422. Estabeleçam a fórmula decretada pelo Papa Gregório XIII, para solução do problema do calendário.
5. A revolução dos bolcheviques deu-se na noite de 6 para 7 de Novembro de 1917. No entanto, foi baptizada "Revolução de Outubro" uma vez que naquela altura ainda vigorava na Rússia o calendário juliano. Determina que noite de Outubro era na Rússia quando se deu esta revolução.
6. Em que dia da semana, sábado ou domingo, o dia de ano novo ocorre mais vezes? [Dica: Basta analisar um período de 400 anos.]
7. Determina o dia da semana em que o dia 13 de cada mês ocorre mais vezes.

L-minós

1. Considerem o quadriculado 8×8 da figura à qual foram retiradas as quadrículas de dois cantos diagonalmente opostos. Mostrem que não é possível cobri-lo com dominós, de forma a que cada dominó coincida com duas quadrículas adjacentes do quadriculado e nenhuma quadrícula deste fique descoberta.

2. Considerem o *L-minó*, que se obtém justapondo três quadrados em forma de L. Determinem uma coloração (de necessariamente mais do que três cores) de um quadriculado 3×3, de forma a que qualquer que seja o modo como se coloque um L-minó alinhado com três das suas quadrículas, essas quadrículas sejam de cores diferentes. (Podem (e devem!) usar letras para as cores.)

3. Mostrem que não é possível cobrir um quadriculado 3×3 com L-minós.

4. Será possível cobrir um quadriculado 5×3 com L-minós?

5. Mostrem que existe uma forma de cobrir um quadriculado 5×9 com L-minós.

6. Que condição têm de cumprir m e n para que seja possível cobrir um quadriculado $m \times n$ com L-minós?

7. O L-minó é um *réptil*. É assim pois é possível obter um L-minó *maior* (v. figura) encaixando 4 L-minós mais pequenos. [A designação *réptil* vem do inglês "reptile = reproducing+tile", ou seja, azulejo auto-reprodutor.] Seja k um inteiro ≥ 2. Mostrem que é possível obter um L-minó encaixando k^2 L-minós mais pequenos.

Jorge Neves — delfos@mat.uc.pt

O operador de diferenças Δ

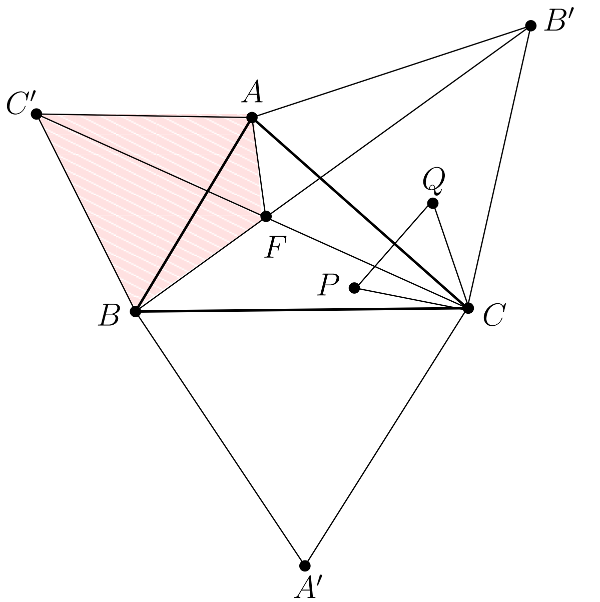
O operador Δ transforma uma sucessão de números reais (u_n) numa nova sucessão, que se denota (Δu_n) e cujo termo geral é $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Por outras palavras, se $(u_n) \equiv (u_1, u_2, u_3, \dots)$, então $(\Delta u_n) \equiv (u_2 - u_1, u_3 - u_2, u_4 - u_3, \dots)$. Denotamos por $(\Delta^2 u_n)$ a sucessão que se obtém aplicando Δ a (u_n) e de seguida, aplicando Δ a (Δu_n). Em geral, denotaremos por $(\Delta^r u_n)$ a sucessão $\left(\underbrace{\Delta(\Delta(\Delta(\cdots\Delta}_{r \text{ vezes}} u_n)\cdots))\right)$.

1. Mostrem que se $(\Delta u_n) \equiv (0)$ então (u_n) é constante.
2. Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões de números reais e α e β dois números reais. Mostrem que $(\Delta(\alpha u_n + \beta v_n)) \equiv (\alpha \Delta u_n + \beta \Delta v_n)$.
3. Suponham que $u_1 = 0$ e que $(\Delta u_n) \equiv (4n - 1)$. Calculem (u_n).
4. Seja (u_n) uma sucessão. Mostrem que se existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(\Delta^r u_n) \equiv (0)$ então existem $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tais que
$$(u_n) \equiv (\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{r-1} n^{r-1}).$$

O operador Δ pode ser utilizado em contextos ligeiramente mais variados do que aquele das sucessões de números reais. Tentem aplicá-lo nos seguintes problemas:

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a $f(x + y) = x + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e tal que $f(0) = 2$. Determinem $f(2005)$.
6. Seja f uma função real de variável real tal que, para todo o número real x, $f(x) + f(x - 1) = x^2$. Suponham que $f(19) = 94$ e determinem $f(2005)$.
7. Problema de Steiner: Determinem o maior número de partes em que o espaço tridimensional pode ser dividido por um número n de planos.

O centro de Fermat



Dado um triângulo ABC (que para simplificar vamos supor acutângulo) determinamos os pontos A', B' e C' como terceiros vértices de três triângulos equiláteros construidos no exterior de cada lado de ABC e tendo como base um dos seus lados. Seja F o ponto de intersecção de $C'C$ com BB'; que se designa por *centro de Fermat* do triângulo ABC.

1. Mostrem que o triângulo ABB' é congruente com CAC'.

2. Mostrem que passa uma circunferência pelos vértices do quadrilátero $AFBC'$.

3. Mostrem que as rectas AA', BB' e CC' são concorrentes.

4. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC e denotem por Q o ponto que se obtém rodando P por um ângulo de $-\frac{\pi}{3}$ em torno de C. Mostrem que

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} \geq \overline{B'Q} + \overline{BP} + \overline{PQ} \geq \overline{BB'}$$

5. Mostrem que o centro de Fermat é o ponto P que minimiza $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$.

6. Mostrem que as três circunferências que circunscrevem os triângulos ABC', ACB' e CBA' intersectam-se no centro de Fermat.

7. Recordem que o baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção das suas medianas. Mostrem que o triângulo cujos vértices são os baricentros dos triângulos ABC', ACB' e CBA' é equilátero.