



Princípio do Pombal

Como todos sabemos, o princípio do pombal diz que se num pombal com m casas há $m + 1$ pombos então de certeza pelo menos uma casa tem dois pombos. A versão aritmética do princípio do pombal diz que se $a_1, \dots, a_m$ são inteiros não negativos com $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ e $n > rm$, então existe i tal que $a_i \geq r + 1$.

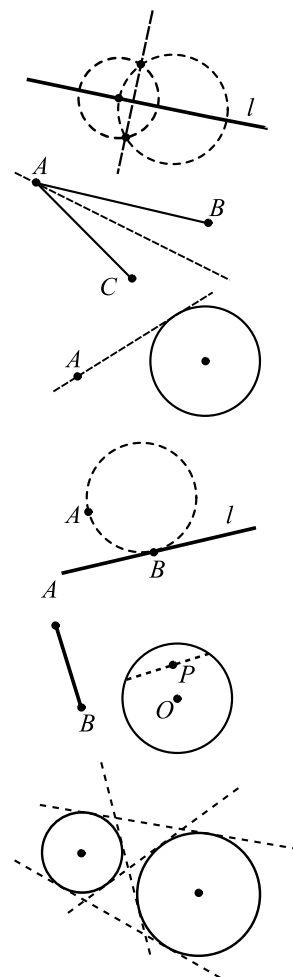
1. Demonstrem a versão aritmética do princípio do pombal.
2. Mostrem que entre os primeiros 2007 elementos da sucessão $7, 77, 777, 7777, \dots$ existe um que é múltiplo de 2007.
3. Foram colocadas 200 bolas em 100 caixas, de tal maneira que nenhuma caixa tem mais de 100 bolas nem menos de 1 bola. Mostrem que existem duas caixas que juntamente contêm exactamente 100 bolas. [enunciado incorrecto]
4. Suponham que cada um dos pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano foi pintado com uma de seis cores. Mostrem que existe um rectângulo cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras da mesma cor.
5. Considerem um subconjunto de $n + 2$ números de $\{1, 2, \dots, 3n\}$. Mostrem que existem dois números nesse subconjunto cuja diferença está entre n e $2n$.
6. Considerem um conjunto de 9 inteiros positivos cujos divisores primos pertencem a $\{2, 3, 5\}$. Mostrem que existem dois elementos deste conjunto cujo produto é um quadrado perfeito.
7. Considerem um conjunto de 99 inteiros positivos. Suponham que nenhum número neste conjunto tem um divisor primo maior que 9. Mostrem que existem 4 elementos deste conjunto cujo produto é uma potência quarta de um inteiro.



Régua e compasso

Esta prova é um concurso de construções no plano euclidiano com régua e compasso (e um lápis?). Em cada problema ganha a equipa que fizer a construção em questão com o menor número de passos. Por “passo” entende-se o desenho de um segmento de recta ou de um arco de circunferência. Não conta a escolha de pontos (ao acaso) ou a denotação das intersecções obtidas. E.g., dada uma recta l é possível construir uma perpendicular a l em 3 passos, da seguinte forma: *i*) desenhe-se uma circunferência com centro num ponto A em l ; seja B um ponto de intersecção dessa circunferência com l ; *ii*) desenhe-se uma circunferência com centro em B e raio suficientemente pequeno para que exista intersecção com a circunferência anterior; sejam C e D os pontos de intersecção; *iii*) desenhe-se a recta CD , que é uma perpendicular a l .

1. Comprovem a construção descrita acima.
2. Dado um ângulo $\angle BAC$ construam a sua bissectriz.
3. Dado um segmento AB construam o seu ponto médio.
4. Dado um círculo, o seu centro O , e um ponto A , no exterior do círculo, construam uma tangente ao círculo que passe em A .
5. Dado um ponto A , uma recta l e ponto $B \in l$, construam uma circunferência tangente a l em B que passe em A .
6. Dado um segmento AB , um círculo com centro O e um ponto P no interior do círculo, não supondo nada acerca da localização de AB , sempre que for possível, construam uma recta passando por P que determine no círculo uma corda congruente a AB .
7. Dados dois círculos e os seus centros, construam uma recta tangente a ambos os círculos.





Arranjos à mesa

N casais sentados a uma mesa circular para um longo jantar, decidem calcular a probabilidade de numa distribuição dos lugares à volta da mesa, que respeite apenas a regra de sentar homem ao lado de mulheres e vice-versa, nenhum dos elementos dos casais ficar sentado lado a lado com o seu cônjuge.

1. Suponham que $N = 2$. Qual é a probabilidade de tal acontecer?
2. Mostrem que se $N = 3$, então a probabilidade é $\frac{1}{6}$.
3. Mostrem que o número de maneiras de sentar N casais numa mesa circular, respeitando a regra mencionada acima, é $N!(N-1)!$.
4. Suponham novamente que $N = 3$. Seja x o número de arranjos em que os elementos do primeiro casal ficam lado a lado, y o número de arranjos em que os elementos do primeiro casal ficam lado a lado e em que os elementos do segundo casal ficam lado a lado (mas não necessariamente um casal ao lado do outro!) e, finalmente, z o número de arranjos em que para cada casal os seus elementos encontram-se sentados lado a lado. Mostrem que

$$N!(N-1)! = 12 = 2 + \binom{3}{1}x - \binom{3}{2}y + \binom{3}{3}z,$$

de duas maneiras: sem calcular x , y e z e calculando-os.

5. Generalizem. Seja x_i o número de arranjos em que do primeiro casal ao i -ésimo casal, os elementos de cada um destes casais encontram-se sentados ao lado um do outro. Mostrem que a probabilidade que queremos calcular é:

$$\frac{N!(N-1)! - \binom{N}{1}x_1 + \binom{N}{2}x_2 - \binom{N}{3}x_3 + \cdots + (-1)^N \binom{N}{N}x_N}{N!(N-1)!}$$

6. Calculem o x_N definido na questão anterior.
7. Mostrem que para $N = 4$ existe uma probabilidade de $\frac{1}{12}$ de, fartos do banal quotidiano, nenhum dos 8 comensais ficar lado a lado com o seu cônjuge.



Números raros

Seja N um inteiro positivo. Denotemos por $\pi(N)$ o número de primos menores ou iguais a N . A probabilidade de ao escolher um número ao acaso ele ser primo é muito baixa. De facto, qualquer definição sensata desta probabilidade remete esse valor para zero. No final desta prova terão demonstrado que $\pi(N)/N$ converge para zero quando N tende para infinito.

1. Calculem $\pi(100)$.

2. Mostrem que se p_1, p_2 e p_3 são três números primos então

$$\pi(N) \leq 3 + N - \left\lfloor \frac{N}{p_1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{p_2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{p_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_1 p_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_1 p_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_2 p_3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{p_1 p_2 p_3} \right\rfloor,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x .

3. Generalizem a fórmula da questão anterior para m números primos.

4. Mostrem que $\pi(2007) \leq 491$.

5. Seja $m = \left\lfloor \log_2 \sqrt{N} \right\rfloor$ e $p_1, \dots, p_m$ os m primeiros números primos. Mostrem que

$$\frac{\pi(N)}{N} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} + \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

[Sugestão: Há 2^{m-1} sinais de menos na fórmula com m primos da questão 3.]

6. Mostrem que $\frac{p_1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_m}{p_m - 1} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$.

7. Mostrem que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$ converge para infinito quando m tende para infinito e deduzam que $\frac{\pi(N)}{N}$ converge para zero quando N tende para infinito.



Elementar, Putnam!

1. **[2006]** A Ana e o Bruno devoram à vez um certo número de chocalatinhos de uma taça que tem, inicialmente, n chocalatinhos. Combinaram entre eles que o número de chocalatinhos que cada um pode devorar na sua vez tem de ser igual a um número primo menos 1. Começa a Ana a jogar. Mostrem que existem infinitos n para os quais o Bruno tem uma estratégia vencedora.
2. **[2005]** Mostrem que todo o inteiro positivo é a soma de um ou mais números da forma $2^r 3^s$, onde r e s são inteiros não negativos, tais que nessa soma nenhuma parcela divide outra.
3. **[2004]** Sejam m e n inteiros positivos. Mostrem que

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \frac{n!}{n^n}$$

4. **[2003]** Suponham que a, b, c, A, B, C são números reais, com $a \neq 0$ e $A \neq 0$, tais que $|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostrem que:

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|.$$

5. **[2002]** Dados cinco pontos numa esfera mostrem que pelo menos quatro deles pertencem a um mesmo hemisfério (incluindo o correspondente equador).
6. **[2001]** Seja S um conjunto com uma operação (binária) $\star$, i.e. dados $a, b \in S$, existe um elemento de S , que se denota por $a \star b$, resultado da operação $\star$ em (a, b) . Suponham que para quaisquer $a, b \in S$ tem-se $(a \star b) \star a = b$. Mostrem que então $a \star (b \star a) = b$ para quaisquer $a, b \in S$.
7. **[2000]** Mostrem que existem infinitos números inteiros não negativos n , tais que $n, n+1$ e $n+2$ são soma de dois quadrados perfeitos. [Por exemplo: $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$ e $2 = 1^2 + 1^2$]



Eixo radical

Quando alguém se lembrou da expressão *eixo do mal* para designar alguns países com políticas radicais, não podia usar *eixo radical* porque essa já tinha sido dada à recta que une os dois pontos de intersecção de duas circunferências secantes.

1. Demonstrem o teorema das cordas que diz que se AB e CD são duas cordas de uma circunferência que se intersectam em P (dentro da circunferência) então

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

2. E se P , definido na questão anterior, está sobre ou no exterior da circunferência?
3. Suponham que AB é uma corda de uma circunferência e P é um ponto entre A e B . Mostrem que

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = r^2 - d^2,$$

onde r é o raio da circunferência e d a distância de P ao centro da circunferência.

4. Sejam A e B dois pontos do plano e d um número real tal que $|d| \leq \overline{AB}^2$. Mostrem que o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = d,$$

é uma recta perpendicular à recta que suporta AB .

5. Sejam C_1 e C_2 os centros de duas circunferências de raios r_1 e r_2 , respectivamente, que se intersectam em A e B . Mostrem que o eixo radical coincide com o conjunto dos pontos P tais que

$$r_1^2 - \overline{PC_1}^2 = r_2^2 - \overline{PC_2}^2.$$

6. Considerem três circunferências secantes duas a duas cujos centros não são colineares. Mostrem que os três eixos radicais associados são concorrentes num ponto.
7. Generalizem. Definam plano radical de duas esferas do espaço. Mostrem que sob certas hipóteses (que devem explicitar) os seis planos radicais definidos por quatro esferas no espaço têm intersecção um ponto.



Grupos

Seja G um conjunto, cujos elementos podem ser números, letras, símbolos, etc. Suponham que existe uma operação binária, que denotaremos pelo símbolo $\star$, entre os elementos de G ; isto é, dado um par $(x, y) \in G \times G$, a operação $\star$ no par (x, y) devolve um elemento de G que denotamos por $x \star y$. Suponham também que $\star$ é associativa; i.e., $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ para quaisquer $x, y, z \in G$, não necessariamente distintos (cuidado que a ordem é importante!). Se dada uma operação associativa em G , existe um elemento $u \in G$ tal que $x \star u = u \star x = x$, para todo o $x \in G$, e tal que dado $y \in G$ existe z (que não tem de ser diferente de y) tal que $y \star z = u$ então G munido da operação $\star$ diz-se um *grupo*.

1. Seja G o conjunto das aplicações bijectivas do conjunto $\{1, 2, 3\}$ nele próprio. Mostrem que G munido da operação de composição de funções é um grupo.
2. Considerem o grupo definido na pergunta anterior. Determinem dois elementos de G , x e y tais que $x \star y \neq y \star x$.
3. Calculem o número de elementos de grupo definido na primeira questão.

Considerem agora um grupo qualquer, i.e., um conjunto G com uma operação associativa $\star$ que verifica as condições que mencionámos no início.

4. Mostrem que existe um e um só elemento de $u \in G$ que verifica as propriedades que mencionámos no início.
5. Mostrem que se $x, y \in G$ são tais que $x \star y = u$ então $y \star x = u$.
6. Mostrem que dado $x \in G$, o elemento y de G tal que $x \star y = y \star x = u$ é único.
7. Mostrem que se G é um grupo *finito* com um número par de elementos então existe um elemento $x \in G \setminus \{u\}$ tal que $x^2 = u$.



Olímpicas

1. Mostrem que para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existe um múltiplo de n cuja soma dos seus dígitos é n .
2. Determinem todos os pares de inteiros (a, b) tais que

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} = \sqrt{ab-1}.$$

3. Considerem um quadrilátero cíclico $ABCD$. Sejam E e F dois pontos das diagonais AC e BD , respectivamente, tais que $AF \perp CD$ e $DE \perp AB$. Mostrem que EF e BC são paralelos.
4. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos cuja soma é 1. Mostrem que

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}.$$

5. Sejam p, q dois números primos. Suponham que $q > 5$. Mostrem que se q divide $(2^p + 3^p)$, então $q > p$.
6. Determinem todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $y \in f(\mathbb{R})$ se tenha

$$f(x - y) = f(x) + xy + f(y)$$

7. Num triângulo acutângulo ABC , a altura ao vértice A intersecta o circuncírculo $\mathcal{C}$ no ponto D . Seja P um ponto pertencente a $\mathcal{C}$ e seja Q o pé da perpendicular da recta suporte a AB que passa em P . Mostrem que se Q não pertencer a $\mathcal{C}$ e $2\angle QPB = \angle PBC$, então os pontos D, P e Q são colineares.



Caminhos Eulerianos

Um grafo é dado por um conjunto finito V de *vértices* e, para cada dois vértices $x, y \in V$, um conjunto finito $A_{xy} = A_{yx}$ cujos elementos se designam *arestas*. Diz-se que as arestas de A_{xy} *incidem* em x e y . Se $x = y$ as arestas em A_{xx} também se designam *lacetes*. Um grafo que não tem lacetes e tal que $|A_{xy}| \leq 1$ diz-se *simples*. ($|B|$ designa o número de elementos de um conjunto finito B .) O grau de um vértice x é $\sum_{y \neq x} |A_{xy}| + 2|A_{xx}|$. Um *caminho* num grafo é uma sucessão de vértices e arestas, $x_0 e_1 x_1 e_2 x_2 \cdots e_r x_r$, em que $e_i \in A_{x_{i-1}x_i}$. Se $x_0 = x_r$ tal caminho diz-se *fechado* e se, adicionalmente, os restantes vértices do caminho são distintos então diz-se um *ciclo*. Um caminho fechado em que estão exactamente uma vez todas as arestas de um grafo diz-se *euleriano*. Um grafo diz-se *conexo* se dados quaisquer dois vértices x e y existe um caminho que começa em x e acaba em y .

1. Indiquem um grafo com 8 vértices e um caminho fechado euleriano com 2008 arestas.
2. Considerem um grafo simples com 10 vértices e 28 arestas. Mostrem que tal grafo tem necessariamente um ciclo com 4 arestas.
3. Seja G um grafo simples com 9 vértices. Suponham que a soma dos graus dos vértices de G é ≥ 27 . Mostrem que existe um vértice de G com grau ≥ 4 .
4. Seja G um grafo cujos vértices têm grau > 0 . Mostrem que se existe um caminho fechado euleriano então todos os vértices de G têm grau par e G é conexo.
5. Mostrem que em qualquer ciclo que não envolva todos os vértices dum grafo conexo em que todos os vértices têm grau par, existe um vértice com grau > 2 .
6. Demonstrem o teorema de Euler, i.e., um grafo cujos vértices têm grau > 0 , tem um caminho fechado euleriano sse é conexo e todos os vértices têm grau par.
7. Considerem um grafo simples tal que todos os vértices têm grau 4. Mostrem que é possível pintar as arestas deste grafo de vermelho e azul de forma a que em cada vértice incidam duas arestas vermelhas e duas arestas azuis.



Shortlists

1. Sejam x, y e z números reais positivos tais que $xyz = 1$. Mostrem que

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

2. Determinem todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

3. Um k -teto amoroso é um grupo de $k \geq 2$ pessoas no qual quaisquer 2 pessoas estão apaixonadas. Numa festa sabe-se que para cada dois trios (3-tetos) amorosos existe pelo menos uma pessoa comum a ambos e ainda que não há quintetos amorosos. Mostrem que existem duas (ou menos) pessoas cuja saída da festa reduz o número de trios amorosos para zero.

4. Seja S uma circunferência com centro em O e BC um diâmetro de S . Seja A um ponto de S tal que $\angle AOB < 120^\circ$. Seja D o ponto médio do arco AB de S que não contém o ponto C . A recta que passa em O e é paralela a DA intersecta AC em I . A mediatriz de OA intersecta S em E e F . Mostrem que I é o incentro do triângulo CEF .

5. Seja $\tau(n)$ o número de divisores positivos de um inteiro positivo n . Mostrem que existem infinitos inteiros positivos a tais que a equação $\tau(na) = n$, não tem soluções em $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\overline{BC} = \overline{DA}$, mas tal que BC não é paralelo a DA . Sejam E e F dois pontos quaisquer pertencentes aos lados BC e DA , respectivamente e tais que $\overline{BE} = \overline{DF}$. As rectas de suporte de AC e de BD intersectam-se no ponto P , as de BD e EF intersectam-se em Q e as de EF e AC em R . Mostrem que as circunferências circunscritas nos triângulos PQR que se obtêm variando E e F têm apenas o ponto P em comum.

7. Mostrem que a equação $\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$ não tem soluções inteiras.



Ibero-americana

1. [2001] Mostrem que é impossível cobrir um quadrado de lado 1 com cinco quadrados iguais de lado menor que $1/2$.

2. [2002] Considerem a sucessão de números reais $a_1, a_2, \dots$ definida por

$$a_1 = 56 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Mostrem que existe um inteiro k , com $1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$.

3. [2003] Seja $M = \{1, 2, \dots, 49\}$ o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determinem o maior inteiro k tal que o conjunto M tenha um subconjunto de k elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de k , determinem o número de subconjuntos de M , de k elementos, que gozam da propriedade mencionada.
4. [2004] Determinem todos os pares (a, b) , onde a e b são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que $100a + b$ e $201a + b$ são quadrados perfeitos de quatro dígitos.
5. [2005] Seja $p > 3$ um número primo. Mostrem que se $\sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{i^p}\right) = \frac{n}{m}$ com $\text{mdc}(n, m) = 1$, então p^3 divide n .
6. [2006] Num triângulo escaleno ABC em que $\angle A = 90^\circ$, a recta tangente em A ao círculo circunscrito em ABC intersecta a recta de suporte do lado BC em M e o círculo inscrito em ABC intersecta os lados AC em S e o lado AB em R . As rectas RS e BC intersectam-se em N e as rectas AM e SR intersectam-se em U . Mostrem que o triângulo UMN é isósceles.
7. [2007] Um número natural n é *atresvido* se o conjunto dos seus divisores, incluindo 1 e n , pode ser dividido em três subconjuntos tais que a soma dos elementos de cada subconjunto é a mesma nos três. Qual é a menor quantidade de divisores que pode ter um número *atresvido*?