



As soluções de Pítia

O *último délfico* viajará ao oráculo de Apolo, em Delfos, levando consigo nada mais de valor do que uma cadeia (aberta) de n argolas de ouro, e rogará ao bom humor de Pítia a solução mais elegante de cada um de n notáveis problemas. Ela cederá, em transe, uma divina solução se a oferta for equivalente a uma argola de ouro, mas fá-lo-á apenas uma vez por dia, não concederá crédito nem pagamentos adiantados e *dará troco*. Ele cortará o menor número possível, k , de argolas da sua cadeia e usará os segmentos assim obtidos durante n dias em troca das n canónicas soluções.

1. Mostrem que para $n = 7$ é possível ter $k = 1$.
2. Mostrem que se $n = 8$ então $k > 1$.
3. Calculem todas as possíveis decomposições da cadeia com $n = 11$ e $k = 2$.
4. Determinem todos os valores de n para os quais $k = 2$.
5. Seja $n = 2008$. Mostrem que então $k = 7$.
6. Determinem o valor máximo de n para k fixo.
7. Determinem todos os valores de n para k fixo.



Eliminatórias de Espanha

1. No alto da torre dos sinos do Castelo de Leiria, 7 elfos guardam as 2008 canónicas soluções deixadas pelo *último délfico*. As soluções estão num cubículo acessível a partir de 12 portas. Cada uma dessas portas tem 12 fechaduras e todas as fechaduras são distintas, i.e., cada fechadura requer a sua chave. Cada elfo tem chaves para algumas das fechaduras. De facto, quaisquer 3 elfos têm entre si chaves suficientes para abrir todas as fechaduras. Mostrem que, ao todo, estas criaturas têm nos seus bolsos pelo menos 336 chaves.
2. É dado um quadrilátero convexo tal que cada uma das suas diagonais o divide em dois triângulos de igual área. Mostrem que tal quadrilátero é necessariamente um paralelogramo.
3. Seja m um número positivo. Mostrem que não existem números primos da forma $2^{5m} + 2^m + 1$.
4. Determinem todos os trios (x, y, z) de números reais que são solução da equação:

$$\sqrt{3^x(5^y + 7^z)} + \sqrt{5^y(7^z + 3^x)} + \sqrt{7^z(3^x + 5^y)} = \sqrt{2}(3^x + 5^y + 7^z).$$

5. Determinem todos os inteiros positivos tais que $3^n + 5^n$ é múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.
6. Determinem todas as soluções reais da equação

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1.$$

7. Um poliedro convexo tem como faces 12 quadrados, 8 hexágonos regulares e 6 octógonos regulares. Em cada vértice do poliedro concorrem exactamente um quadrado, um hexágono e um octógono. Determinem o número de segmentos recta entre dois vértices do poliedro que não são arestas do poliedro nem são diagonais de uma face, ou seja, que estão no interior do poliedro.



Teorema de Lagrange

Recordem que um grupo é um conjunto com uma operação $\star$ associativa, i.e. tal que $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$, que tem um elemento u tal que $x \star u = u \star x = x$ e tal que para todo o $y \in G$ existe $z \in G$ tal que $y \star z = z \star y = u$. Um subconjunto H de G diz-se um *subgrupo* de G se H for fechado para a operação $\star$ (isto é, se o resultado de $x \star y$ pertence a H sempre que x e y pertençam a H) e se, com essa operação, H for também grupo.

1. Considerem o conjunto das aplicações bijectivas do conjunto $\{1, 2, 3\}$ nele próprio munido da operação de composição de funções. Calculem um subgrupo deste grupo com 3 elementos.
2. Quantos subgrupos com 2 elementos existem do grupo das bijecções de $\{1, 2, 3\}$?
3. Em geral, quantos subgrupos com 2 elementos existem do grupo das bijecções de $\{1, 2, \dots, n\}$?

Suponham que G é finito, então o teorema de Lagrange diz que o número de elementos de H divide o número de elementos de G . Nas três questões seguintes vão demonstrar este teorema. Seja G um grupo finito e H um seu subgrupo. Denotem os elementos de H por $x_1, \dots, x_r$. Para cada $y \in G$ denotem por yH o conjunto $\{yx_1, \dots, yx_r\}$.

4. Mostrem que para todo o $y \in G$ o conjunto yH tem r elementos.
5. Mostrem que se $w \notin yH$ então $yH \cap wH = \emptyset$
6. Usando a questão anterior mostrem que r divide o número de elementos de G .

Dado $y \in G$ definem-se recursivamente as potências naturais de y por $y^0 = u$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$, $y^n = y^{n-1} \star y$.

7. Seja G um grupo com um número primo, p , de elementos. Mostrem que existe $y \in G$ tal que $G = \{y^0, y^1, y^2, \dots, y^{p-1}\}$.



Eliminatórias 2009

1. [2003] Sejam m e n inteiros positivos. Mostrem que é possível escrever $5^n + 5^m$ como soma de dois quadrados perfeitos se e só se $n - m$ é par.
2. [2004] Determinem todas as funções estritamente crescentes

$$f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 100\}$$

tais que $x + y$ divide $xf(x) + yf(y)$ para todos os $x, y \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

3. [2005] Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados AD e BC não são paralelos. Seja E o ponto de intersecção das rectas de suporte aos lados AD e BC e I o ponto de intersecção das diagonais AC e BD . Mostrem que os triângulos EDC e IAB têm o mesmo baricentro se e só se os lados AB e CD são paralelos e $\overline{IC}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{AC}$.
4. [2006] Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito num círculo de raio r . Suponham que existe um ponto P no lado CD tal que $\overline{CB} = \overline{BP} = \overline{PA} = \overline{AB}$. Mostrem que então $\overline{PD} = r$.
5. [2007] Determinem os inteiros, $n \geq 2$, para os quais n^n divide o número

$$(n-1)^{n+1} + (n+1)^{n-1}.$$

6. [2008] Determinem as funções $f: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ tais que

$$f(n^2 + f(m)) = nf(n) + m,$$

para todos os $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

7. [2009] Determinem todas as funções $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que satisfazem a

$$f(x + y - z) + f(2\sqrt{xz}) + f(2\sqrt{yz}) = f(x + y + z)$$

para todos os $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$, tais que $x + y \geq z$.



Geometria em IMO 2007

Seja P um ponto do plano e l uma recta do plano, arbitrários. A *reflexão* de P na recta l é único ponto P' do plano tal o segmento PP' tem como mediatriz a recta l .

1. Mostrem que a distância entre dois pontos é invariante por reflexão, i.e., mostrem que se P' e Q' são as reflexões em l de P e Q , respectivamente, então o comprimento de PQ é igual ao comprimento de $P'Q'$.

Suponham agora que l passa pelo centro de uma circunferência C .

2. Mostrem que se $P \in C$ então a sua reflexão em l também pertence a C .
3. Concluam que se ABC é um triângulo inscrito em C então a reflexão $A'B'C'$ é um triângulo inscrito em C congruente com ABC .

A partir daqui suponham que ABC é um triângulo inscrito numa circunferência C e que l é a perpendicular à bissetriz do ângulo $\angle ACB$ que passa pelo centro de C .

4. Mostrem que o lado AC é paralelo ao lado $C'B'$.
5. Mostrem que as mediatrizes de $C'B'$ e AC coincidem.
6. Mostrem que a reflexão da mediatriz de AC é a mediatriz de CB .

Resolvam o problema 4 das IMO 2007.

7. Num triângulo ABC a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ intersecta a circunferência circunscrita em ABC nos pontos C e C' . As mediatrizes dos lados BC e AC intersectam a bissetriz de $\angle ACB$ em P e Q , respectivamente. Seja K o ponto médio de BC e L o ponto médio de AC . Mostrem que os triângulos $C'PK$ e $C'QL$ têm áreas iguais.



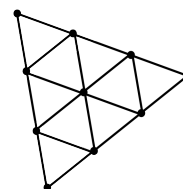
Finais

1. Um tabuleiro 9×9 foi preenchido com os números de 1 a 81. Mostrem que existe $k \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ tal que o produto dos elementos na linha k é diferente do produto dos elementos na coluna k do tabuleiro.
2. Determinem as soluções em inteiros ≥ 0 da equação: $2^x \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$.
3. Seja PBC um triângulo acutângulo com $\overline{PB} \neq \overline{PC}$. Sejam A e D pontos dos segmentos PB e PC , respectivamente. O segmento AC intersecta o segmento BD em O . Sejam E e F os pés das perpendiculares baixadas de O aos segmentos AB e CD , respectivamente. Denotem por M e N os pontos médios dos segmentos BC e AD , respectivamente. Mostrem que se A, B, C, D estão sobre uma circunferência então $\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}$.
4. Numa circunferência estão escritos 2005 inteiros não negativos cuja soma é 7022. Mostrem que existem dois pares formados por números consecutivos da circunferência tais que a soma dos elementos de cada par é maior ou igual a 8.
5. Seja ABC um triângulo rectângulo em C . A sua circunferência inscrita S intersecta BC e AC em D e E , respectivamente. O segmento AD intersecta novamente S em P . Suponham que $\angle BPC = 90^\circ$. Mostrem que $\overline{AE} + \overline{AP} = \overline{PD}$.
6. Seja P um polígono convexo, com n lados. Cada um dos seus lados e cada uma das suas diagonais devem ser coloridos com uma de n cores distintas. Determinem para que números n existe uma forma de colorir os lados e diagonais de P de tal forma que para qualquer escolha de três das n cores, existe pelo menos um triângulo em P , i.e., três vértices e os respectivos lados ou diagonais de P que os unem, cujos *lados* estão coloridos com as três cores escolhidas.
7. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Mostrem que, se para qualquer número real x a sucessão $x, f(x), f(f(x)), \dots$ é uma progressão aritmética então existe um número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + a$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.



Wanna play?

1. Todas as tardes de Domingo, o primeiro elfo, Imin, e a sua esposa Imniyë jogam uma partida de *pedras*. Este jogo começa com um monte de 2009 pedras em cima de uma mesa. Imin e Imniyë jogam alternadamente. Começa Imniyë. Cada jogada consiste em retirar um número de pedras igual a um divisor do número de pedras no monte no início dessa jogada. Perde quem retirar a última pedra. Existe alguma estratégia vencedora para Imin ou Imniyë?
2. Nos dias de festa, ou nos dias em que Imin e Imniyë se sentem particularmente entediados, uma partida de *pedras* é habitualmente substituída por uma partida de *joias*. O jogo começa com um conjunto de r rubis e d diamantes em cima de uma mesa. Joga-se alternadamente e começa Imin. Cada jogada consiste em escolher um tipo de joia, digamos rubis, e remover um número de rubis igual a um divisor do número de rubis existente no início dessa jogada. Já sabem, perde quem retirar a última joia. Descrevam a estratégia vencedora.
3. Enel e Enelyë pintam alternadamente, de azul e rosa, respetivamente, os vértices do tabuleiro representado na figura. Quando todos os vértices foram pintados, a cor de um triângulo é determinada pela cor maioritária dos seus vértices. O vencedor é quem conseguir ter pelo menos 6 triângulos da sua cor. Se ambos tiverem no máximo 5 triângulos da sua cor declara-se um empate. Existirá uma estratégia vencedora para algum dos jogadores? Nessa situação quem vence?
4. Cada uma de 2008 cartas tem escrito um número natural arbitrário. Estas cartas são dispostas numa fila horizontal, com o número à vista. Dois elfos retiram, à vez, uma carta de um dos extremos da fila, até que não restem cartas. O elfo que retira a primeira carta vence o jogo se (e só se) a soma dos naturais nas cartas por ele escolhidas é maior ou igual ao total do elfo que retira a segunda carta. Mostrem que existe uma estratégia vencedora para o elfo que inicia o jogo.



v.s.f.f.



5. Numa mesa estão 2008^{2008} moedas dispostas em n pilhas, com $n \geq 1$. Cada pilha contém um número de moedas possivelmente distinto das restantes. Na sua vez de jogar, Tata e Tatië, dispõem de duas possíveis jogadas:

‡ escolher uma pilha com $2k > 0$ moedas e dividi-la em duas pilhas iguais;

§ retirar da mesa todas as pilhas com um número ímpar de moedas.

Quando chega à sua vez, cada um deles é obrigado a jogar; se uma das jogadas permitidas não puder ser feita, *ele*, ou *ela*, tem de optar pela segunda. Começa a Tatië. Quem (se vir obrigado a) retirar todas as moedas que ainda estiverem na mesa perde. Para que configurações iniciais das moedas em pilhas possui Tatië uma estratégia vencedora?

6. É bem conhecido que para determinar o salário diário de um operário da Terra Média o operário elfo em questão deve dirigir-se a Imin, primeiro elfo e banqueiro mayor. Imin mostrar-lhe-á os inteiros $1, 2, \dots, 1024$ gizados numa parede de ardósia. O operário elfo começará por apagar 2^9 números, de seguida Imin apagará 2^8 números, de seguida é novamente o operário elfo que deve apagar 2^7 números; e assim sucessivamente até restarem apenas dois números, a e b , na ardósia. O salário diário desse operário elfo será estipulado em $|a - b|$ Euros. Determinem o salário diário máximo de um operário da Terra Média.
7. Imin e Enel jogam um tipo de xadrez élfico num tabuleiro $1 \times n$. Imin joga com um peão branco e Enel com um peão preto. No início do jogo o peão branco encontra-se na primeira posição do tabuleiro e o peão preto na última posição do tabuleiro. Começa Imin. Uma jogada permitida consiste em mover o seu peão uma ou duas casas para a esquerda ou para a direita, sem saltar por cima do peão do adversário. Não é permitido passar a vez. Perde o jogador que não conseguir mover o seu peão. Quem tem uma estratégia vencedora, Imin ou Enel?



O teorema de Turán

Um grafo G é dado por um conjunto de vértices $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e por um conjunto de arestas $E \subseteq \binom{V}{2}$, onde $\binom{V}{2}$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de V com dois elementos. Um grafo pode ser desenhado no plano representando os seus vértices por pontos e desenhando um segmento entre i e j caso $\{i, j\}$ seja aresta de G , i.e., $\{i, j\} \in E$. Dado um grafo G , um grafo K com conjunto de vértices V' e conjunto de arestas $E' \subseteq \binom{V'}{2}$ diz-se um *subgrafo* de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, ou seja, se o conjunto de vértices de K for um subconjunto do conjunto de vértices de G e as arestas de K um subconjunto das arestas de G entre os vértices de K . Dado $k \geq 1$, um k -clique é um subgrafo de G com um conjunto de vértices, $V' \subset V$, com k elementos e com todas as arestas entre os vértices de V' ; por outras palavras, com conjunto de arestas $E' = \binom{V'}{2}$. O teorema de Turán responde à seguinte questão: fixando k e $n = |V|$ (o número de elementos de V), a partir de que número de arestas se pode garantir a existência em G de um k -clique?

1. Sem usar as alíneas abaixo, mostrem directamente que um grafo com 5 vértices e 7 arestas contém necessariamente um 3-clique (triângulo).

Suponham $k \geq 3$. Considerem $k - 1$ subconjuntos de V , $V_1, \dots, V_{k-1}$, tais que $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ e, para quaisquer $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$. Denotemos o número de elementos de V_i por n_i . Define-se o grafo $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ como sendo o grafo que tem como conjunto de vértices o conjunto $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e como conjunto de arestas o conjunto $E = \{\{a, b\} \mid \exists i \neq j \text{ tais que } a \in V_i \text{ e } b \in V_j\}$. Ou seja, as arestas de $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ obtêm-se unindo-se cada vértice de V_i com todos os vértices de V_j , para $i \neq j$. (A notação $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ não é muito boa pois, em rigor, o grafo que definimos depende da partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ e não apenas dos cardinais dos conjuntos V_i . A menos de reordenação dos vértices, partições diferentes com sequências de cardinais iguais dão origem ao mesmo grafo.)

v.s.f.f.



2. Mostrem que $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ não contém nenhum k -clique.
3. Determinem o número de $(k - 1)$ -cliques em $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$.
4. Mostre que o número de arestas de $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ é menor ou igual a $\frac{k-2}{k-1} \frac{n^2}{2}$.

Dado $i \in V$, um vértice de um grafo G , o seu grau, que se denota por d_i , é o número de vértices *adjacentes* a i , i.e., o número de elementos do conjunto $\{j \in V \mid \{i, j\} \in E\}$. Seja $\mathcal{G}_n^k$ o conjunto dos grafos com vértices $V = \{1, 2, \dots, n\}$ que não contêm nenhum k -clique. Suponham que $G \in \mathcal{G}_n^k$. Seja $m \in V$ tal que $d_m = \max_{1 \leq j \leq n} d_j$, ou seja, considerem um vértice m de entre os vértices de G de grau máximo. Seja $S \subset V$ o conjunto de vértices de G adjacentes a m , donde $|S| = d_m$. Considerem S como subgrafo de G tomando para S todas as arestas que existem em G entre os vértices de S . Denotemos o conjunto de vértices $V \setminus S$ por T . Seja H o grafo que tem como conjunto de vértices V e como conjunto de arestas o conjunto obtido tomando todas as arestas de S (cuidado, não são, necessariamente, todas as arestas entre os vértices de S), todas as arestas unindo vértices de S com vértices de T (incluindo aquelas que não são arestas de G) e nenhuma aresta entre os vértices de T . No que se segue denotaremos por $|E(G)|$ o número de arestas de um grafo G .

5. Mostrem que o grafo H não contém k -cliques.
6. Mostrem que $|E(H)| \geq |E(G)|$.
7. Usando a ideia de Erdős, demonstrem o Teorema de Turán, i.e., mostrem que os grafos em $\mathcal{G}_n^k$ com maior número de arestas são os grafos $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$, onde $n_1, \dots, n_{k-1}$ são tais que $n_1 + \dots + n_{k-1} = n$. Em particular, mostrem que $|E(G)| \leq \frac{k-2}{k-1} \frac{n^2}{2}$, para todo o $G \in \mathcal{G}_n^k$.



Espaço Projectivo

Um *espaço projectivo* é um triplo $(S, \mathcal{R}_S, \mathcal{P}_S)$ onde S é um conjunto (qualquer) cujos elementos se designam *pontos*, $\mathcal{R}_S$ e $\mathcal{P}_S$ são dois conjuntos de subconjuntos de S cujos elementos se designam por *rectas* e *planos*, respectivamente. Dizemos que dois ou mais pontos $X_1, \dots, X_n \in S$ são *colineares* se existir $l \in \mathcal{R}_S$ tal que $X_1, \dots, X_n \in l$, isto é, se existir uma recta à qual pertençam. Dizemos que três ou mais pontos $X_1, \dots, X_n \in S$ são *coplanares* se existir um plano $\Pi \in \mathcal{P}_S$ tal que $X_1, \dots, X_n \in \Pi$. Adicionalmente, $(S, \mathcal{R}_S, \mathcal{P}_S)$ satisfazem os seguintes axiomas:

- A1.** Dois pontos distintos pertencem a uma e uma só recta.
- A2.** Três pontos não-colineares pertencem a um e um só plano.
- A3.** Uma recta e um plano intersectam-se em pelo menos um ponto.
- A4.** Dois planos têm pelo menos uma recta em comum.
- A5.** Existem quatro pontos não coplanares, três a três não colineares.
- A6.** Cada recta tem pelo menos três pontos.

O axioma **A5** garante que S é não-vazio. Este axioma conjugado com os axiomas **A1** e **A2** garante que $\mathcal{R}_S$ e $\mathcal{P}_S$ são ambos não-vazios, por outras palavras, existem efectivamente pontos, rectas e planos num espaço projectivo. Mas qual é o número mínimo de pontos, rectas e planos que podem (co)existir num espaço projectivo? Por exemplo, é fácil mostrar que cada plano de um espaço projectivo tem de conter pelo menos 7 pontos: (1) usando **A5**, deduz-se que existem pelo menos 6 rectas quatro a quatro não coplanares; (2) dado $\Pi \in \mathcal{P}_S$, sabemos que pelo menos 3 daquelas rectas não estão contidas em Π (porquê?); (3) por **A3**, deduz-se que existem pelo menos três pontos em Π , e logo, por **A2**, existem três rectas distintas em Π ; (4) usando os axiomas **A1** e **A6** conclui-se que existem pelo menos $6 + 1$ pontos em Π .

v.s.f.f.



Existem muitas realizações desta axiomática em triplos $(S, \mathcal{R}_S, \mathcal{P}_S)$ concretos e nem sempre o conjunto dos pontos é infinito. Considerem em $S = \{0, 1\}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$, o conjunto dos planos $\mathcal{P}_S = \{\Pi_{(a,b,c,d)} \mid (a, b, c, d) \in S\}$ e o conjunto das rectas $\mathcal{R}_S = \{\Pi_{(a,b,c,d)} \cap \Pi_{(a',b',c',d')} \mid (a, b, c, d) \neq (a', b', c', d') \in S\}$, onde, dado (a, b, c, d) pertencente a S , temos $\Pi_{(a,b,c,d)} = \{(x, y, z, w) \in S \mid xa + yb + zc + wd \equiv_2 0\}$.

1. Mostrem que o triplo $\mathbb{P} = (S, \mathcal{R}_S, \mathcal{P}_S)$ satisfaz os axiomas **A1–A6**.
2. Mostrem que cada plano em $\mathbb{P}$ contém exactamente 7 pontos e 7 rectas.
3. Mostrem que cada recta em $\mathbb{P}$ contém exactamente 3 pontos.
4. Mostrem que existem em $\mathbb{P}$ duas rectas que não se intersectam.

Seja $(S, \mathcal{R}_S, \mathcal{P}_S)$ um espaço projectivo. No que se segue, dados $X, Y \in S$ distintos, denotaremos por $XY = YX$ a única recta que contém os pontos X e Y . Sejam $\{A, B, C\}$ e $\{A', B', C'\}$ dois triângulos, i.e., dois conjuntos de três pontos não colineares, tais que $A \neq A'$, $B \neq B'$ e $C \neq C'$. Não supomos que ABC e $A'B'C'$ sejam coplanares e supomos que as rectas AA' , BB' , CC' têm um ponto O em comum. O teorema de Desargues diz que os pares de rectas AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AC e $A'C'$ se intersectam e que os três pontos de intersecção, P , R e Q , são colineares.

5. Mostrem que quaisquer duas rectas de um espaço projectivo que sejam coplanares intersectam-se num ponto. Em particular, mostrem que os pares de rectas AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AC e $A'C'$ se intersectam.
6. Sejam Π e Π' os planos que contêm os triângulos ABC e $A'B'C'$. Suponham que $\Pi \neq \Pi'$. Mostrem que então P , R , Q são colineares.
7. Suponham que os planos definidos na questão anterior coincidam. Mostrem que existe $X \in S \setminus \Pi$. Considerem $D \in XB$ distinto de X e B . Mostrem que as rectas OD e XB' se intersectam e designem o ponto de intersecção por D' . Considerem ADC e $A'D'C'$ e usem 6 para terminar a demonstração do teorema de Desargues.



Geometria Olímpica

1. **[OIAM1987]** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. P e Q são pontos dos lados AD e BC respectivamente, tais que $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{CD}$. Mostrem que o ângulo entre as rectas de suporte a PQ e a AB é igual ao ângulo entre as rectas de suporte a PQ e CD .
2. **[IMO1988]** ABC é um triângulo rectângulo e D é o pé da altura de A em BC . A recta que passa pelos incentros dos triângulos ABD e ACD intersecta AB e CA em K e L , respectivamente. Mostrem que a área ABC é maior ou igual ao dobro da área de AKL .
3. **[IMO1990]** Mostrem que existe um polígono convexo com 1990 lados no qual todos os ângulos são iguais e os comprimentos dos seus lados são os números $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 1990^2$, por alguma ordem.
4. **[USAMO1999]** Seja $ABCD$ um trapézio isósceles em que AB é paralelo a CD . A circunferência inscrita em BCD intersecta CD em E . Seja F o ponto na bissectriz interna de $\angle DAC$ tal que $EF \perp CD$. A circunferência circunscrita em ACF intersecta a recta CD em C e G . Mostrem que AFG é isósceles.
5. **[IMO1999]** Determinem todos os conjuntos finitos, S , de pontos do plano, com pelo menos 3 pontos que satisfaçam a seguinte condição: *para quaisquer dois pontos distintos A, B em S , a mediatriz de AB é um eixo de simetria de S .*
6. **[OIAM2004]** Considerem no plano uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio r e um ponto A exterior a $\mathcal{C}$. Seja M um ponto de $\mathcal{C}$ e N o ponto diametralmente oposto a M . Determinem o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por A, M e N quando M varia.
7. **[IMO2005]** São dados seis pontos nos lados de um triângulo equilátero ABC : A_1 e A_2 em BC , B_1 e B_2 em CA , C_1 e C_2 em AB tais que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ seja um hexágono convexo cujos lados têm igual comprimento. Mostrem que as rectas A_1B_2 , B_1C_2 e C_1A_2 são concorrentes.



Latino-Americanas

1. **[OBM2003]** Determinem o menor primo, p , (positivo) para o qual existe um inteiro n tal que $p \mid (n^2 + 5n + 23)$.
2. **[OAM2004]** Um pentágono $ABCDE$ é tal que $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DE}$, $\angle ABC = 2\pi/3$, $\angle CDE = \pi/3$ e $\overline{BD} = 2$. Calculem a área deste pentágono.
3. **[OBM2005]** Seja ABC um triângulo tal que a amplitude de cada um dos seus ângulos não excede $2\pi/3$. Seja F o centro de Fermat de ABC , i.e., o ponto interior a ABC tal que $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 2\pi/3$. Considerem, para cada um dos triângulos BCF , CFA e AFB a respectiva recta de Euler, i.e., a recta que passa pelo baricentro e pelo circuncentro de um triângulo. Mostrem que estas três rectas são concorrentes num ponto.
4. **[OMM2006]** Seja ABC um triângulo rectângulo com $\angle BAC = \pi/2$ e tal que $\overline{AB} < \overline{AC}$. Seja M o ponto médio de BC e D a intersecção de AC com a perpendicular a BC que passa por M . Seja E a intersecção da recta paralela a AC que passa por M com a perpendicular a BD que passa por B . Mostrem que os triângulos AEM e MCA são semelhantes se e só se $\angle ABC = \pi/3$.
5. **[OMM2007]** Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 1$. Mostrem que
$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$
6. **[OBM2008]** Mostrem que para quaisquer inteiros $a > 1$ e $b > 1$ existe uma função f dos inteiros positivos nos inteiros positivos tal que $f(a \cdot f(n)) = b \cdot n$, para todo n inteiro positivo.
7. **[OAM2009]** Determinem todos os inteiros positivos, n , tais que $20^n - 13^n - 7^n$ é divisível por 309.