# Quadrados Latinos

Seja $n$ um inteiro positivo. Um *quadrado latino de ordem* $n$ é um arranjo de inteiros na forma de uma tabela $n \times n$ de forma a que em cada linha e em cada coluna desse quadrado figurem os números de $1$ a $n$ exactamente uma vez. Dois quadrados latinos dizem-se *ortogonais* se os pares de números formados pelas entradas de cada quadrado na mesma linha e na mesma coluna aparecem sem repetição; como ilustramos com o exemplo sequinte:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

e

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |

$\rightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| (1,1) | (2,2) | (3,3) |
| (2,3) | (3,1) | (1,2) |
| (3,2) | (1,3) | (2,1) |

1. Calculem todos os quadrados latinos de ordem $2$ e mostrem que nenhum par de quadrados latinos de ordem $2$ é ortogonal.

2. Calculem o número de quadrados latinos de ordem $n$.

3. Calculem um par de quadrados latinos de ordem $3$ ortogonais diferente do exemplo que demos anteriormente.

4. Mostrem que não existem $3$ quadrados latinos de ordem $3$ ortogonais dois a dois.

5. Calculem o número de quadrados latinos de ordem $3$ ortogonais a um dado quadrado latino de ordem $3$.

6. Calculem um par de quadrados latinos ortogonais de ordem $4$.

7. Suponham que $n$ é um inteiro ímpar. Seja $A$ o quadrado $n \times n$ que na linha $i$ e coluna $j$ tem o menor resto positivo da divisão inteira por $n$ de $i + j$; e seja $B$ o quadrado $n \times n$ que na linha $i$ e coluna $j$ tem o menor resto positivo da divisão inteira por $n$ de $2i + j$. Mostrem que $A$ e $B$ são dois quadrados latinos ortogonais.

# Somas de dois quadrados

Seja $n$ um número natural. Dizemos que $n$ é soma de dois quadrados se existirem $x$ e $y$ inteiros (não-negativos) tais que $n = x^2 + y^2$.

1. Mostrem que $3$, $6$, $7$ e $11$ não são somas de dois quadrados.

2. Dêem um exemplo de um número natural $n$ tal que existem números inteiros $x, y, s, t$ com $x \neq s, t$ tais que

$$n = x^2 + y^2 = s^2 + t^2.$$

   Por outras palavras, mostrem que existem números naturais que são soma de dois quadrados de mais do que uma maneira.

3. Mostrem que o número natural dado por $(x^2+y^2)(z^2+w^2)$ com $x, y, z, w$ números inteiros, é soma de dois quadrados.

4. O natural $2005$ será soma de dois quadrados?

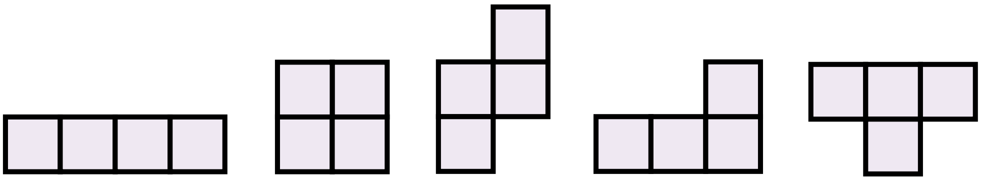
5. Mostrem que se $n$ é soma de dois quadrados então o número primo $3$ aparece na factorização de $n$ em números primos elevado a uma potência par.

6. Mostrem que se um número natural tem resto igual a $3$ pela divisão inteira por $4$, então ele não é soma de dois quadrados.

7. Mostrem que se na factorização em números primos de um natural, $n \neq 1$, existe um primo $p$, cuja divisão inteira por $4$ dá resto $3$, elevado a uma potência ímpar, então $n$ não é soma de dois quadrados.

# $n$-minós

Um $n$-*minó* é uma figura do plano que se obtém justapondo $n$ quadrados de lado unitário de forma a que cada quadrado subsequente tenha em comum uma das suas arestas com um dos quadrados já existentes. Na figura indicamos-vos todos os possíveis $4$-minós a menos de rotações e reflexões.



1. Listem todos os possíveis $5$-minós, a menos de rotações e reflexões.

A *ordem* de um $n$-minó é o menor número inteiro $k$ tal que existe uma forma de justapor $k$ cópias suas (rodadas e/ou reflectidas) de forma a preencher totalmente um rectângulo. Caso esse inteiro não exista diz-se que a ordem desse $n$-minó é $\infty$.

2. Mostrem que o $4$-minó do meio da figura tem ordem $\infty$.

3. Calculem, justificando, a ordem dos restantes $4$-minós listados.

4. Mostrem que existem $n$-minós de ordem $2$ para qualquer $n$ maior ou igual a $3$.

5. Exibam cinco $8$-minós de ordem infinita.

6. Mostrem que existem $n$-minós de ordem infinita para qualquer $n$ múltiplo de $5$.

7. É possível preencher um rectângulo com $3$ $n$-*minós* que sejam cópias de um $n$-*minó rectângulo*. E se esse $n$-minó tiver como comprimento o dobro da sua largura até é possível fazê-lo de mais do que uma maneira; no entanto a ordem de qualquer $n$-minó rectângulo é, evidentemente, $1$. Existirá algum $n$-minó de ordem $3$? A resposta parece ser "não," mas não há nenhuma demonstração elementar. Tentem dar razões para que não existam $n$-minós de ordem $3$.

# Números de Bernoulli

Vamos trabalhar com polinómios de grau infinito. Estes objectos que se designam por *séries formais*, são dados por uma soma infinita de monómios, i.e.

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots .$$

Duas séries formais somam-se da maneira óbvia:

$$(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots)+(b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)z+(a_2+b_2)z^2+(a_3+b_3)z^3+\cdots$$

e multiplicam-se, usando a propriedade distributiva, dando origem à fórmula:

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots) =$$
$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) z^2 + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) z^3 + \cdots$$

Considerem a seguinte série formal: $E(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$.

1. Mostrem que $E(z) \cdot E(-z) = 1$.
2. Mostrem que $E(x) \cdot E(y) = E(x + y)$. A que função corresponde $E(x)$?
3. Usem a alínea anterior para mostrar que $(x + y + z)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=n \\ 0\le k_1,k_2,k_3\le n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$.

Considerem o seguinte problema: queremos determinar uma série formal $B(z)$ que seja solução da equação $z = (E(z) - 1)B(z)$. Este problema tem uma única solução. Denotando essa solução por $B(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$, os números $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots$ que nela aparecem designam-se por *números de Bernoulli*.

4. Calculem os $6$ primeiros números de Bernoulli: $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ e $B_5$.
5. Mostrem que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_j = 0$.
6. Mostrem que $B(z) + \frac{z}{2} = B(-z) - \frac{z}{2}$.
7. Mostrem que, à excepção de $B_1$, todos os números de Bernoulli de ordem ímpar são iguais a $0$.

# Coordenadas Trilineares

Seja $ABC$ um triângulo. Dado um qualquer lado de $ABC$, o semiplano positivo por ele definido é, por definição, aquele semiplano que contém o triângulo. Assim, para qualquer ponto $P$ do plano, a distância de $P$ a um lado do triângulo $ABC$ pode ser afectada do sinal "$+$", caso o ponto se encontre no semiplano positivo definido por esse lado, ou do sinal "$-$", caso contrário. Tal número designa-se por ***distância orientada*** de $P$ a um lado do triângulo. Denotemos por $d_A$, $d_B$ e $d_C$, respectivamente as distâncias orientadas de $P$ aos lados $BC$, $AC$ e $AB$. As coordenadas trilineares de $P$ relativamente a $ABC$ são uma qualquer expressão da forma $(kd_A, kd_B, kd_C)$ com $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Por exemplo, $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$ e $(0.5, 1, 1.5)$ são todas ***coordenadas trilineares*** do mesmo ponto. No que se segue, fixemos um dado triângulo $ABC$.

1. Mostrem que nenhum ponto do plano tem negativas todas as suas distâncias orientadas aos lados de $ABC$.

2. Calculem coordenadas trilineares do centro da circunferência inscrita em $ABC$.

3. Mostrem que o baricentro de $ABC$ (a intersecção das medianas de $ABC$) tem coordenadas trilineares $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$, onde $a$ é o comprimento do lado $BC$, $b$ é o comprimento do lado $AC$ e $c$ é o comprimento do lado $AB$.

4. Mostrem que o centro da circunferência circunscrita a $ABC$ tem coordenadas trilineares $(\cos(\angle A), \cos(\angle B), \cos(\angle C))$, onde $\angle A$ designa o ângulo ao vértice $A$, $\angle B$ o ângulo ao vértice $B$ e $\angle C$ o ângulo ao vértice $C$.

5. Suponham que um ponto tem coordenadas trilineares $(\alpha, \beta, \gamma)$, onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$. Mostrem que as distâncias de $P$ a cada um dos lados de $ABC$ são dadas por $(k\alpha, k\beta, k\gamma)$ onde $k = \frac{2\Delta}{\alpha a+\beta b+\gamma c}$, com $a, b, c$ os comprimentos dos lados de $ABC$ (como descrito anteriormente) e $\Delta$ a área de $ABC$.

6. Mostrem que para quaisquer $(\alpha, \beta, \gamma)$ com $\alpha > 0, \beta > 0$ e $\gamma > 0$ existe um <u>único</u> ponto que tem coordenadas trilineares $(\alpha, \beta, \gamma)$.

7. Descrevam o ponto do plano com coordenadas trilineares $(1, -1, 0)$.

# O grau mínimo de um grafo

Para os nossos fins, um grafo é um conjunto finito de vértices (que podemos representar como pontos no plano) e um conjunto de arestas unindo esses vértices. Dados dois vértices (distintos) pode ou não existir *uma e uma única* aresta que os una. O grau de um vértice de um grafo é o número de arestas que partem dele. O mínimo dos graus dos vértices de um grafo designa-se por *grau do grafo* e denota-se por $\delta$. Um *caminho* num grafo é uma sequência de vértices $(v_1, \ldots, v_k)$ tal que para cada $i$, $v_i$ é distinto de $v_{i+1}$ e existe a aresta entre estes vértices. Se $v_1 = v_k$ então o caminho $(v_1, \ldots, v_k)$ designa-e por *ciclo*. O comprimento de um ciclo é o número de arestas percorridas, ou seja $k-1$. Um grafo diz-se *conexo* se dados quaisquer dois vértices $v$ e $u$ existe um caminho $(v, \ldots, u)$, caso contrário, o grafo diz-se *disconexo*.

1. Mostrem que um grafo, com conjunto de vértices $V$, é disconexo se e só se existem dois subconjuntos $U$ e $W$ de $V$, não-vazios, tais que $V$ é reunião disjunta de $U$ e $W$ e qualquer aresta do grafo tem os seus dois vértices em $U$ ou em $V$.

2. Considerem um grafo qualquer com $n$ vértices. Mostrem que se $\delta \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ então o grafo é conexo.

3. Calculem exemplos de grafos disconexos para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ e $\delta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.

4. Mostrem que se $\delta \geq 2$, então existe um ciclo de comprimento pelo menos $\delta + 1$.

5. Exibam um grafo com $6$ vértices e $\delta = 3$ que não contenha nenhum ciclo de comprimento $3$.

6. Mostrem que se existe um grafo com $n$ vértices e $\delta = 3$ que não contém nenhum ciclo de comprimento $3$ então existem grafos com $n + r$ vértices, para qualquer inteiro não negativo $r$, que não contêm ciclos de comprimento $3$.

7. Calculem uma estimativa para o número mínimo de vértices que pode ter um grafo com $\delta = k$ e sem ciclos de comprimento $k$.

# O teorema de Morley

Seja $ABC$ um triângulo. Cada um dos ângulos de $ABC$ possui duas *trissectrizes*, i.e. dois segmentos de recta que dividem esse ângulo em três ângulos de igual amplitude. Uma trissectriz é *adjacente* a um dos lados do ângulo se fizer com ele um ângulo de amplitude $1/3$ da amplitude do ângulo original. Assim, existem duas trissectrizes de $ABC$ adjacentes ao lado $AB$, uma do ângulo $\angle CAB$ e outra do ângulo $\angle CBA$. Denotemos o ponto de intersecção das duas trissectrizes adjacentes a $AB$ por $R$. Da mesma forma $P$ é o ponto de intersecção das trissectrizes adjacentes ao lado $BC$ e $Q$ o ponto de intersecção das trissectrizes adjacentes ao lado $AC$. O teorema de Morley diz que, para qualquer triângulo $ABC$, o triângulo $RPQ$ é *sempre* equilátero. Vamos guiar-vos na demonstração deste resultado. [Para responder a uma questão podem supor demonstrados os factos mencionados em questões anteriores.]

Seja $P$ o ponto de intersecção das trissectrizes adjacentes ao lado $BC$ e $S$ o ponto de intersecção da outra trissectriz de $\angle ABC$ com a outra trissectriz de $\angle ACB$.

1. Mostrem que $SP$ é a bissectriz do ângulo $\angle BSC$.

Sejam $R \in SB$ e $Q \in SC$ tais que $\measuredangle RPS = \measuredangle QPS = \frac{\pi}{6}$.

2. Mostrem que $RPQ$ é equilátero.

Sejam $M \in BA$ e $N \in AC$ tais que $\overline{BM} = \overline{BP}$ e $\overline{CN} = \overline{CP}$. Mostrem que:

3. $\overline{MR} = \overline{RQ} = \overline{QN}$;
4. $\measuredangle MRQ = \pi - \frac{2}{3}\measuredangle BAC$;
5. $M, R, Q, N$ estão sobre uma circunferência (seja $O$ o seu centro);
6. $\measuredangle MRO = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\measuredangle BAC$, $\measuredangle MOR = \frac{2}{3}\measuredangle BAC$ e $\measuredangle MON = 2\measuredangle BAC$;
7. $\measuredangle BAR = \measuredangle RAQ = \measuredangle QAC$ e concluam a demonstração do teorema de Morley.

# Combinatória Olímpica

Eis 7 problemas de combinatória das Olimpíadas Internacionais de Matemática.

1. [**IMO1972**] Mostrem que $m!n!(m+n)!$ divide $(2m)!(2n)!$ para $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

2. [**IMO1986**] Dado um conjunto finito de pontos do plano cartesiano com coordenadas inteiras digam se é ou não sempre possível colorir os pontos de vermelho ou branco de forma a que para qualquer recta $L$, paralela a um dos eixos, o valor absoluto da diferença do número de pontos brancos em $L$ pelo número de pontos vermelhos em $L$ é $\leqslant 1$.

3. [**IMO1989**] Uma permutação $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, onde $n$ é um inteiro positivo diz-se ter a propriedade $P$ se $|x_i - x_{i+1}| = n$ para pelo menos um índice $i$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Mostrem que, para cada $n$, existem mais permutações com a propriedade $P$ do que sem ela.

4. [**IMO1991**] Seja $G$ um grafo conexo com $k$ arestas. Mostrem que é possível numerar as arestas de $1$ a $k$ de forma a que dado um qualquer vértice do grafo, o máximo divisor comum dos números das arestas que partem desse vértice é $1$.

5. [**IMO1992**] Considerem $9$ pontos do espaço tais que quaisquer $4$ não estão contidos no mesmo plano. Cada par de pontos está unido por uma aresta que é azul ou vermelha, ou não tem cor. Determinem o menor valor de $n$ tal que se numa coloração existem $n$ arestas coloridas então existe um triângulo de uma só cor.

6. [**IMO1998**] Em certa competição há $N$ concorrentes e $M \geqslant 3$ juízes, com $M$ ímpar. A apreciação de cada concorrente por cada juíz ou é *passa* ou é *reprova*. Seja $k$ um número natural tal que dados quaisquer dois juízes as suas apreciações coincidem no máximo para $k$ concorrentes. Mostrem que $k/N \geqslant (M-1)/2M$.

7. [**IMO2001**] Sejam $n_1, n_2 \ldots, n_m$ números inteiros, com $m$ ímpar. Denotemos por $x = (x_1, \ldots, x_m)$ uma permutação dos inteiros $1, 2, \ldots, m$. Considerem, para cada $x$, o inteiro $f(x) = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots x_m n_m$. Mostrem que existem duas permutações distintas $x$ e $y$ tais que $f(x) - f(y)$ é múltiplo de m!

# Teoria de Números Olímpica

Eis 7 problemas de Teoria de Números das Olimpíadas Internacionais de Matemática.

1. [**IMO1975**] Seja $A$ a soma dos dígitos de $4444^{4444}$ na sua representação decimal e $B$ a soma dos dígitos de $A$. Determinem a soma dos dígitos de $B$.
2. [**IMO1977**] Sejam $a$ e $b$ dois inteiros positivos. A divisão inteira $a^2 + b^2$ por $a + b$ dá quociente $q$ e resto $r$. Determinem todos os pares $a, b$ para os quais $q^2 + r = 1977$.
3. [**IMO1981**] Determinem o valor máximo de $m^2 + n^2$, onde $m$ e $n$ são inteiros tais que $1 \leq m, n \leq 1981$ e $(n^2 - nm - m^2)^2 = 1$.
4. [**IMO1995**] Seja $p \neq 2$ um número primo. Indiquem o número de subconjuntos de $p$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, cuja soma dos seus elementos é divisível por $p$.
5. [**IMO1997**] Indiquem todos os pares $(a, b)$ de inteiros positivos tais que $a^{b^2} = b^a$.
6. [**IMO2000**] Digam, justificando, se existe um inteiro positivo $N$ que é divisível por apenas $2000$ números primos distintos, tal que $N$ divide $2^N + 1$. (Notem que $N$ pode ser divisível por uma potência de um número primo.)
7. [**IMO2003**] Mostrem que para cada número primo $p$ existe um número primo $q$ tal que $n^p - p$ não é divisível por $q$ para qualquer inteiro positivo $n$.

# Geometria Olímpica

Eis 7 problemas de Geometria das Olimpíadas Internacionais de Matemática.

1. [**IMO1965**] Considerem um tetraedro $ABCD$ do espaço euclidiano. $ABCD$ está dividido em duas partes por um plano que é paralelo aos segmentos $AB$ e $CD$. Supondo que a distância deste plano a $AB$ é $\mathbf{k}$ vezes a distância do plano a $CD$, calculem a razão dos volumes das duas partes.

2. [**IMO1974**] Seja $ABC$ um triângulo. Mostrem que $\operatorname{sen}(\widehat{A})\operatorname{sen}(\widehat{B}) \leq \operatorname{sen}^2(\widehat{C}/2)$ se e só se existe um ponto $D$ do lado $AB$ tal que $\overline{CD}$ é a média geométrica dos comprimentos $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$.

3. [**IMO1983**] Seja $ABC$ um triângulo equilátero. Seja $E$ o conjunto dos pontos formado pela reunião dos segmentos $AB$, $BC$ e $CA$. Digam se é ou não possível decompor $E$ como reunião disjunta de dois subconjuntos tal que nenhum destes subconjuntos contenha os vértices de um triângulo rectângulo.

4. [**IMO1988**] Seja $ABC$ um triângulo rectângulo em $\widehat{A}$. O ponto $D$ é o pé da altura ao vértice $A$. A recta que une os incentros dos triângulos $ABD$ e $ACD$ intersecta os lados $AB$ e $AC$ em $K$ e $L$, respectivamente. Mostrem que a área do triângulo $ABC$ é duas vezes a área do triângulo $AKL$.

5. [**IMO1994**] O triângulo $ABC$ é tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$. $M$ é o ponto médio do segmento $BC$ e $O$ é o ponto da recta $AM$ tal que $OB$ é perpendicular a $AB$. Seja $Q$ um ponto em $BC$ distinto de $B$ e $C$. Sejam $E$ pertencente à recta $AB$ e $F$ pertencente à recta $AC$ tais que $E, Q, F$ são três pontos colineares. Mostrem que $OQ$ é perpendicular a $EF$ se e só se $QE = QF$.

6. [**IMO2001**] $ABC$ é um triângulo acutângulo e $O$ é o seu incentro. Seja $X$ o pé da altura ao vértice $A$. Suponham que $\widehat{C} \geq \widehat{B} + \frac{\pi}{6}$. Mostrem que $\widehat{A} + C\widehat{O}X < \frac{\pi}{2}$.

7. [**IMO2003**] Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Os pés das perpendiculares ao vértice $D$ para as rectas $AB$, $BC$ e $CA$ são os pontos $P$, $Q$ e $R$, respectivamente. Mostrem que as bissectrizes de $A\widehat{B}C$ e $C\widehat{D}A$ intersectam-se no ponto da recta $AC$ se e só se $\overline{RP} = \overline{RQ}$.

# Um problema de Euler

Dado um polígono convexo $K$ com $n$ lados, uma *triangulação estrita* é uma decomposição de $K$ em triângulos por diagonais que não se intersectam no interior de $K$. Salvo menção em contrário, $K$ designará um polígono convexo com $n$ lados.

1. Suponham que $n = 5$. Indiquem as $5$ triangulações estritas de $K$.
2. Mostrem que o número de triângulos numa triangulação estrita de $K$ é apenas função de $n$.
3. Mostrem que o número de diagonais numa triangulação estrita de $K$ é apenas função de $n$.

O problema de Euler consiste em determinar o número de triangulações estritas de um polígono convexo com $n$ lados. Como já devem ter constatado, este número não depende da forma do polígono, mas apenas do seu número de lados. Designaremos o número de triangulações estritas de um polígono convexo com $n$ lados por $T_n$.

4. Calculem, justificando, o valor de $T_6$.
5. Convencionando que $T_2 = 1$, mostrem que
$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1}.$$
6. Mostrem que
$$\frac{n}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-1} T_k T_{n-k+2}\right) = (n-3)T_n.$$
7. Finalmente, combinando os resultados anteriores, concluam que
$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$