Experiência III. **Desigualdades**

Objectivo: Pretendemos com esta experiência apresentar com demonstrações algumas desigualdades que tornem o estudante apto a resolver um conjunto amplo de problemas de competições matemáticas. Esta exposição pensamos estar o mais auto-contida possível. Em certas passagens, contudo, algum conhecimento de cálculo infinitesimal é útil, ainda que não imprescindível. Privilegiámos, nesta exposição, os argumentos geométricos em detrimento do formalismo matemático.

10. Valores Médios

Começamos por introduzir os entes matemáticos que vamos estudar.

Definição 10.1. Considere os n números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Definimos *médias*:

aritmética: $\mathrm{MA}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$,

geométrica: $\mathrm{MG}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$,

harmónica: $\mathrm{MH}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$,

de ordem p: $\mathrm{M}_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{1/p}$,

destes números.

Observação . Nota que na definição anterior podemos tomar $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Para $p = 0$ ou $\pm\infty$ temos

(a) $\mathrm{M}_{-\infty} = \lim_{p\to-\infty} \mathrm{M}_p = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
(b) $\mathrm{M}_0 = \lim_{p\to 0} \mathrm{M}_p = \mathrm{MG}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
(c) $\mathrm{M}_{+\infty} = \lim_{p\to+\infty} \mathrm{M}_p = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

De facto, para a alínea (b) tomando $\exp \circ \ln$ vemos que somente temos de calcular

$$\lim_{p\to 0^+} \frac{\ln(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^p) - \ln 1}{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p} \ln(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^p)\Big|_{p=0} = \frac{1}{n}\ln(x_1 \ldots x_n)\,.$$

Efectuando a composição com a função exp temos o que queríamos provar.

Para a alínea (c) consideremos, sem perda de generalidade, que $x_1 = \max(x_1, \ldots, x_n)$, então podemos escrever $\mathrm{M}_p = x_1 \frac{1}{n}\left(1 + (x_2/x_1)^p + \cdots + (x_n/x_1)^p\right)^{1/p}$, e tomando $p \to +\infty$ obtemos o resultado procurado.

Justifica que se tem a igualdade enunciada na alínea (a).

Vamos apresentar argumentos geométricos para relacionar estas médias no caso de dois números reais positivos x_1, x_2, i.e. veremos que

$$\mathrm{M}_{-\infty}(x_1, x_2) \le \mathrm{MH}(x_1, x_2) \le \mathrm{MG}(x_1, x_2) \le \mathrm{MA}(x_1, x_2) \le \mathrm{M}_2(x_1, x_2) \le \mathrm{M}_{+\infty}(x_1, x_2)\,.$$

A primeira e a última desigualdades são naturais (verificar).

Relacionemos agora a média aritmética e a geométrica. Para tal, dados dois números reais positivos x_1, x_2 construímos um triângulo rectângulo cuja altura divide a hipotenusa em segmentos de comprimento x_1 e x_2. Verifique que a altura é igual $g = \sqrt{x_1 x_2}$, i.e. é igual a $\mathrm{MG}(x_1, x_2)$. Pela análise da figura 6 onde $m = \mathrm{MA}(x_1, x_2)$, temos a desigualdade procurada. Para as médias aritmética e quadrática de dois números reais positivos x_1, x_2,

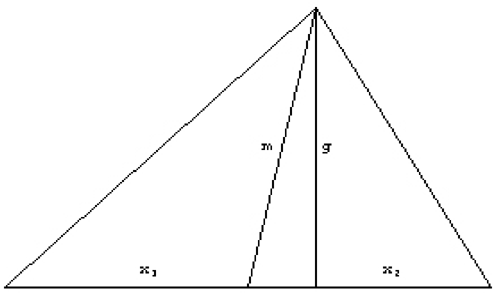

FIGURA 6. Médias Geométrica e Aritmética

construímos dois triângulos rectângulos de catetos, x_1, x_2 e $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)/2}$, que é a $\mathrm{M}_2(x_1, x_2)$, como se mostra na figura 7. Pode ver-se que $2m^2 = g^2 + r^2$ pelo que $m \leq r$, *c.q.d.*

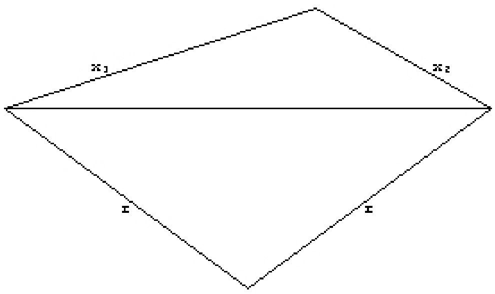

FIGURA 7. Médias Aritmética e Quadrática

Para compararmos as médias harmónica e geométrica de dois números reais positivos, temos somente que verificar que

$$\mathrm{MH}(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{MG}^2(x_1, x_2)}{\mathrm{MA}(x_1, x_2)} \leq \mathrm{MG}(x_1, x_2)\,,$$

aplicando a desigualdade anteriormente provada para as médias aritmética e geométrica.

Problema 10.1. *Considere n números reais não negativos, x_1, x_2, ..., x_n, e $r, s \in \mathbb{R}^+$ tais que $r \leq s$. Mostre que* $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^r\right)^{1/r}$.

Resolução. Vamos comparar as duas igualdades, tomando em primeiro lugar $d = \sum_{j=1} x_j^r$,

então $\dfrac{\left(\sum_{j=1}^n x_j^s\right)^{1/s}}{d^{1/r}} = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{x_j^s}{d^{s/r}}\right)^{1/s} = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^r}{d}\right)^{s/r}\right)^{1/s}$.

Agora $0 \leq x_j^r/d \leq 1$ e $s/r - 1 \geq 0$, então $\left(\dfrac{x_j^r}{d}\right)^{s/r} \leq \dfrac{x_j^r}{d}$. Assim, a expressão inicial $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j^r\right)^{1/r} / \left(\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j^s\right)^{1/s}$ está majorada por $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{x_j^r}{d}\right)^{1/s} = 1$. ■

Exercício 10.1.

(1) $x^a < 1$ se $x > 1$ e $a < 0$, e portanto se $0 < x < y$ então $x^a > y^a > 0$ se $a < 0$.

(2) Se $0 < x < 1$ então $0 < x^a < 1$ se $a > 0$ e $x^a > 1$ se $a < 0$.

(3) Considere n números reais não negativos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mostre que, se $a \in]0,1]$ então $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j\right)^a \leq \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j^a$, e se $a \in]1, \infty[$ então $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j\right)^a \geq \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j^a$.
Indicação: Tenha em atenção a desigualdade do problema 10.1.

(4) Utilizando os resultados do problema 10.1 mostre que a aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $p(x) = |x|^a$ para $a \in]0,1]$ verifica as propriedades do valor absoluto, i.e. $p(x) \geq 0$, $p(x) = 0 \iff x = 0$, $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, $p(xy) = p(x)p(y)$.

(5) Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $(1+a)^{1/n} \leq 1 + \dfrac{a}{n}$.
Indicação: Tome potência de ordem n em ambos os membros da desigualdade e aplique a fórmula do binómio de Newton.

(6) Mostre que $e^x < 1 + (e-1)x$, $x \in [0,1]$.
Indicação: Represente graficamente as funções de expressão analítica $e^x - 1$ e $(e-1)x$, para $x \in [0,1]$, onde e é o número de Nepar.

(7) Justifique que, $b^x < 1 + (b-1)x$, para todo o $b > 1$ e $x \in [0,1]$.

Teorema (Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica). *Considere os n números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mostre que*

$$\mathrm{MG}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \mathrm{MA}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Além disso, temos igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Vamos proceder por indução. Consideremos provado para dois números reais positivos (cf. raciocínio geométrico). Como hipótese de indução temos que a desigualdade enunciada é válida para todo o p-uplo de números reais positivos com $p = 2, 3, \ldots, n-1$, i.e. para todo o $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^+$

$$\mathrm{MG}(x_1, \ldots, x_p) \leq \mathrm{MA}(x_1, \ldots, x_p), \quad p = 2, 3, \ldots, n-1,$$

e verifiquemos que tal se tem para $p = n$.

Considere-se um n-uplo arbitrário de números reais positivos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_j \geq x_1$, $j = 2, \ldots, n$ pelo que, existem $\alpha_j > 0$ tais que $x_j = x_1(1+\alpha_j)$, $j = 2, \ldots, n$. Então,

$$x_1^{1/n} x_2^{1/n} \ldots x_n^{1/n} = x_1 \sqrt[n]{(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)} = x_1 \left(\sqrt[n-1]{(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)} \right)^{\frac{n-1}{n}} .$$

Aplicando a hipótese de indução aos $n-1$ números $1+\alpha_2\,, \ldots, \,1+\alpha_n$ temos

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq x_1 \left(\frac{n-1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n}} ,$$

e pelo exercício 10.1.(7) com $b = \dfrac{n-1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n-1}$ e $x = (n-1)/n$, encontramos

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq x_1 \left(1 + \left(\frac{n-1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n-1} - 1 \right) \frac{n-1}{n} \right) ,$$

ou ainda $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq x_1 \dfrac{1+(1+\alpha_2)+\cdots+(1+\alpha_n)}{n}$. Mas $1+\alpha_j = x_j/x_1$, $j = 2, 3\ldots, n$, pelo que se tem a desigualdade procurada. ■

Exercício 10.2.

(1) Mostre que se o produto de n números reais é maior do que ou igual a 2^n, a sua soma é igual ou superior a $2n$.

(2) Mostre que para $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ com $x < y < z$ se tem

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) < xyz\,.$$

(3) Para $x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ temos $\ln \left(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \geq \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \ln x_j\,.$

Problema (IMO 2000). *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ cujo produto é igual a um. Mostre que*

$$(a-1+1/b)(b-1+1/c)(c-1+1/a) \leq 1\,.$$

Resolução. Comece por justificar que pode tomar, sem perda de generalidade todos os factores positivos. De facto, pode verificar-se que se um dos factores for negativo os demais serão positivos. Neste caso a desigualdade é trivialmente verificada.

Usando a hipótese temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} a-1+1/b &= (ab-b+1)/b = a(1-bc+c) \\ b-1+1/c &= (bc-c+1)/c = b(1-ac+a) \\ c-1+1/a &= (ac-a+1)/a = c(1-ab+b)\,. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(1-ac+a)+(ac-a+1)}{2} \geq \sqrt{(1-ac+a)(ac-a+1)} \\ 1 &= \frac{(1-bc+c)+(bc-c+1)}{2} \geq \sqrt{(1-bc+c)(bc-c+1)} \\ 1 &= \frac{(1-ab+b)+(ab-b+1)}{2} \geq \sqrt{(1-ab+b)(ab-b+1)}\,. \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro e tendo em conta as igualdades anteriormente deduzidas obtemos a nossa desigualdade. ■

11. DESIGUALDADES FUNDAMENTAIS

Comecemos por dar a definição de função convexa.

Definição 11.1. Uma função real de variável real, f, diz-se *convexa* (respectivamente *côncava*) num intervalo $[a,b]$ contido no seu domínio de definição, se

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\,, \quad x \in [a,b]\,,$$

(respectivamente, $f(x) \geq \dfrac{b-x}{b-a}f(a) + \dfrac{x-a}{b-a}f(b)\,, \quad x \in [a,b]$).

Observe que $x = \dfrac{b-x}{b-a}a + \dfrac{x-a}{b-a}b\,,$ e $\dfrac{b-x}{b-a} + \dfrac{x-a}{b-a} = 1\,.$

Teorema 11.1. *Uma função real de variável real definida em $[a,b]$ é convexa quando e só quando* $f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)\,, \quad t \in [0,1]\,.$
Analogamente, uma condição necessária e suficiente para que f seja côncava no intervalo $[a,b]$ é $f((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)\,, \quad t \in [0,1]\,.$

Demonstração. Consequência directa da definição e da observação que se lhe seguiu. ■

Exemplo . As funções $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\exp(x) = e^x$, e $p\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $p(x) = x^a$, $a > 1$ são convexas. Da mesma forma que as funções $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $\ln(x) = \log_e x$, e $q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $q(x) = x^b$, $0 < b < 1$ são côncavas.

De facto, pela representação geométrica das funções exp e q (ver figura 8) concluímos imediatamente o resultado. Analise, como exercício, os restantes casos.

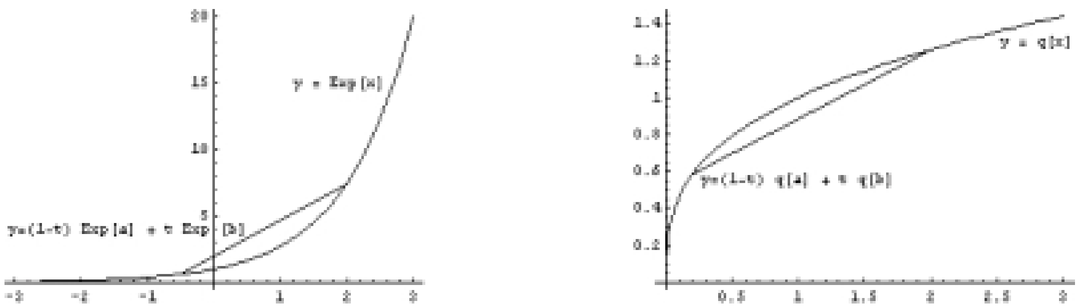

FIGURA 8. Convexa versus Côncava

Teorema (Desigualdade de Jensen). *Seja f uma função real de variável real, definida e convexa (respectivamente, côncava) em $[a,b]$. Considere os pontos arbitrários $x_1,\ldots,x_n \in [a,b]$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in]0,1[$ tais que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Então,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \quad \textit{(respectivamente,} \quad f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)\ \textit{).}$$

Demonstração. Comece por justificar que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in [a,b]$.

Para demonstrarmos a desigualdade vamos proceder por indução. Por definição temos o caso $n = 2$. Suponhamos agora que a desigualdade se tem para quaisquer p-uplo de números $x_1, \ldots, x_p \in [a,b]$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ com $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$, para $p = 2, \ldots, n-1$ e verifiquemos que se tem a desigualdade para $p = n$. Considere-se n números quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in]0,1[$ tais que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, então

$$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) = f(\lambda x + \lambda_n x_n)\,, \text{ onde } \lambda = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \text{ e } x = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j\,.$$

Note-se que $\lambda + \lambda_n = 1$ e $x \in [a,b]$, pois $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})/\lambda = 1$. Assim, aplicando a hipótese de indução com $p = 2$ temos $f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq \lambda f(x) + \lambda_n f(x_n)$ e pela hipótese de indução para $p = n-1$ e actuando no termo $f(x)$, temos a desigualdade pretendida. ∎

Problema (Aplicações da desigualdade de Jensen).

(1) *Resolva o exercício 10.2.(3).*

Indicação: *Mostre que a função logaritmo de base $b > 1$ é côncava.*

(2) *Considere $n \in \mathbb{N}$ e $r_j \in [1\,, +\infty[$ para $j = 1, 2 \ldots, n$. Mostre que*

$$\frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{r_1 \ldots r_n}}\,.$$

Indicação: *Justifique que existem a_j tais que $r_j = e^{a_j}$ para $j = 1, \ldots, n$ e que a função de expressão analítica $f(x) = 1/(1+e^x)$ é convexa para $x \in \mathbb{R}^+$.*

(3) *Considere os n números reais positivos $x_1\,, \ldots\,, x_n$ e $r, s \in \mathbb{R}^+$ com $0 < r \leq s$. Mostre que $\mathrm{M}_r(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{M}_s(x_1, \ldots, x_n)$.*

Indicação: *Aplique a desigualdade de Jensen à função de expressão analítica $f(x) = x^{r/s}$ nos pontos x_j^s, $j = 1, 2 \ldots, n$.*

Definição 11.2. Considere os n números reais positivos $x_1\,, \ldots\,, x_n$ e $\lambda_1\,, \ldots\,, \lambda_n \in]0,1[$ tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Definimos *médias ponderadas com pesos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:*

de ordem p: $\mathrm{MP}_p(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^p \right)^{1/p}$,

aritmética: $\mathrm{MAP}(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \mathrm{MP}_1(x_1, \ldots, x_n)\,,$

geométrica: $\mathrm{MGP}(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} = \mathrm{MP}_0(x_1, \ldots, x_n)\,,$

harmónica: $\mathrm{MHP}(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n) = \dfrac{1}{\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x_n}} = \mathrm{MP}_{-1}(x_1, \ldots, x_n)\,,$

destes números.

Exercício 11.1. Considere os n números reais positivos $x_1\,, \ldots\,, x_n$ e $\lambda_1\,, \ldots\,, \lambda_n \in]0,1[$ tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Mostre que $\mathrm{MP}_r(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{MP}_s(x_1, \ldots, x_n)$.

Observação . Este resultado diz-nos que para um mesmo n-uplo de números reais positivos e pesos dados, a média ponderada é uma função monótona, considerada como função de $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$.

Vejamos uma desigualdade com muitas aplicações em problemas de competições internacionais de matemática.

Problema 11.1. *Considere os n números reais positivos $x_1\,,\,\dots\,,\,x_n$. Então,*

$$(x_1\dots x_n)^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right)^{\sum_{j=1}^n x_j} \le x_1^{x_1}\dots x_n^{x_n}\,.$$

Resolução. A primeira desigualdade é imediata, pois elevando ambos os membros ao inverso de $\sum_{j=1}^n x_j$ obtemos a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética.

Vamos rescrever a segunda desigualdade na forma

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j \le x_1^{d_1}\dots x_n^{d_n}\,,\quad d_j = x_j/\sum_{j=1}^n x_j\,,\quad j=1,2,\dots,n \text{ e } \sum_{j=1}^n d_j = 1\,.$$

Temos então de provar que

$$\frac{1}{n(x_1^{d_1}\dots x_n^{d_n})} \le \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j} = \frac{d_k}{a_k}\,,\quad k=1,2,\dots,n\,.$$

Somando membro a membro com $k=1,2,\dots,n$, obtemos

$$\frac{1}{x_1^{d_1}\dots x_n^{d_n}} \le \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{x_k}\,,\quad \text{i.e.}\quad \frac{1}{\mathrm{MGP}(x_1,\dots,x_n)} \le \frac{1}{\mathrm{MHP}(x_1,\dots,x_n)}\,,$$

e da monotonia da média ponderada, considerada como função do parâmetro real p (cf. exercício 11.1) temos o resultado procurado. ∎

Exercício 11.2. Considere os três números reais positivos a, b, c, então:

(1) $a^a b^b c^c \ge (abc)^{(a+b+c)/3}$.

(2) Se $a > b > c$, mostre que $a^{2a}b^{2b}c^{2c} > a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

Teorema 11.2 (Desigualdades). *Considere dois n-uplos de números reais, (a_j) e (b_k). Então:*

Cauchy-Schwarz: $$\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Minkowski: $$\left(\sum_{j=1}^n (a_j+b_j)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}.$$

Demonstração. Para a primeira desigualdade considere $(a_j - \lambda b_j)^2 \ge 0$, i.e. $\lambda^2 b_j^2 - 2\lambda a_j b_j + a_j^2 \ge 0$, $j = 1,\dots,n$. Somando ordenadamente as n desigualdades resultantes de substituir j de 1 a n obtemos

$$\lambda^2\sum_{j=1}^n b_j^2 - 2\lambda\sum_{j=1}^n (a_j b_j) + \sum_{j=1}^n a_j^2 \ge 0\,,\ \text{i.e.}\quad A\lambda^2 - 2B\lambda + C \ge 0\,,$$

onde $A = \sum_{j=1}^{n} b_j^2$, $B = \sum_{j=1}^{n}(a_j b_j)$ e $C = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$. Assim, $B^2 - AC \leq 0$ que é a desigualdade procurada.

Para a desigualdade de Minkowski eleve ambos os membros ao quadrado e aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz. ∎

Teorema (Desigualdade de Young). *Sejam $p, q \in \mathbb{R}^+$ com $p > 1$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Mostre que, $xy \leq x^p/p + y^q/q$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Analisemos a informação contida no gráfico da figura 9. Vê-se facil-

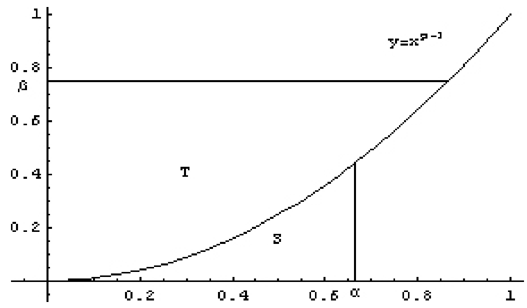

FIGURA 9. Desigualdade de Young

mente que $\alpha\beta \leq \text{area}\,(T) + \text{area}\,(S)$.

Temos então de calcular a area dos conjuntos T e S. Comecemos por ver que calculando a area de S determinamos de forma análoga a area de T. De facto a curva que delimita a superiormente o conjunto S tem expressão analítica $y = x^{p-1}$ e a curva que delimita à direita a região T tem expressão analítica $x = y^{1/(p-1)} = y^{q/p} = y^{q(1-1/q)} = y^{q-1}$.

Calculemos então a area de S. Para tal dividimos o segmento $[0, \alpha]$ em n intervalos iguais de amplitude α/n, i.e. $[0, \alpha] = [0, \alpha/n] \cup]\alpha/n, 2\alpha/n] \cup \cdots \cup](n-1)\alpha/n, \alpha]$, e consideremos em cada um destes intervalos o seu extremo superior, i.e. $a_j = j\alpha/n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Assim,

$$\text{area}\,(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha j/n)^{p-1} = \alpha^p \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{j=1}^{n} j^{p-1} = \alpha^p \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n^p}\,,$$

onde $u_n = 1 + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}$.

Para calcular o $\lim\limits_{n\to\infty} u_n/n^p$, vamos aplicar um resultado devido a Otto Stolz, que nos diz que, *dadas duas sucessões de números reais* (u_n) *e* (v_n) *se* $(v_n) \uparrow +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}\,.$$

Voltando ao cálculo do

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p-1}}{(n+1)^p - n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - (1 - 1/(n+1))^p}{1/(n+1)} \right)^{-1}\,.$$

Agora, tomando $s = -1/(n+1)$, rescrevemos o limite anterior na forma $\lim_{s\to 0^-} \frac{(1+s)^p - 1}{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(1+x)^p\Big|_{x=0} = p$, pelo que area $(S) = \alpha^p/p$.

Da mesma forma se vê que area $(T) = \beta^q/q$, ficando demonstrada a desigualdade. ■

Teorema 11.3 (Desigualdades). *Considere dois n-uplos de números reais, (a_j) e (b_k). Sejam $p, q \in]1, +\infty[$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então:*

$$\textbf{Hölder:}\quad \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

$$\textbf{Minkowski:}\quad \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Demonstração. Considere a_j, $b_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Para a primeira desigualdade tome $A = a_k/(\sum_{j=1}^{n} a_j^p)^{1/p}$ e $B = b_k/(\sum_{j=1}^{n} b_j^q)^{1/q}$ na desigualdade de Young e some com $k = 1, \ldots, n$.

Não apresentamos aqui a demonstração da generalização da Desigualdade de Minkowski dada no teorema 11.2. ■

12. Problemas de Olimpíadas Internacionais

1969/6: Mostre que para todos os números reais $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, verificando $x_1 > 0$, $x_2 > 0, x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$, se tem

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Dá uma condição necessária e suficiente para que se tenha a igualdade.

1975/1: Sejam x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ números reais, tais que

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \text{ and } y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n.$$

Mostre que, se $z_1, z_2, \ldots, z_n$ é uma qualquer permutação dos números $y_1, y_2, \ldots, y_n$, então

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

1978/5: Seja $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ de números inteiros positivos todos distintos. Mostre que para todo o número natural n, $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1982/3: Considere a sucessão de números reais positivos $\{x_n\}$ verificando, $x_0 = 1$, e para todo o $i \geq 0$, $x_{i+1} \leq x_i$.

(a) Mostre que neste caso, existe $n \geq 1$ tal que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999.$$

(b) Nas condições do problema, dá um exemplo de uma sucessão que verifica

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4\,.$$

1984/1: Mostre que $0 \le yz+zx+xy-2xyz \le 7/27$, onde $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ são tais que $x+y+z=1\,.$

1985/6: Para cada $x_1 \in \mathbb{R}$, construímos uma sucessão $x_1, x_2, \ldots$ segundo a lei

$$x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)\,,\quad n\ge 1.$$

Mostre que existe exactamente um valor de x_1 para o qual $0<x_n<x_{n+1}<1$ $n\in\mathbb{N}\,.$

1987/3: Considere n números reais, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, verificando $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1.$ Prove que para todo o número natural $k\ge 2$ existem inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não todos nulos, tais que $|a_i|\le k-1$ para todo o i e

$$|a_1x_1+a_1x_2+\cdots+a_nx_n|\le\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}\,.$$

1988/4: Mostra que o subconjunto dos números reais x que verificam a desigualdade

$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\ge\frac{5}{4}$$

é a união de intervalos disjuntos, cuja soma dos diâmetros é 1988.

Observação: Nota que o diâmetro de um conjunto é a maior distância entre dois quaisquer pontos desse conjunto.

1994/1: Sejam m e n números inteiros positivos. Considere os elementos distintos dois a dois $a_1, a_2, \ldots, a_m \subset \{1,2,\ldots,n\}$ tais que $a_i+a_j\le n$ para algum i, j, $1\le i\le j\le m$, existe k, $1\le k\le m$, com $a_i+a_j=a_k$. Mostra que

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\ge\frac{n+1}{2}\,.$$

1995/2: Considera os números reais positivos a, b, c tais que $abc=1$. Mostra que

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}\,.$$

1997/3: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais verificando

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|=1$$

e $|x_i|\le\dfrac{n+1}{2}\qquad i=1,2,\ldots,n\,.$

Mostra que existe uma permutação $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|\le\frac{n+1}{2}\,.$$

1999/2: Considere o número inteiro n maior do que ou igual a 2.

(a) Determine a menor constante C tal que se tem a desigualdade para todos os números reais positivos ou nulos $x_1, \ldots, x_n$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C \left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right)^4 .$$

(b) Para esta constante C, determina quando se tem a igualdade.

2001/2: Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ verificando, $a' = \sqrt{a^2 + 8bc}$, $b' = \sqrt{b^2 + 8ca}$, $c' = \sqrt{c^2 + 8ab}$. Mostre que $a/a' + b/b' + c/c' \ge 1$.