Dedicado a mis hermanos Enrique y Luis.
A través de ellos, hace ya unos cuantos años,
tuve ocasión de empezar a conocer la Geometría.

M A T E M Á T I C A S

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON MATERIALES DIVERSOS.

EXPERIMENTOS DE GEOMETRÍA

Miguel de Guzmán

54 páginas · segundo envío · Abril 1.986

I N D I C E

Dibujos: Ignacio Muñoz

PRESENTACIÓN

Este material está enmarcado en el apartado "Construcciones geométricas con materiales diversos", y al igual que el documento enviado anteriormente, se trata de un material de trabajo, dirigido tanto al profesorado del Ciclo Superior de E.G.B. como al de EE.MM., como apoyo a la propuesta de trabajo de Geometría.

El documento está estructurado en capítulos independientes. En ellos se recogen ideas o sugerencias que el profesor debe adaptar al nivel o curso concreto en el que se encuentre trabajando.

A este respecto se advierte que en ocasiones, algunos de los temas tratados pueden parecer adecuados solamente para las EE.MM., con excesivo nivel para ser empleados en E.G.B. Ahora bien, ¿acaso el alumno de E.G.B. no es capaz de encontrar propiedades de forma manipulativa?, ¿es que no puede construir modelos para "demostrar" dichas propiedades?

Creemos que el abordar así en clase, alguno de los temas a primera vista más arduos, por ejemplo el de la cicloide, conducirá a revisar esta posición y además, aunque la cicloide no esté incluida en los programas vigentes, su estudio puede desarrollar en los alumnos la capacidad deductiva e investigadora, encontrando formas alternativas de demostración de las propiedades, algunas tan curiosas e interesantes que llaman la atención y suscitan el interés inmediato del alumno. También se puede considerar la cicloide como un magnífico ejemplo para potenciar la capacidad "espacial" de los alumnos (en este caso en el plano); el profesor puede hacerles descubrir su forma a partir de ejemplos más sencillos, como la trayectoria descrita por el vértice de un triángulo, un cuadrado, etc., al "girar" sobre una recta.

Otros capítulos también animan a encontrar propiedades geométricas sencillas y a demostrarlas de forma poco tradicional, bien utilizando la papiroflexia, o mediante el genial método de Arquímedes para hallar la fórmula del volumen y superficie de una esfera.

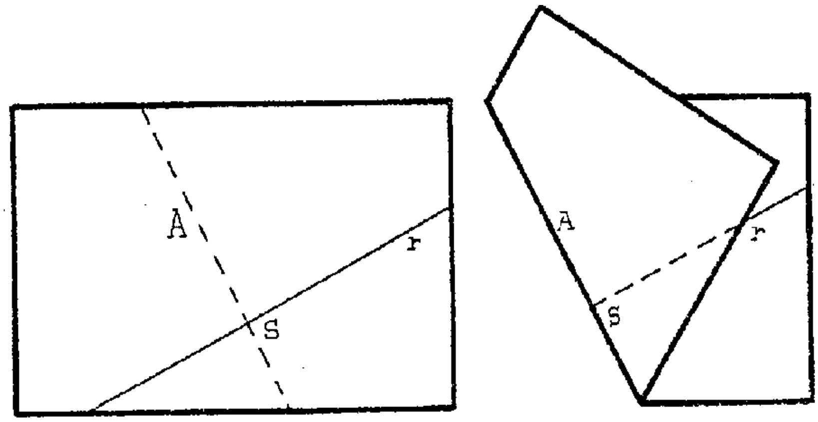
Hay varios apartados preparados para que el alumno aprecie nuevas estrategias, unas veces en la forma de contar (diagonales, puntos de corte de diagonales) y otras en las formas de unir un conjunto de puntos, problema topológico que nos lleva a la cinta de Möbius y sus propiedades.

Por último, los apéndices con los que se cierra este trabajo, dado su nivel de complicación, no están diseñados para llevarlos al aula (quizás en casos excepcionales en C.O.U.), sino que tienen un interés exclusivo para el profesor que quiera ampliar su información.

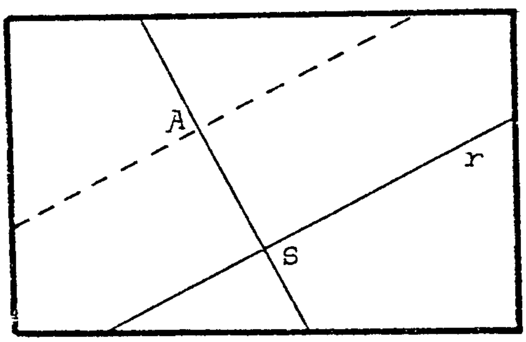
GEOMETRIA DEL PLIEGUE

Euclides no tenía para sus clases en Alejandría la abundancia de papel que nosotros hoy disfrutamos. Pero seguro que de haber dispuesto de papel lo hubiera utilizado bien a fondo. ¿Qué se puede hacer plegando papel? Muchas cosas, como verás, y muy interesantes.

Señala una recta en tu hoja, plegando el papel. Señala un punto cualquiera en el papel. ¿Cómo trazar la perpendicular por A a tu recta r? Muy fácil. Pliegas el papel de modo que el pliegue pase por A y que r venga a coincidir consigo misma, como indica la figura. Esto es fácil de conseguir haciendo intentonas y no plegando fuerte hasta que estés seguro de que al hacerlo va a suceder lo que tú quieres. Al desplegar el papel es claro que los ángulos en S son iguales y rectos, ¿no?

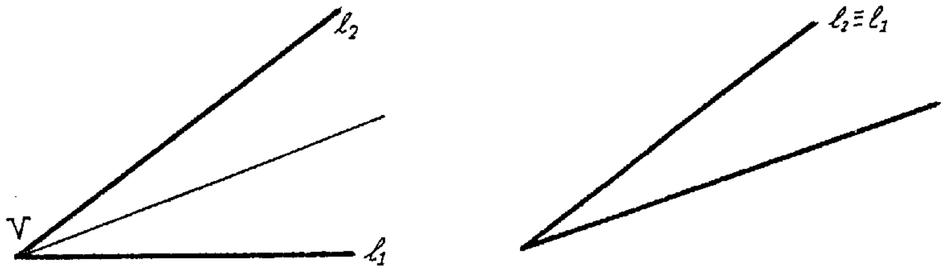


¿Cómo trazas una paralela por A a r? Ahora es fácil. Piensa... No tienes más que trazar una perpendicular por A a AS y ya la tienes, el pliegue que resulta es paralelo a r.

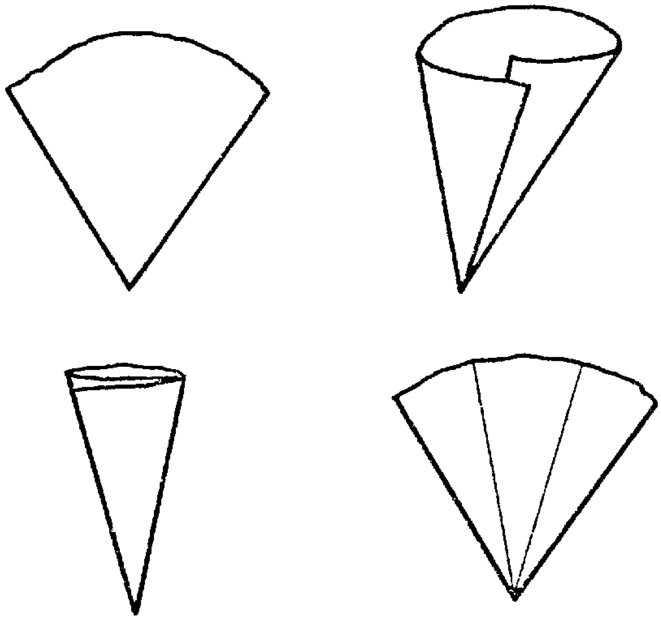


Tienes dos puntos M y N en tu hoja. ¿Cómo vas a hallar el punto medio? Apenas tendrás que pensarlo. Pliegas por MN. Despliegas y luego pliegas de nuevo de modo que M coincida con N. Se forma un pliegue nuevo y la interesección de los dos pliegues te da el punto medio.

Señala un ángulo en tu papel. ¿Cómo trazar la bisectriz? Está claro que sólo tienes que hacer un pliegue por elvértice V de modo que el lado l_1 vaya a coincidir con el otro l_2. El pliegue te da la bisectriz claramente.

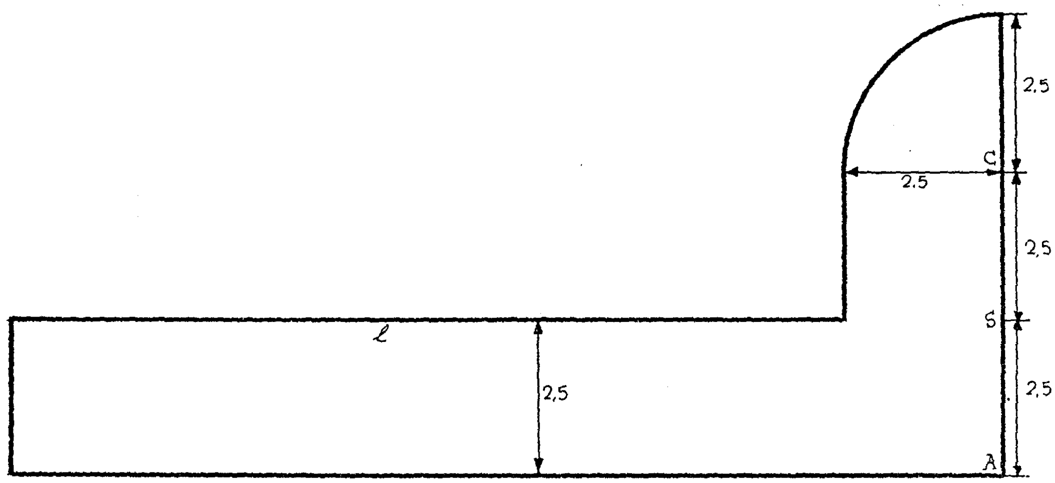


Trazando la bisectriz ya sabes cómo dividir un ángulo en dos partes iguales, y repitiendo el proceso, en cuatro partes. Con el papel puedes resolver un problema famoso que a los griegos produjo muchos quebraderos de cabeza: dividir un ángulo dado en tres partes iguales. Inténtalo por tu cuenta. ¿Cómo lo harás en tu papel? Seguro que se te ocurre. Recortas el ángulo, formas un cucurucho, un cono cuyo vértice sea el del ángulo y ajustas los lados del ángulo de tal forma que al aplastar el cucurucho salgan dos pliegues que coincidan con los lados. Formar bien el cucurucho no es cosa del todo fácil. Debe proceder por intentonas, abriendo más o menos el cucurucho antes de aplastar para que se formen los pliegues adecuadamente como indican las figuras.

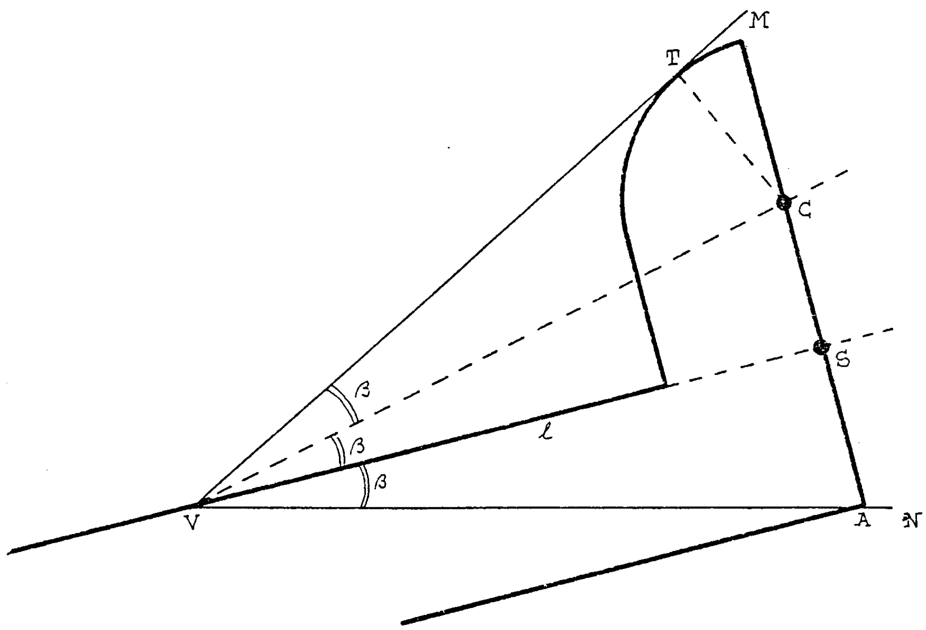


Está bastante claro que si al aplastar has conseguido que los pliegues queden de esa manera, entonces al desplegar los tres ángulos formados son iguales y así has dividido el ángulo en tres partes iguales.

Los griegos se construyeron instrumentos especiales para dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. ¿Por qué no te haces uno tú mismo? Es muy fácil. En una cartulina recorta una figura con el patrón siguiente.



Esta figura está construída como se indica. El arco de la punta es un arco de circunferencia con centro en C. Ahora si te dan un ángulo cualquiera como éste MVN, colocas tu instrumento como te indico, de modo que 1 pare por el vértice V, A esté sobre el lado inferiro del ángulo dado y el arco de circunferencia de arriba quede tangente al otro lado. Entonces señalas en el papel del ángulo de los puntos donde van a parar S y C. Si T es el punto de tangencia, te será muy fácil demostrar que los tres triángulos rectángulos VTC, VCS y VSA son iguales y así los tres ángulos señalados en V son iguales. Has dividido el ángulo dado en tres partes iguales.



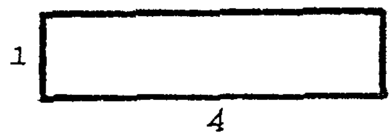
Los griegos del siglo III a. de C. conocieron este instrumento pero no les satisfacía. Querían una solución del problema de la trisección que no utilizara más que la regla y el compás de la forma normal. No lo sabían..., pero pedían demasiado. En el siglo XIX se logró demostrar que tal construcción es imposible. ¿Cómo? A grandes rasgos, se hizo así:

El problema de dividir un ángulo cualquiera con regla y compás es equivalente al problema de construir con regla y compás un segmento cuya longitud es solución de una cierta ecuación de tercer grado a partir de segmentos de longitud igual a los coeficientes que aparecen en esta ecuación de tercer grado. Se observa a continuación que, con regla y compás, a partir de longitudes a_1, a_2, ..., a_n dadas sólo se puede construir segmentos cuya longitud se expresa mediante expresiones algebraicas (polinomios divididos por polinomios) de las longitudes dadas posiblemente junto con raíces cuadradas de tales expresiones. Se comprueba finalmente que la solución de la ecuación cúbica inicial no puede expresarse mediante ninguna expresión de este tipo. Así no se puede construir sólo con regla y compás.

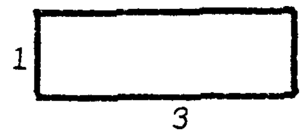
De esta misma forma se llegó a demostrar también que el famoso problema de Delfos (construir, sólo con regla y compás, un cubo de volumen doble que otro dado) era igualmente imposible.

EN BUSCA DEL MEJOR FOLIO

El rectángulo y el cuadrado tienen bastantes cosas en común, pero al mismo tiempo tienen otras que los distinguen bien claramente. Si dices a un amigo: -"Dibújame un rectángulo"- y te contesta: -"¿Lo quieres grande o pequeño, gordo o delgado?"-, no te extrañas. Pero si le dices: -"Dibújame un cuadrado"- y te contesta: -"¿Lo quieres gordo o delgado?"-, entonces pensarás que no ha entendido bien lo que es un cuadrado. Los cuadrados pueden ser grandes o pequeños, pero no pueden ser más delgados o más gordos. ¿Sabes dónde está la diferencia? Para cualquier cuadrado la proporción entre sus lados es 1. Los rectángulos pueden tener una propoprción cualquiera entre los lados desiguales.



Proporción : 1/4



Proporción : 1/3

Decir forma cuadrada es decir mucho. Decir forma rectangular es decir menos. Y menos aún es decir forma rectangular. Vamos a entretenernos con algunas formas rectangulares que aparecen en la vida nuestra de cada día.

¿De qué forma se debe cortar una hoja de papel? Parece que eso depende de lo que se pretenda hacer con ella. Está claro... pero una buena idea es cortar el papel en forma rectangular, naturalmente, pero de modo que al dividir en dos el rectángulo resulten dos rectángulos cuyos lados tengan la misma proporción entre sí que los del primitivo, es decir de tal modo que se conserve la forma. Así, si queremos partir estos dos rectángulos otra vez por la mitad, nos saldrán cuatro rectángulos de la misma forma exactamente, etc. Al partir en dos no nos salimos nunca de la misma forma de rectángulo. ¿Habrá algún rectángulo con esta curiosa propiedad?

La hoja en la que escribí el borrador es, aproximadamente, de 21cm. x 29,7 cm. La proporción entre el lado mayor y menor es de 29,7/21=1,41.
Si divido la hoja por la mitad me salen dos hojas de 14,85cm. x 21 cm. y ahora la proporción es de 21/13,85=1,41.
Es curioso.

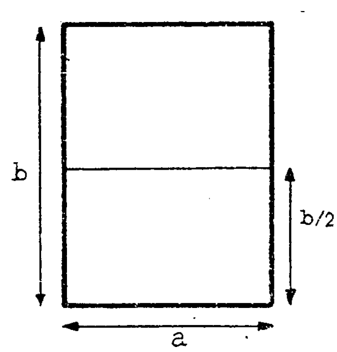
Me han enviado un artículo en un tipo de hoja distinta de la mía. Voy a ver si tiene la misma propiedad. La hoja mide 21,5 cm. x 31,5 cm. La proporción es de 1,46. Si divido por la mitad me salen dos hojas de 15,75 x 21,5 y la proporción es 1,36. Así no tiene la misma propiedad que la primera, la mía. Sin embargo, si divido las que me han salido en último lugar por la mitad, me salen cuatro hojas de 10,75 x 15,75 y la proporción del lado mayor al menor es 1,46... ¡Igual que la hoja con la que empecé! ¿Es esto último de verdad muy sorprendente? Piensa un poco... En realidad lo que estoy comprobando es que

$$\frac{15.75}{10.75} = \frac{2 \cdot x \cdot 15.75}{2 \cdot x \cdot 10.75} = \frac{31.5}{21.5}$$

Así no tiene nada de sorprendente, sucede para cualquier hoja rectangular, que al dividir dos veces resulte la misma proporción entre los lados. Pero sí que es algo especial que esta proporción se repita siempre.

La hoja en la que yo escribo normalmente está hecha así con toda intención. El tamaño especial que tiene se llama DIN A-4. La del artículo que me han mandado es tamaño folio. Observa que en una hoja DIN A-4, sale el número 1,41. Tal vez te suene algo. El número es aproximadamente: $\sqrt{2}$ = 1,4142135... ¿Por qué? Piensa un poco.

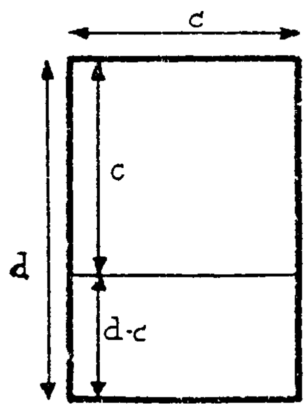
Tú quieres un rectángulo a x b tal que al cortar en dos (línea de puntos de la figura) resulten dos rectangulos con los lados en la misma proporción, es decir, lado mayor/lado menor debe resultar el mismo número en los rectángulos pequeños que en el grande. Así tendrá que ser $\frac{b}{a} = \frac{a}{\frac{b}{2}}$ Por tanto $b^2 = 2a^2$ y así b/a = $\sqrt{2}$.



El misterio queda aclarado.

Suponte que quisieras ahora una hoja rectangular con otra propiedad curiosa. Al quitarle un cuadrado, como se indica en el dibujo siguiente, debe quedar otro rectángulo con la mismísima forma del rectángulo original. ¿Cuál debe ser la proporción c/d para que esto pase? Mira al dibujo. Parece fácil ¿no?

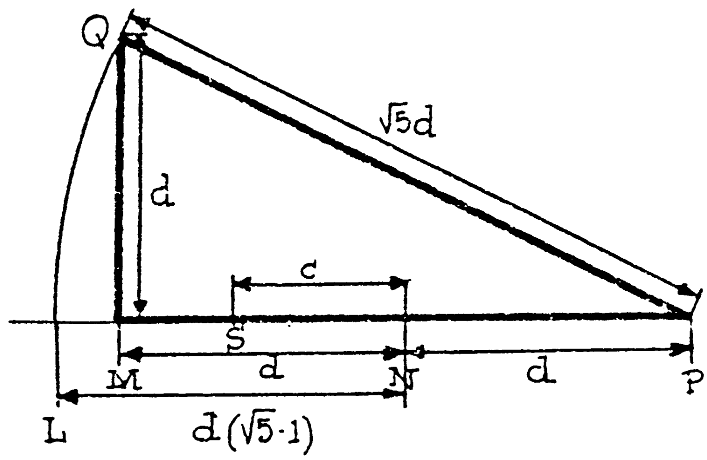
Tiene que ocurrir $\frac{d}{c} = \frac{c}{d - c}$. Así $c^2 + cd - d^2 = 0$ y por tanto $c = d \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, ($\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ = 0,618033...)



Cuando dos longitudes se comportan como c y d, es decir, la longitud mayor, d, es a la menor, c, como ésta es a la diferencia, d-c, se dice que c es la *sección áurea* de d. Los griegos pensaban, no sin razón que un rectángulo con estas proporciones es particularmente agradable a la vista y los artistas griegos y posteriores han utilizado con profusión esta proporción áurea en la arquitectura, escultura, etc... El rectángulo así construído se suele llamar *rectángulo áureo* y el triángulo isósceles tal que los lados mayores son igulaes y el desigual, más pequeño, es sección áurea de ellos, se llama *triángulo áureo*. Nos lo encontramos más adelante en diversas circunstancias, así que más vale que aprendas a construir la sección áurea de un segmento dado.

Por las cuentas que antes hemos hecho tú sabes que $c = d \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Esto te da una pista. ¿Cómo construyes $d \cdot \sqrt{5}$? Observa que $d \cdot \sqrt{5} = \sqrt{((2 \cdot d)^2 + d^2)}$
Con esto te será clara la construcción siguiente, si te dan d.



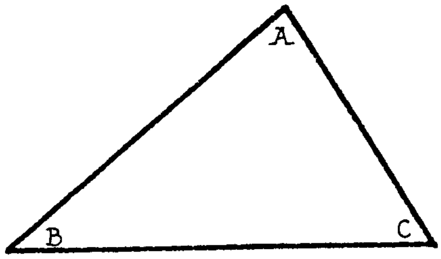
Si d es el segmento MN, lo prolongas otro tanto hasta P, levantas una perpendicular a MP en M y tomas Q tal que MQ = d. Entonces (Pitágoras) PG= $d \cdot \sqrt{5}$. Con centro en P trazas el arco QL y así resulta claramente que

NS = $c = d \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

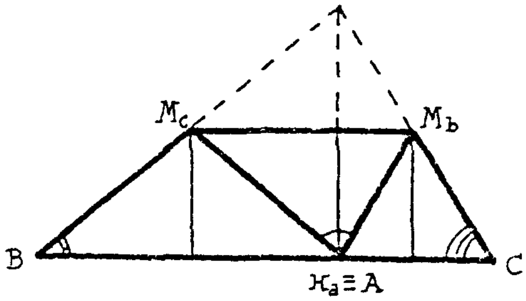
Hazte con unos cuantos rectángulos áureos y triángulos áureos y experimenta un poco con ellos sus áureas propiedades. El triángulo es aún más entretenido y original que el rectángulo. ¿Cuánto te parece que miden sus ángulos? ¿Qué le pasa si lo cortas a lo largo de la bisectriz de uno de los ángulos iguales?

UN POCO DE GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

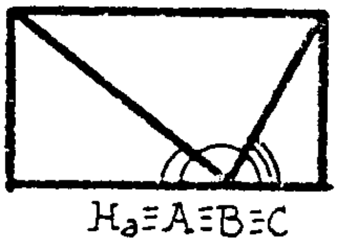
Coge una cuartilla y unas tijeras. Recorta un triángulo bastante grande, que no sea demasiado regular, ni equilátero, ni isósceles, ni rectángulo... Algo parecido a éste pero en grande



Para no liarnos con los vértices, ponles letras A, B, C. Vamos a aprovechar lo que sabemos hacer plegando, para demostrar unas cuantas propiedades del triángulo. Traza la perpendicular a BC por A, es decir, la altura correspondiente al vértice A. El pie se va a llamar H_a. Pliega el triángulo por la mitad de la altura de modo que A vaya a coincidir con H_a. Así



Ahora comprueba que puedes plegar por M_c de modo que B vaya a parar a H_a. ¿Podrías demostrar que efectivamente se tiene que poder plegar así? Sólo se trata de utilizar la igualdad de unos cuantos triángulos. Así te ha quedado

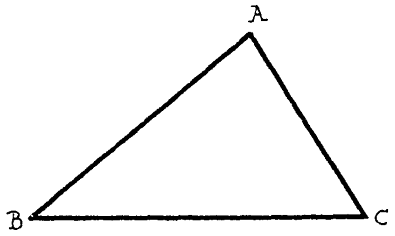


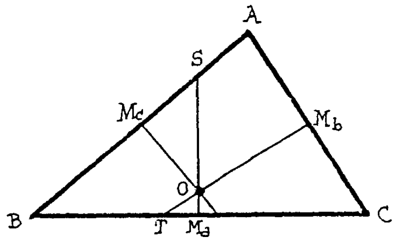
¿Qué observas? Los ángulos A,B,C, que han quedado ahora con sus vértices coincidiendo en Ha, suman claramente 180º y el área del triángulo ABC es el doble de la del rectángulo que has obtenido, es decir

área triángulo ABC = 2 x base rectángulo x altura rectángulo = (1/2) base triángulo x altura triángulo

No es un descubrimiento muy llamativo, pero vamos a seguir haciendo otros.

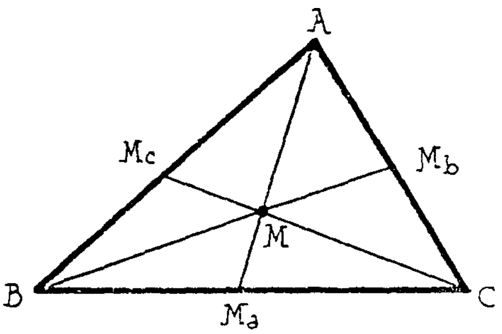
Recorta otro triángulo como el de antes para no armarte un lío con los pliegues que en él has hecho, porque ahora vamos a hacer muchos más y más interesantes. Traza con un pliegue la mediatriz correspondiente al lado BC. No tienes que hacer más que un pliegue que haga coincidir B con C. Traza del mismo modo las mediatrices de los otros dos lados. A mí me queda así





¿Qué observas?... ¡Las mediatrices se cortan en un punto! ¿Sabrías demostrar que esto no es una casualidad, que tenía que ser así? Recuerda: M_aS es mediatriz de BC. ¿Qué propiedad tienen todos sus puntos? Todos, como M_a, están a igual distancia de B que de C. Los de la mediatriz M_bT de AC están a la misma distancia de A que de C. Así el punto O, intersección de las dos mediatrices, está a igual distancia de los tres vértices. Pero si está a igual distancia de B que de A es que está sobre la mediatriz de AB. Por lo tanto, las tres mediatrices pasan por O y así queda resuelto el misterio. Además O está a la misma distancia de los tres vértices y es, por tanto, el centro de una circunferencia que pasa por A,B,C. ¿Tienes un compás a mano? ¡Compruébalo!

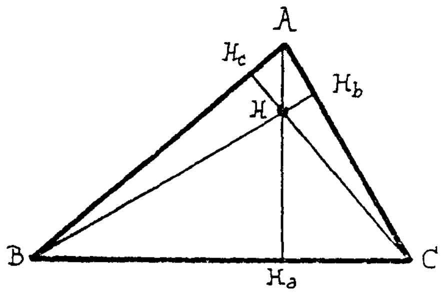
Vamos a seguir haciendo experimentos. Como ya tienes los puntos medios de los lados, que hemos llamado Ma, Mb y Mc, podemos, en el mismo triángulo, trazar las medianas fácilmente mediante pliegues. Pliega primero de modo que el pliegue contenga A y Ma, el pliegue que resulta es la mediana Ma. Pliega para obtener las otras dos. A mí me resulta algo así



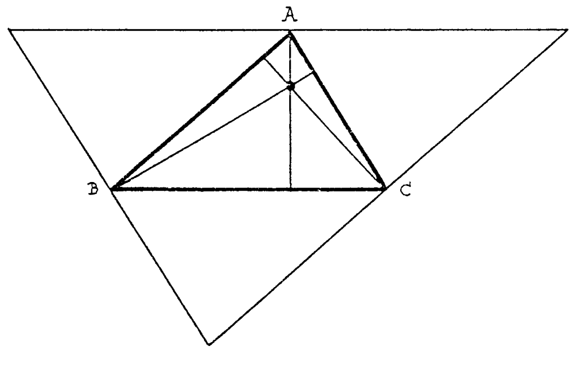
¿Qué observas?... ¡Las tres medianas se cortan en un punto! Llámalo M. Ese punto se suele llamar <u>*baricentro*</u>. Eso de <u>*bari*</u> tiene que ver con barómetro, con la presión y con el peso. Verás por qué. Alisa bien tu triángulo y recórtalo. Coloca tu lápiz vertical con la punta hacia arriba y sobre la punta de tu lápiz coloca tu triángulo horizontal de modo que M quede exactamente sobre la punta. ¡Tu triángulo queda en equilibrio horizontalmente sobre la punta de tu lápiz! (A menos que hayas hecho una chapuza horrible con los pliegues anteriores) El punto M es el único con esta propiedad, es el centro de gravedad de tu triángulo.

Plancha bien tu triángulo. Con la punta de tu lápiz bien afilado hazle un agujero cerca del vértice A y deja colgar el triángulo pinchado en él. Verás que la línea vertical que pasa por tu agujero viene a ser precisamente la que une el agujero al punto M. Lo mismo pasa con cualquier otro punto donde hagas el agujero. El punto M es el centro de todo el peso del triángulo. Sucede como si todo el triángulo tuviese concentrado su peso en el punto M. Por eso cuando pusiste el triángulo horizontal sobre tu lápiz con la punta en M, el triángulo no sabía hacia qué lado caerse y así se quedaba en equilibrio.

En tu triángulo ABC tienes ya muchos dobleces. Vamos a hacer unos cuantos más antes de mandarlo a la papelera. Pliega para trazar las tres alturas, como hicimos al principio. Así



¡También las tres alturas se cortan en un punto! Vamos a llamar a ese punto H. Se denomina el ortocentro del triángulo. ¿Por qué tendrá que ser así? Con un poco de astucia resulta sencillo. Observa la figura siguiente obtenida trazando por A la paralela a BC, por B la paralela a AC y por C la paralela a AB.



¿Qué observas?... Las alturas son las mediatrices de los lados del triángulo que ha resultado. Como las mediatrices de cualquier triángulo se cortan en un punto, nuestras alturas se cortan en un punto.

Hemos obtenido tres puntos O (el circuncentro, centro de la circunferencia circunscrita al triángulo), M (baricentro) y H (ortocentro). ¿Cómo están dispuestos estos tres puntos? Pliega tu triángulo por MH. ¿Qué pasa? ¡El pliegue pasa también por O! Esa recta se llama *la recta de Euler*, que parece que fue quien primero descubrió esta propiedad de alineamiento de

O, M y H.

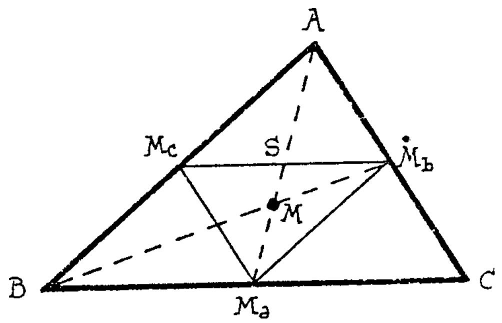
Si tienes por ahí una regla, haz unas cuantas medidas conmigo.

- Mide MM_a
- Mide M_aA
- Mide MM_b y M_bB. Mide MM_c y M_cC.

¿Observas algo curioso? Probablemente no. Pues mira a ver si resulta $M_aA = 2MM_a$, $M_bB = 2MM_b$, $M_cC = 2MM_c$.

Mide ahora OM y MH y observa que MH = 20M.

Todos estos misterios se aclaran fácilmente con lo que probablemente sabes sobre triángulos semejantes y homotéticos. Fíjate en la figura siguiente



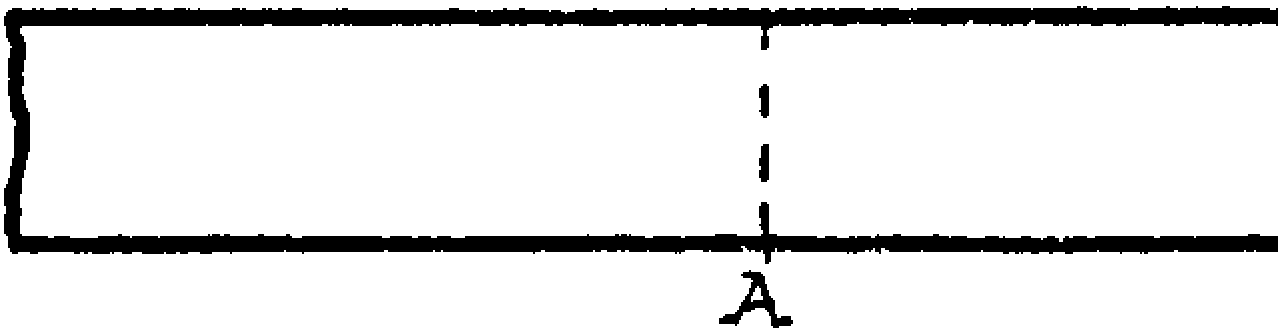
Fácilmente podrás comprobar que M_cMb es paralelo a BC y M_cM_b es paralelo a BC y $M_cM_b = 1/2$ BC. Lo mismo sucede con los otros lados del triángulo pequeño $M_aM_bM_c$.

Como M_aS es la medianta de $M_aM_bM_c$ correspondiente a M_a, resulta que $M_aS= 1/2\ AM_a$ y $MS = 1/2\ MM_a$ (M es el punto donde se cortan BM_b y AM_a). Así resulta fácilmente $MM_a = 2MS$ y por tanto (segmentos correspondientes en el triángulo grande ABC) $MA = 2\ MM_a$. Así resulta que MM_b corta a AM_a en M que está a doble distancia de A que de M_a. Haciendo lo mismo con M_cC, resulta que CM_c corta también a AM_a en un punto que está a doble distancia de A que de M_a, es decir, corta a AM_a en el mismo M de antes. Por tanto, las tres medianas se cortan en un punto M. Hemos demostrado con esto lo que antes habíamos comprobado con nuestros pliegues.

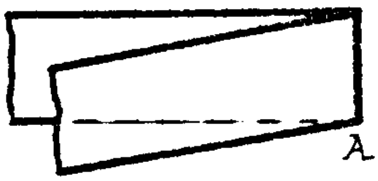
LA TIRA DE GEOMETRÍA EN LA TIRA DE PAPEL.

Hazte, si puedes, con un buen trozo de esos rollos de papel que se emplean en las máquinas registradoras de cobrar dinero. O si no, hazte tú mismo una tira de papel larga, como de 4cm. de anchura, pegando tiras cortadas de una hoja de papel. Procúrate unas tijeras y papel celo. Porque vamos a hacer la tira de geometría con tu tira de papel.

Para empezar, piensa un poco. ¿Cómo te harías un cuadrado con tu tira solamente plegando?... Fácil, ¿no?

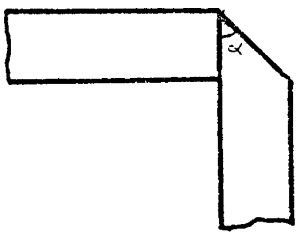


Pliega por A y así resulta un pliegue perpendicular. Queda del modo siguiente



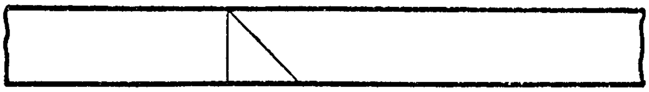
Al desplegar resulta marcado el pliegue perpendicular

Pliega ahora así

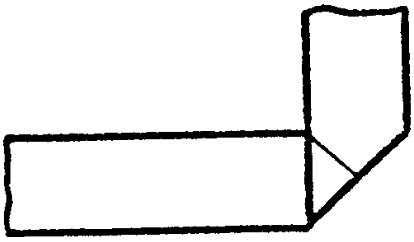


Observa que el ángulo es de 45º

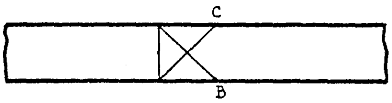
Despliega y observa que tienes estos pliegues



Ahora ya está claro. Pliegas así

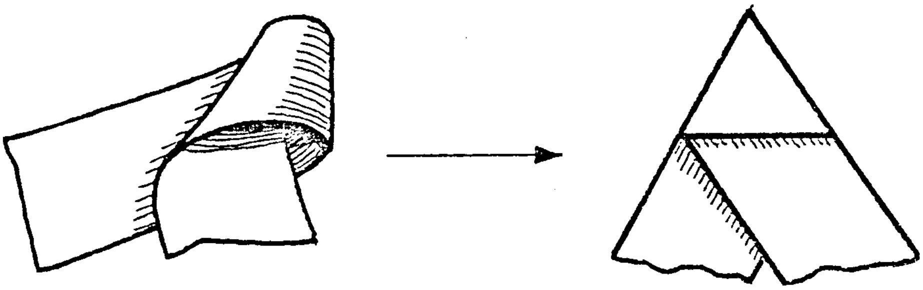


Y al desplegar tienes esto

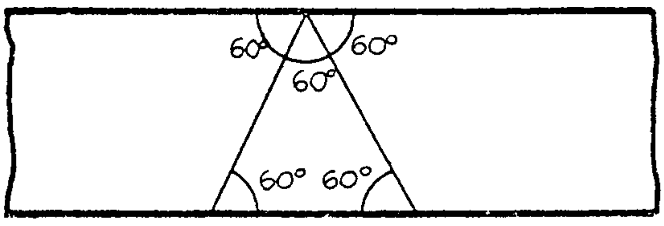


Pliegas por los puntos B y C y te resulta el cuadrado.

Ahora piensa otra vez. ¿Cómo hacerte con un triángulo equilátero? Seguro que se te ocurre, pues ya sabes cómo dividir un ángulo en tres partes iguales plegando el papel. Tanteando un poco puedes formar primero un cucurucho y luego dos pliegues con los que la tira te va a quedar así



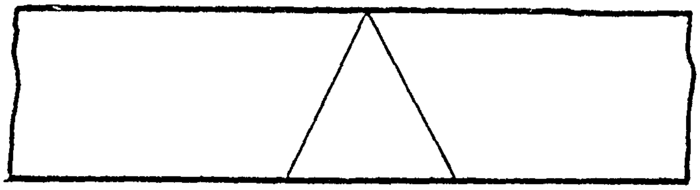
Observa que en la tira plegada hay dos pliegues que determinan (por coincidir tres ángulos iguales alrededor del vértice). Al desplegar queda la cosa así



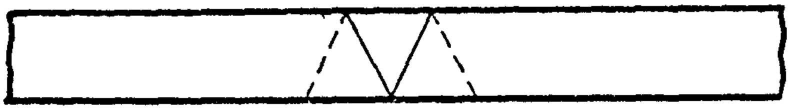
y por la igualdad de ángulos determinados por paralelas, resulta que los ángulos señalados por los pliegues en la parte baja de la tira son también de

60º. Así obtienes un triángulo equilátero.

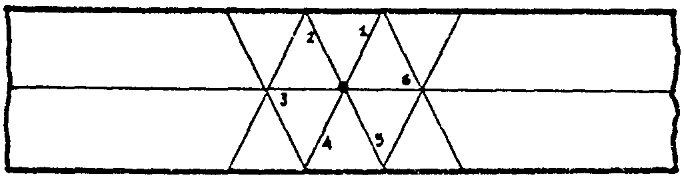
Ya tienes el cuadrado, el triángulo equilátero... ¿más polígonos regulares? El exágono es fácil, una vez que tienes el triángulo equilátero. Tienes la tira así



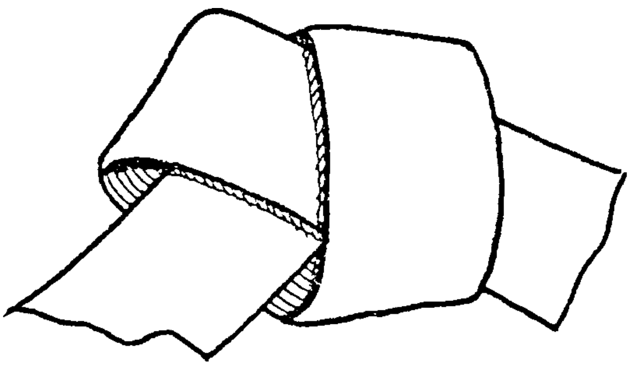
Doblas por la mitad y te resulta así



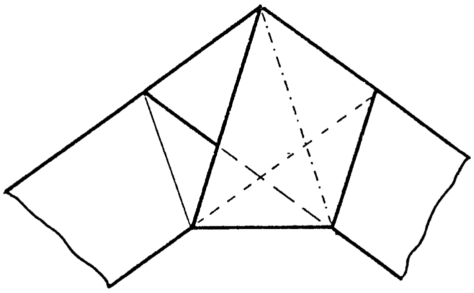
Ahora pliegas unas cuantas veces por los pliegues que han quedado señalados de antes y verás cómo al desplegar te resulta el exágono con los radios y el centro señalados de esta forma



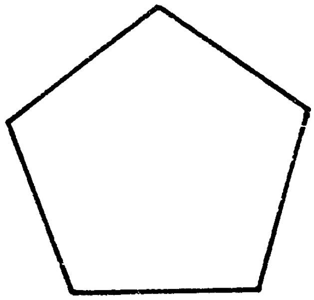
Vamos a seguir con nuestra colección de polígonos regulares. A por el pentágono. Este es un poco más rebuscado. ¿Se podrá hacer con la tira? ¿Qué más podemos hacer con la tira? Piensa, piensa... Después de mucho pensar, es posible que no se te ocurra nada más que hacerte una corbata con la tira y... ¡mira por dónde! ésa es la pista para el pentágono regular. Haz un nudo con la tira, sólo plegando, sin arrugarla, primero así



y luego plegando con cuidado hasta que quede del siguiente modo

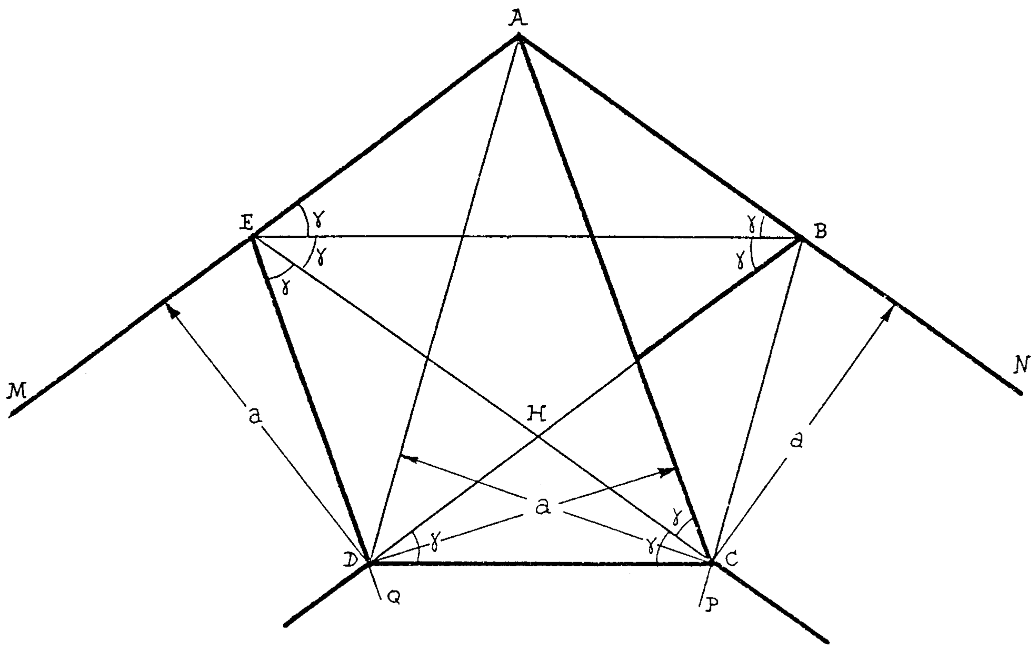


En puntos van las partes del borde de la tira que no se ven. Ahí tienes el pentágono regular, recortando la tira y pintando sólo los bordes.



¿Sabrías demostrar que efectivamente todos sus lados y todos sus ángulos son iguales? Aquí tienes un esquema de la demostración, pero si te aburre déjalo para otro momento y pasa adelante.

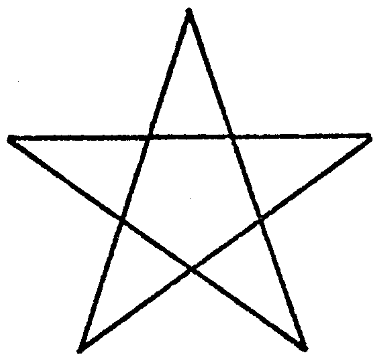
Esquema de la demostración de que anudando la tira de papel resulta un pentágono regular. Partimos de que la tira tiene sus bordes paralelos y de que hemos logrado plegarla de la forma que se indica en la figura.

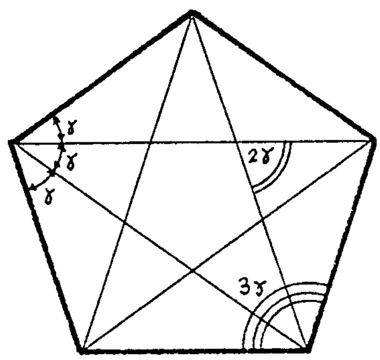


Con facilidad, usando el hecho de que la anchura de la tira es a, constante, podrás demostrar primero que AC y AD son simétricos respecto de la mediatriz de DC. Asímismo, son simétricas, usando el mismo hecho, las rectas AM y AN. Y también CP es simétrica de DQ. Por tanto AE = AB y, además, son simétricas respecto de la mediatriz de DC. Con esto queda demostrado que ED = BC y que EB es paralela a DC. Como ABHE es rombo resulta AEB = HEB. De modo parecido se demuestra AD = DB y AE = BC por simetría respecto de la mediatriz de AB. Así ED = DC y HED =BED = γ. Con esto resulta ya fácilmente que todos los ángulos del pentágono son iguales y los lados también y que γ = 36º.

<u>LAS PITAGÓRICAS MARAVILLAS DEL PENTAGONO REGULAR.</u>

El pentágono regular es una de las figuras con más miga de toda la historia antigua de la matemática. Si trazas sus diagonales obtienes el pentagrama pitagórico, la figura que los seguidores de Pitágoras utilizaban en el siglo VI a. de C. para reconocimiento mutuo y como símbolo de salud.

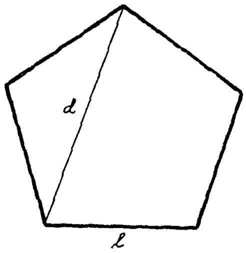




Al formar la estrella pitagórica, en el centro se forma otro pentágono regular. Si mides los ángulos que se forman en el pentágono señalados en la figura anterior observarás una cosa curiosa: si por abreviar llamas γ al ángulo de 36º resulta que todos los ángulos que aparecen miden un múltiplo entero de γ, como está indicado.

A los pitagóricos, que eran grandes devotos de las proporciones exactas, esto les tuvo que sumir en un profundo éxtasis y de ahí su veneración por el pentagrama. Y esta misma idea de tratar de encontrar proporciones exactas entre magnitudes geométricas les llevó por primera vez, como sospechan los historiadores de la matemática, mediante el pentágono regular precisamente, a uno de los descubrimientos matemáticos más importantes, el de la inconmensurabilidad de ciertos segmentos. Verás en qué consiste esto.

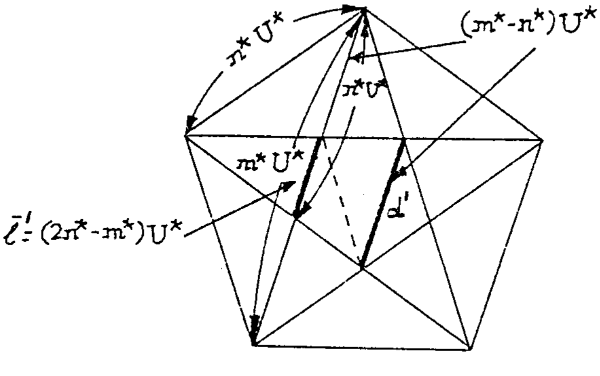
Era natural para los pitagóricos esperar que en una figura tan perfectísima como el pentágono regular, el lado *l* y la diagonal *d* fuesen conmensurables, es decir, que admitiesen una unidad de medida común, o en otras palabras, que existiese un segmento *u* más pequeño que *d* y *l* con el que *l* y *d* se pudieran medir a la vez, es decir, que *d* resultase ser *m* veces *u* y *l* fuese *n* veces *u*, siendo *m* y *n* números enteros.



¿Ocurrirá que $d = mu$, $l = nu$ siendo *m* y *n* números enteros?

Si *m/n* no fuese una fracción irreducible, por ejemplo, *m=m´p, n=n´p,* entonces es claro quqe podemos tomar como segmento unidad *U=pu* y con esta unidad resulta que *d* mide *m´* veces *U* y *l* mide *n´* veces *U,* es decir *U* sirve también para medir *d* y *l.* Si todavía *m´* y *n´* tuviesen un factor común, podríamos tomar una unidad más grande. Como ves, si existe una unidad *u* que sirve para medir a la vez *d* y *l* en enteros, también existe una unidad *U** que sirve para medir *d* y *l* con *m** y *n** tales que *m*/n** es una fracción irreducible. Supongamos que existe tal *u* y que hemos tomado *U** por unidad. Así *d* mide *m*U** y *l* mide *n*U*,* siendo *m*/n** irreducible.

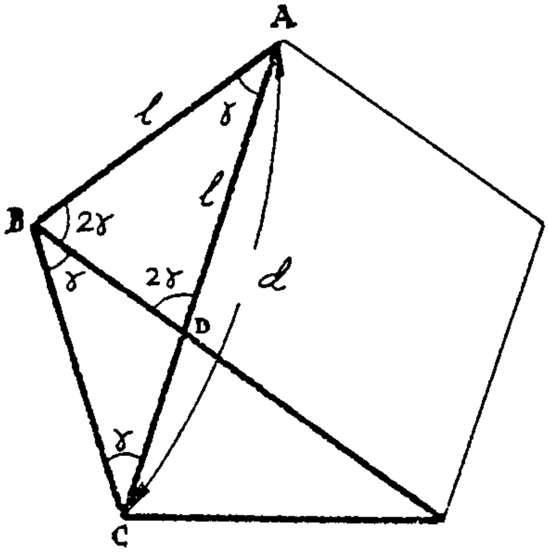
Pero ahora fácilmente, apoyándote en lo que sabes sobre los ángulos de la figura del pentágono y sus diagonales, observarás que las medidas de los segmentos indicados en la figura siguiente son las señaladas, en particular que la diagonal *d´* del pentágono regular interior resulta ser *(m*-n*) U** y el lado *l´* del mismo pentágono interior es *(2n*-m*) U*.* Como dos pentágonos regulares cualesquiera son semejantes, resulta que *d/l= d´l´* y, por tanto, *m*/n* = (m*-n*)/(2n*-m*),* lo cual quiere decir que *m*/n** no era irreducible, contra lo que habíamos supuesto.



Algo no casa. ¿Qué puede ser? Nuestro razonamiento es bueno. Entonces nuestro punto de partida tiene que ser malo. Habíamos partido de que existe *u* tal que $d=mu$, $l=nu$. Esto tiene que ser falso. En resumen, *d* y *l* no pueden ser conmensurables, es decir, no se puede encontrar una unidad u con la que se pueda medir a la vez *d* y *l* en números enteros.

La relación en la que se encuentran la diagonal y el lado del pentágono regular se puede obtener de nuestras cuentas anteriores. Tenemos que se verifica $d/l=m/n$ y aunque ya sabemos ahora que *m* y *n* no pueden ser enteros a la vez, sabemos que $d/l=m/n=(m-n)/(2n-m)$. Así, llamando $x=m/n$ resulta $x=m/n=(x-1)/(2-x)$. Por lo tanto, $x^2-x-1=0$, es decir x = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618..., un número que ya hemos conocido antes y que tiene que ver con la sección áurea de un segmento, como vas a ver ahora.

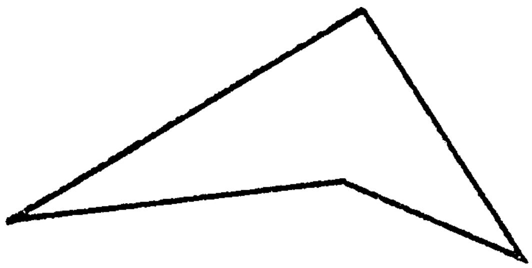
Como puedes observar en la figura siguiente,



resulta que los triángulos ABC y BDC son semejantes y así AC/AD=AC/AB=BC/DC, es decir, $d/l=1/(d-l)$, lo que quiere decir que AD, que es igual al lado, es sección áurea de la diagonal, lo cual, añadía otro encanto más del pentágono regular para los ojos pitagóricos. En realidad, con un poco más de esfuerzo, puedes comprobar que en el pentagrama y pentágono regular, cualquier segmento es sección áurea del que es inmediatamente mayor.

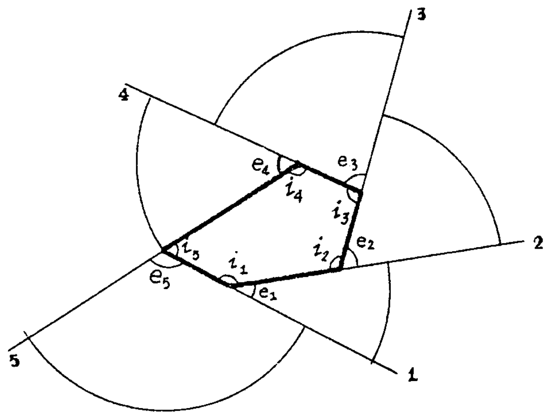
NUMEROS EN POLIGONOS

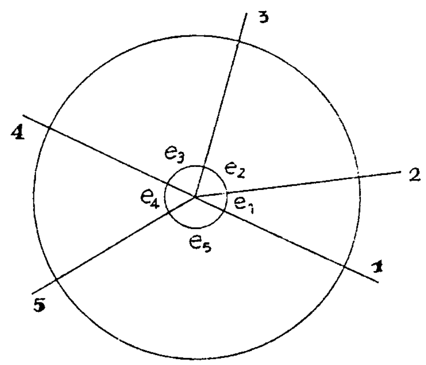
Un polígono convexo es aquél que no tiene entrantes, es decir, está todo él al mismo lado de cada uno de sus bordes. Un triángulo es un polígono convexo, un cuadrado también, pero este cuadrilátero no lo es



La suma de los ángulos de un triángulo es de 180º. La suma de los ángulos de un cuadrado o de un rectangulo es de *4x90º=360º=2x180º*. ¿Será 180 un número mágico para esto de los ángulos? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un pentágono convexo o de un polígono convexo de n lados?

Constrúyete un pentágono, mide con tu transportador de ángulos y suma. ¿Te sale más o menos 540º? Entonces has medido bien. Observa que *540º= 3 x 180º*. De nuevo el 180 por medio. ¿Por qué tendrá que ser así? Fíjate cómo van las cosas. Vamos a tratar de medir la suma de los ángulos exteriores, es decir, de los señalados en la figura siguiente

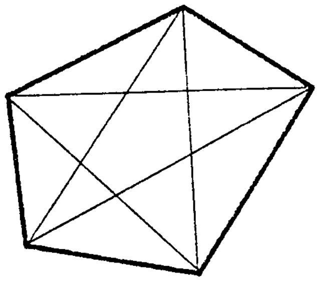


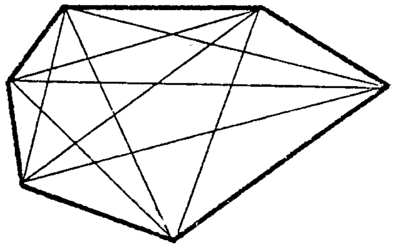


Con un compás y con radio 2 cm. señala bien los arcos cuya suma quieres medir. Observa. Si trasladas paralelamente todos los arcos hasta tener su centro en un mismo punto 0, está claro que cada uno empieza donde el otro termina y que entre todos forman una circunferencia entera. Así resulta que la suma de todos los ángulos exteriores es *360º=2x180º*. Y esto va a ser así también, haciendo lo mismo, cualquiera que sea el número de lados del polígono convexo que consideremos.

¿Cuál será ahora la suma de los ángulos interiores en el caso del pentágono? Es decir, ¿cuánto vale $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=S_i$? Observa que $i_1+e_1=180º$ y así $i_1=180º-e_1$.
Por tanto $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=5x180º-(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5)=5x180º-2x180º=(5-2)x180º$
Y exactamente del mismo modo, si tienes un polígono convexo de n lados, resulta que *la suma de los ángulos exteriores es de 2x180º* y *la suma de los ángulos interiores es de (n-2)x180º.*

Vamos a hacer más números. *¿Cuántas diagonales hay en un polígono convexo?* En un triángulo ninguna. En un cuadrado 2, en un rectángulo 2, en un pentágono convexo 5, en un exágono convexo 9, en un polígono convexo de 10 lados... muchísimas ¿no? Trazarlas y contarlas es un rollo.



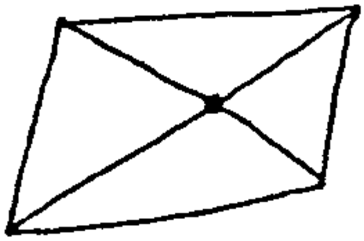


Vamos a ver si podemos averiguar sin contar. ¿Cuántas salen de cada vértice V de un polígono de 10 lados? Es claro que los segmentos que van a vértices distintos de V y que no son adyacentes son los que nos dan las diagonales. Adyacentes hay 2 y así las diagonales que salen de V son 10-3=7. ¿Quiere esto decir que habrá 70 diagonales? Parecen muchas ¿no? Si por cada vértice contamos 7, entonces cada diagonal queda contada dos veces, una por cada vértice que la diagonal une. Así resulta que el número de diagonales es la mitad de 70, es decir, 35. Hay 35 diagonales en el decágono convexo. ¿Y en el polígono convexo de n lados? Ahora ya sabes lo que hay que hacer. El número de diagonales será $\mathbf{n(n-3)/2=d_n}$

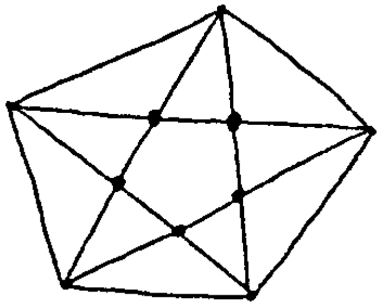
Comprueba que efectivamente si n=3, $d_3=0$; si n=4, $d_4=2$; n=5, $d_5=5$....Sin necesidad de contar sabemos que si n=20, $d_{20}=170$.

Otra cuenta interesante. Tienes un polígono convexo de n lados. Supongamos que al trazar las n(n-3)/2 diagonales no hay tres que pasan por un mismo punto que no sea vértice. *¿Cuál es el número de puntos interiores que quedan determinados por intersección de las diagonales?*

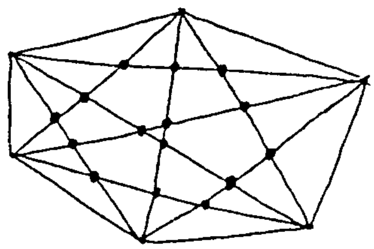
Vamos a contar un poco, pintando



$n=4$ $P_4=1$



$n=5$ $P_5=5$



$n=6$ $P_6=15$

$n=7$ me pierdo

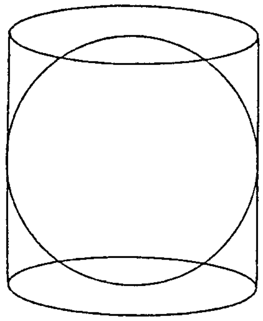
Vamos a tratar de pensar un poco. Cada punto interior, interior, intersección de dos diagonales ¿cómo queda determinado? naturalmente que por las dos diagonales que se cortan en él. ¿Y estas diagonales? Cada una por los dos vértices que une. Así para cada cuatro vértices A,B,C,D, que escojamos de nuestro polígono, estén donde estén, aunque al unirlos obtenemos seis rectas AB, AC, AD, BC, CD, sólo dos de ellas se cortan en el interior del polígono, las otras se cortan fuera o en el borde. Así cada cuatro vértices determinan un sólo punto interior y cada punto interior intersección de dos diagonales corresponde a un solo grupo de 4 vértices. Así es claro que hay tantos puntos interiores de intersección como grupos diferentes de cuatro vértices se puedan formar. ¿Cuántos de estos grupos hay? Elemental:

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = P_n$$

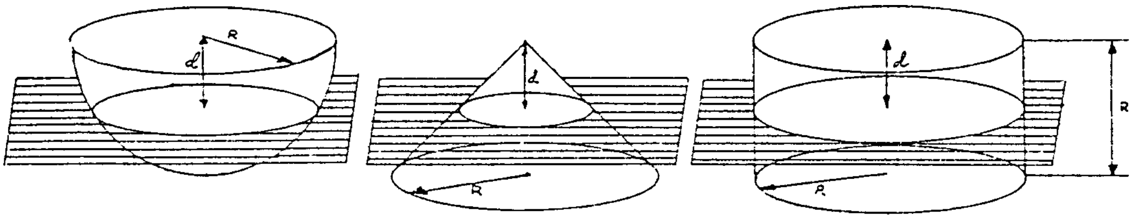
Haciendo cuentas para comprobar resulta $P_4=1$, $P_5=5$, $P_6=15$, $P_7=35$. Como ves, un contar con astucia, sin contar uno a uno, ahorra un montón de trabajo aburrido.

LA MEJOR IDEA DE ARQUÍMEDES

El cálculo del volumen de la esfera fue uno de los descubrimientos que Arquímedes más estimaba de todos los muchísimos que hizo en su vida. Llegó a demostrar de un modo muy original que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella. Tanto le impresionó esto a él mismo que mandó que en su tumba se grabase esta figura en recuerdo de la mejor de sus ideas.

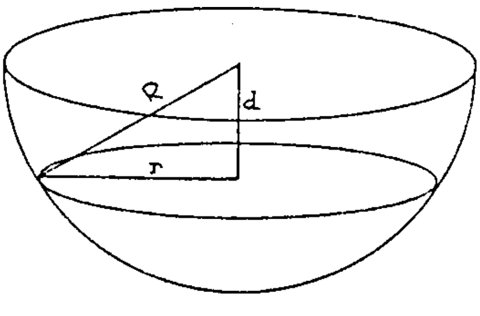


Vamos a ver cómo llegó hasta ahí. Arquímedes se imaginó una semiesfera y junto a ella un cilindro circular recto y un cono recto, ambos de base igual a un círculo máximo de la semiesfera. Algo así

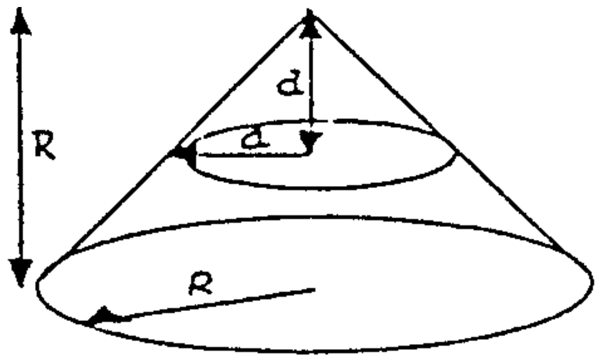


Arquímedes cortó las tres figuras por un plano paralelo a la base del cilindro y cono y se preguntó cómo serían las secciones determinadas por este plano en cilindro, semiesfera y cono.

En el cilindro está claro: un círculo de radio R. En la esfera también será un círculo, pero su radio dependerá de la distancia d. Mirando la figura siguiente y acordándote del teorema de Pitágoras, fácilmente puedes escribir que si el radio de la sección es r, entonces $r^2 + d^2 = R^2$.



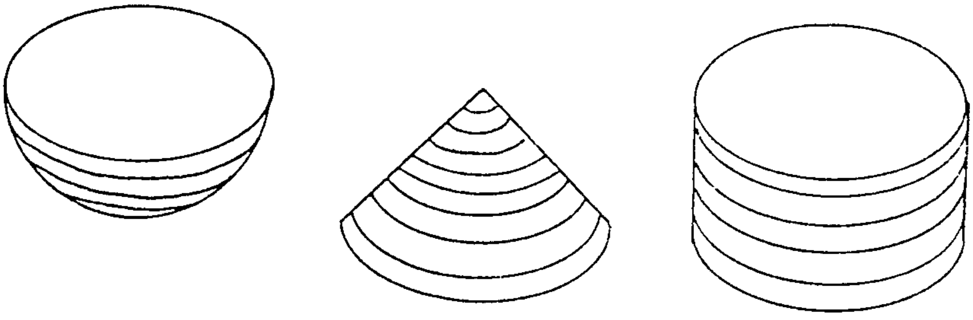
En el cono la sección también será un círculo y ahora el radio es aún más fácil de determinar mirando a la figura siguiente



Como el radio de apertura del cono es de 45º, resulta que el radio es d. Así

Sección cilindro = $\Pi R^2 = \Pi(r^2 + d^2) = \Pi r^2 + \Pi d^2$ =Sección semiesfera + Sección cono

Las secciones son como rebanadas de las tres figuras obtenidas cortando paralelamente a la base del cilindro. Resulta que, colocando las tres figuras como las hemos puesto y cortándolas en rebanadas finas



Rebanada en cilindro a altura d = Rebanada en semiesfera + Rebanada en cono. Si para cada altura d se tiene esta relación, parece bastante claro que
Volumen cilindro = Volumen semiesfera + Volumen cono
Pero, como Arquímedes muy bien sabía,
Volumen cilindro= ΠR^3;
Volumen cono= $\Pi R^3/3$ y así resultaba
Volumen semiesfera = $2\Pi R^3/3$ y Volumen esfera = $4\Pi R^3/3$.

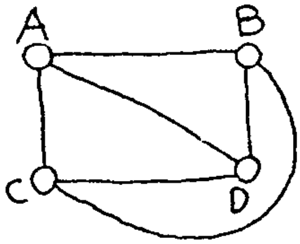
Cuando Cicerón fue nombrado cuestor en Sicilia (75a. de C.), descubrió, gracias a la inscripción que Arquímedes había mandado grabar, la tumba de Arquímedes que sus paisanos de Siracusa habían perdido de vista. Cicerón la restauró, pero más tarde se volvió a perder. Hace unos pocos años se encontraron dos tumbas que se disputan la autenticidad...

La esfera puede considerarse como compuesta por un montón de pirámides de vértice el centro de la esfera y base de área muy pequeña S sobre la esfera. Esto da una idea de lo que puede valer el área de la superficie esférica. El volumen de la esfera es $4\Pi R^3/3$. El de cada pirámide será RS/3 (pues la altura de cada pirámide es R). Sumando todas las pirámides y sacando R/3 factor común resulta $4\Pi R^3/3$ = Volumen esfera = Suma volúmenes pirámides = Area esfera x R/3 y así

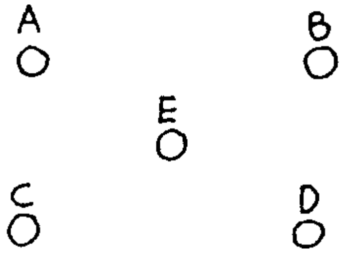
Area esfera = $4\Pi R^2$

UNA CINTA MÁGICA

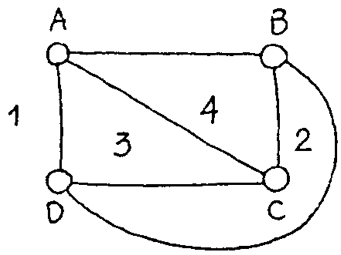
Te propongo un problema. Dados cuatro puntos en el plano A,B,C,D, unir cada uno a los otros tres mediante líneas rectas o curvas del plano que no se crucen. Cada línea debe contener sólo dos de los puntos. Piensa. Fácil ¿no?



Ahora un poco más difícil. Dados cinco puntos en el plano, unir cada uno a los otros cuatro por líneas que no se crucen.

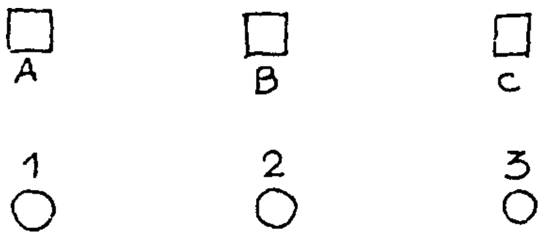


Prueba un rato. Parece más difícil ¿no?... Yo diría más aún: ¡Imposible! Fijate: si colocas cuatro puntos A,B,C,D, los puedes unir como has hccho antes



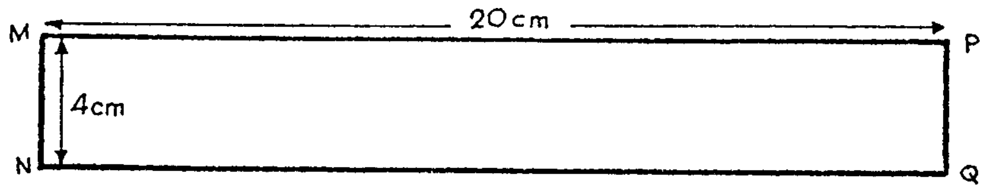
Ahora te preguntas: de entre las regiones del plano que han resultado, ¿dónde podría quedar el quinto punto E de modo que el problema fuese posible? Si está en 1 no se puede unir a C, si está en 2 no se puede unir a A, si está en 3 no se puede unir a B y si está en 4 no se puede unir a D. Así esté donde esté resulta que la tarea es imposible.

Otra tarea imposible que alguna vez te habrán propuesto es la siguiente

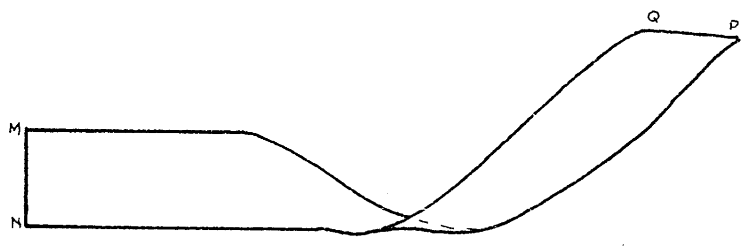


A, B, C son tres granjas y 1,2,3 son tres pozos. Cada uno de los granjeros de A, B, C quiere hacer tres conducciones de agua a cada uno de los tres pozos, pero no quiere que su toma de agua se cruce con ninguna de las de los otros. Es decir, se trata de trazar nueve líneas en el plazo A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, que no se crucen. Inténtalo un rato pero no demasiado largo. ¡El problema es imposible! Sin embargo, si los granjeros vivieran en la cinta mágica que vamos a construir ahora, el problema se les resolvería fácilmente.

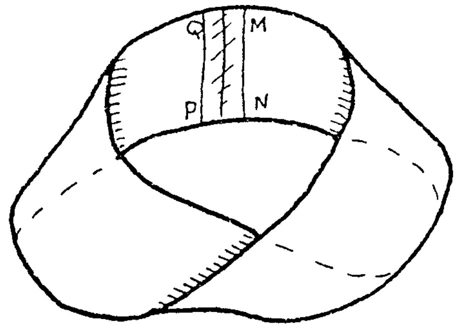
Coge una tira de papel así



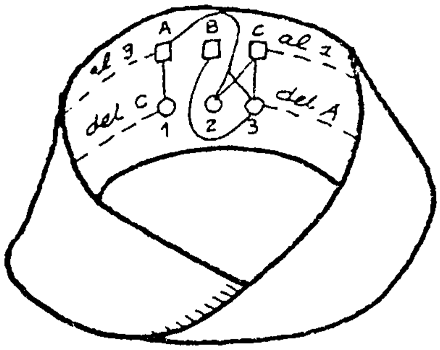
Vas a plegar sus bordes MN con PQ, pero antes de hacerlo le das media vuelta al de la derecha. Así



A continuación los pegas de modo que Q vaya a M y P a N. Te queda algo como esto que te pinto



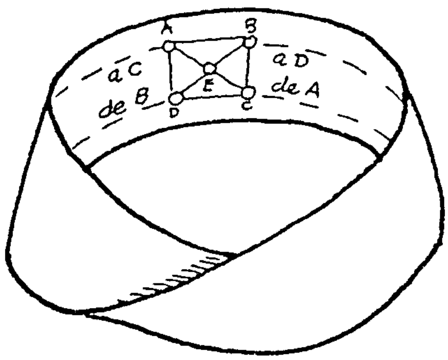
¡Ahí tienes la cinta de Möbius! ¿Qué tiene de mágico? Coloca tus granjas y tus pozos. Así



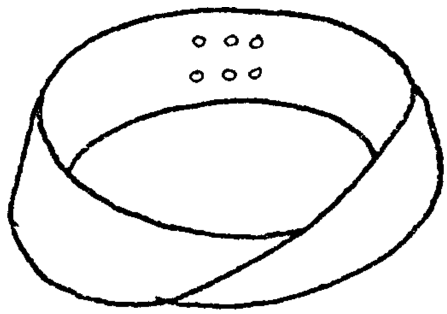
Trata de resolver ahora el problema de los granjeros caprichosos. Desde A sales por una linea a la misma distancia del borde que A y verás que llegas al punto 3... ¡sólo que por detrás! Así mismo, saliendo de C por una línea a la misma distancia del borde que C verás que llegas al punto 1... ¡también por detrás!

Completar las otras conducciones es cosa fácil.

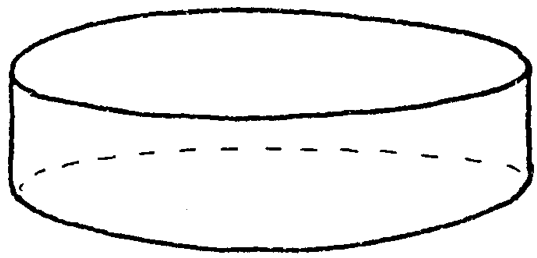
También el problema de los cinco puntos se resuelve de modo parecido sobre la cinta de Möbius.



¿Se podrá resolver el problema semejante de los seis puntos sobre la cinta de Möbius? ¡Si! ¡Ánimo!

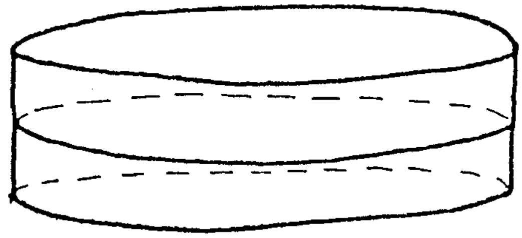


Parece que podemos decir: "Alto, Möbius! Has hecho trampa. Hemos llegado a los puntos que queríamos, pero por el otro lado.
Así... ¡cualquiera lo hace!" "¿Otro lado? ¿Qué otro lado?" diría Möbius-. "Si ves dos lados en mi cinta, por favor píntame uno de azul y el otro de negro". Trata de hacerlo con tus lápices. Empieza a pintar de negro por algún sitio, sin pasar en ningún momento por ningún borde, sigue, sigue... ¿Qué pasa? ¡Has pintado toda la cinta! ¡No queda nada para pintar de azul! Y eso que no te has pasado por ningún borde... La cinta tiene sólo lado. Es totalmente distinta de una cinta cilíndrica. Hazte una así



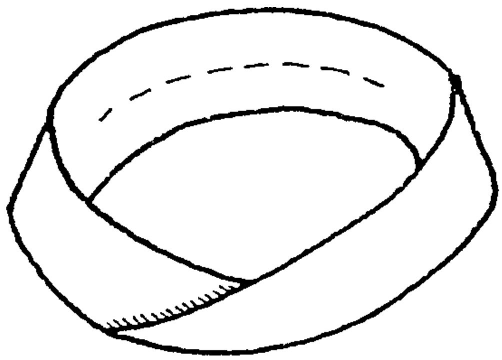
Aquí si empiezas a pintar de negro y no pasas en ningún momento por el borde terminas pintando una cara y queda otra para el azul. También se diferencia en otra cosa curiosa. La cinta cilíndrica tiene claramente dos bordes. ¿Y la de Möbius? Ve recorriendo el borde y comprobarás que de una pasada lo recorres todo. La cinta de Möbius tiene sólo un borde y una sola cara.

La cinta de Möbius presenta otras muchas sorpresas. En la cinta cilíndrica de arriba metes unas tijeras y comienzas a cortar por una línea paralela a los bordes



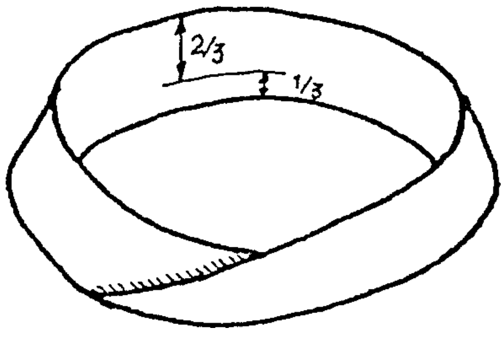
acabas llegando al punto de partida y salen dos cintas cilíndricas parecidas a la primera separadas... ¡naturalmente!

Haz los mismo con la cinta de Möbius. ¿Qué sale?...



Curioso ¿no? Llegas al punto de partida y resulta una sola cinta parecida a la que tenías, sólo que más larga. ¿Será igual? Córtala otra vez por la mitad a lo largo de una línea paralela al borde. Si fuera igual que la primera le tendría que pasar lo mismo, es decir, tendría que resultar otra cinta más larga ¿no? ¿Qué sale? ¡Dos cintas enlazadas! Luego, no era igual. Hazte otra cinta de Möbius y repite el experimento de dividirla por una línea paralela al borde. Si te fijas bien en la cinta que te resulta observarás fácilmente que tiene dos bordes y dos caras. Es como una cinta de Möbius pero construída con dos medias vueltas en lugar de una.

Otro experimento interesante. Corta una cinta de Möbius paralelamente a su borde comenzando ahora a una distancia que sea más o menos un tercio de su anchura. Así

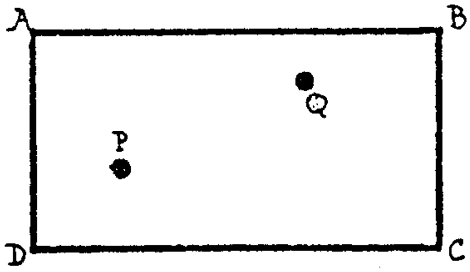


Verás que salen dos cintas enlazadas, una pequeña, que es una cinta de Möbius de las de media vuelta, y otra más grande con cuatro medias vueltas.

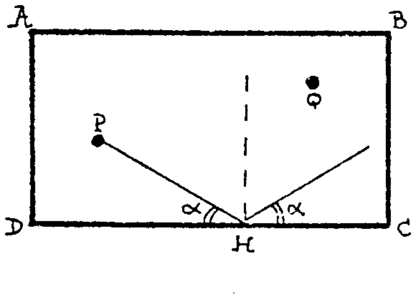
Ahora puedes experimentar más por tu cuenta. Por ejemplo, puedes hacerte con una cinta con cinco medias vueltas. ¿Cuántas caras tendrá? ¿Cuantos bordes? ¿Qué pasará si cortas por la mitad? ¿Por qué no te haces con un procedimiento de adivinar lo que va a pasar antes de hacerlo? Después de unas cuantas experiencias seguro que das con la clave.

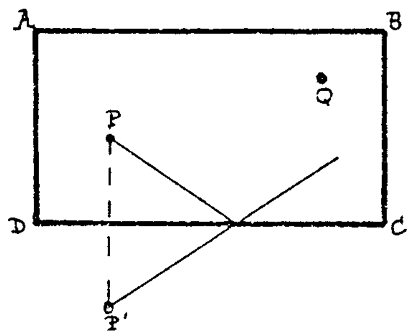
VAMOS A JUGAR AL BILLAR

Tienes en el billar rectangular ABCD dos bolas en los puntos P y Q.

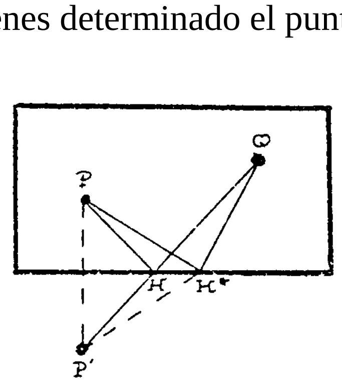


Quisieras tirar P contra la banda DC de modo que rebote hacia Q. ¿A qué punto de DC debes apuntar? Jugamos sin efectos. Así, si tiras desde P hacia un punto cualquiera H, la bola rebota en H formando con la banda el mismo ángulo con el que llegó. Un truco ingenioso para no tener que andar trazando ángulos iguales para cada vez que quieras saber hacia dónde va a salir rebotada la bola consiste en fijarte en que en todos los casos la dirección de salida pasa por el punto P´, simétrico de P respecto de la banda CD. Así, trazas P´ y de una vez para todas sabes por dónde sale la bola.





Basta unir P´ al punto de la banda al que apuntas y te puedes olvidar de trazar ángulos iguales. Observa que serán automáticamente iguales los ángulos que deben serlo ya que CD es mediatriz de PP´. Tu problema era mandar P a la banda CD de tal modo que se fuera rebotando hacia Q. Así es claro que te basta unir Q con P´ y ya tienes determinado el punto H al que has de enviar la bola.



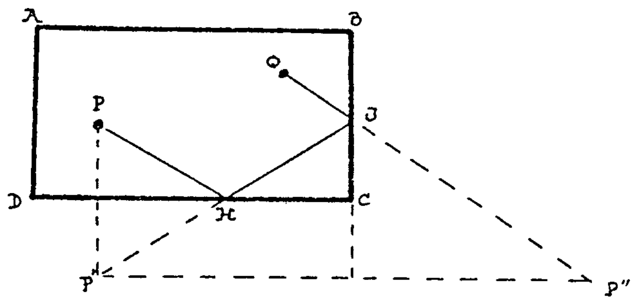
Observa, pues será interesante más adelante, que el punto H es el punto de la banda DC que hace mínima la suma de segmentos PH+HQ. Fíjate que si tomas otro punto H* sobre la banda, entonces

$$H^*P + H^*Q = H^*P' + H^*Q < P'Q = HP + HQ$$

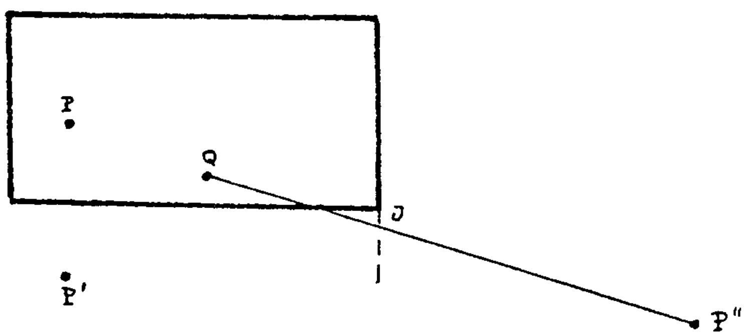
siendo la desigualdad cierta, ya que la suma de dos lados en un triángulo es siempre mayor que el tercer lado.

¿Y si quisieras mandar P hacia Q después de rebotar primero en CD y luego en BC?

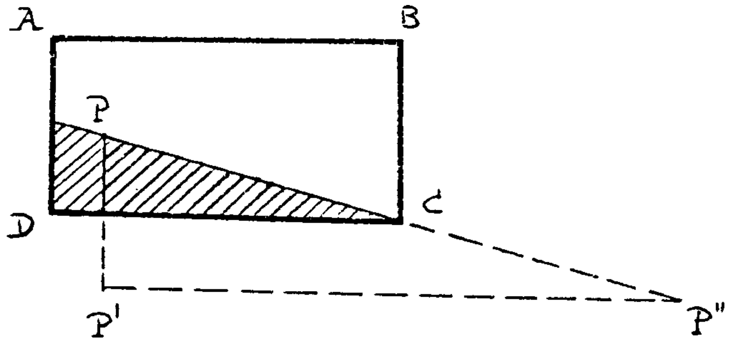
Fíjate bien. Ya sabemos que al disparar la bola desde P hacia CD sale de la banda como si viniera de P´. Así, por las mismas cuentas, al rebotar ahora en la banda BC saldrá como si viniera de P´´, simétrico de P´ respecto de la banda BC. Si queremos que vaya a parar, después de este segundo rebote, al punto Q, no tenemos más que unir Q a P´´ y así obtenemos QJ, la última parte de la trayectoria de la bola. Como se trata de que llegue a J después de rebotar en DC, unimos J a P´ y obtenemos otro trozo HJ de la trayectoria. Finalmente unimos P con H y obtenemos la trayectoria que resuelve el problema propuesto.



Naturalmente que a veces este último problema no tiene solución. Si al unir Q con P´´ resulta que el punto J se nos sale del billar, entonces no hay forma.

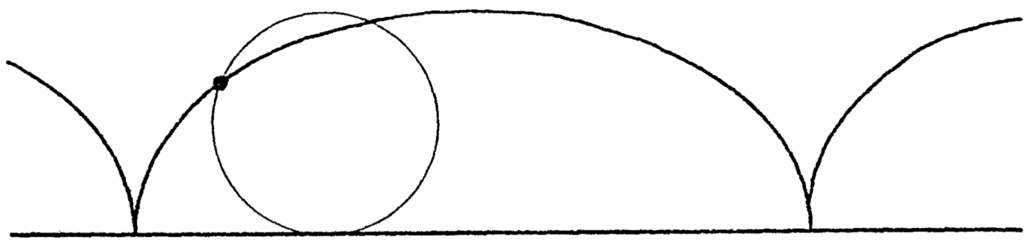


Así es claro que este problema, para un P fijo, tiene solución cuando Q está dentro de la zona no rayada de la figura siguiente.



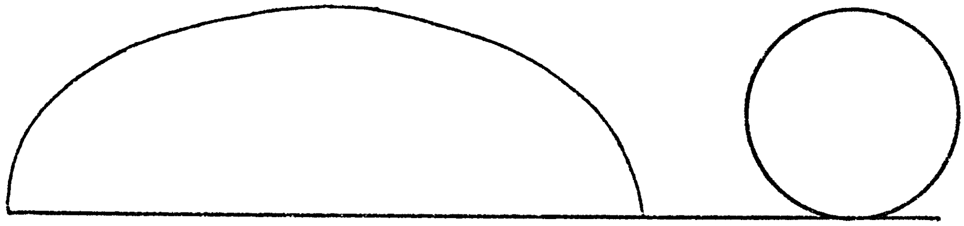
UNA CURVA POLIVALENTE

En la cubierta de la rueda de tu bici señala con tiza un punto que se vea bien de lado. ¿Qué curva recorre ese punto cuando te mueves con la bici por la carretera? Puedes tratar de pintar esa curva en tu papel. No es difícil. Yo me he recortado un círculo de cartón de unos 3,5 cm. de diámetro. Como es difícil conseguir que ruede sin resbalar sobre mi regla, he sujetado al borde de mi regla un trozo de papel celo con el lado engomado hacia afuera. He colocado la regla sobre el papel y ahora sí que puedo hacer que la rueda ruede appoyada en la regla y tumbada sobre el papel. En el borde de la rueda de cartón he hecho una pequeña muesca para meter el lápiz. Con el lápiz metido he hecho rodar el círculo a lo largo del borde de la regla y mi lápiz me ha pintado esto



que da una buena idea de la curva. Esta curva es una de las más famosas en la historia de las matemáticas. Se llama la cicloide y tiene, como verás, un montón enorme de propiedades curiosas.

Para empezar, mira el área que queda entre un arco de cicloide y la recta sobre la que ha rodado el círculo. ¿Qué área calculas así a ojo que puede tener la superficie? Dirás, muy bien dicho -¿Qué área... comparada con qué?- Parece que tendrá algo que ver con la del círculo ¿no? Aquí tienes las dos áreas



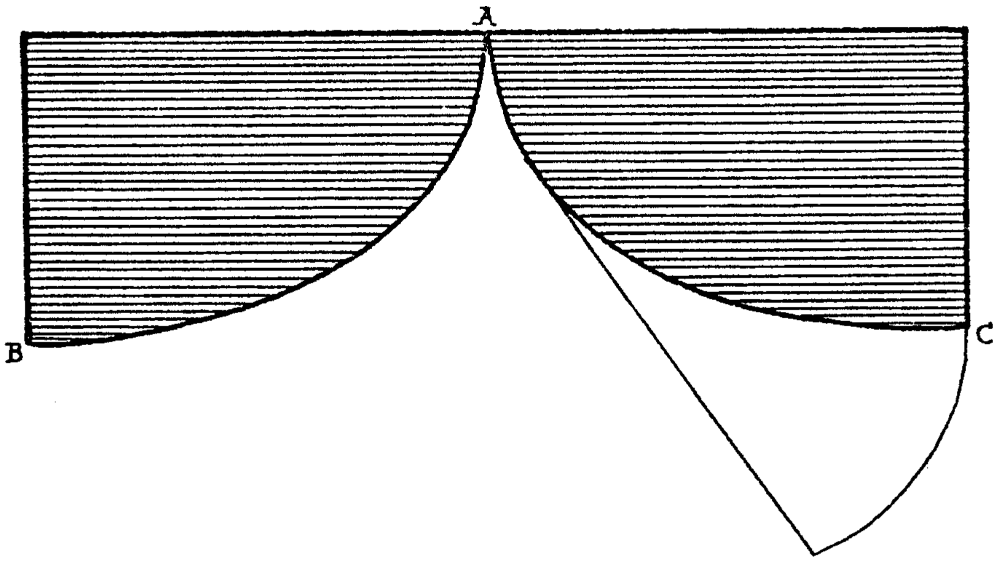
¿Cómo se te ocurre compararlas? Si tienes papel milimetrado será fácil. Pintas sobre el papel milimetrado las figuras, cuentas cuadraditos y comparas. Fácil... pero un poco rollo eso de contar milímetros cuadrados. Galileo se interesó por el problema. No tenía papel milimetrado, pero tenía una balanza. Recortó las figuras sobre madera, las pesó y... ¡encontró que el área bajo la cicloide era como tres veces el área del círculo! Pero le debió de parecer que su método era inexacto y que la relación entre estas áreas no podía ser 3, un número tan redondo, que no tiene casi nada que ver con el número Π, sólo que está cerca de 3,141... Así que conjeturó que el área bajo la cicloide tenía que ser Π veces la del círculo.

¡Se debió de llevar una gran sorpresa cuando un francés, Roverbal y un italiano discípulo suyo, Torricelli, llegaron a demostrar que el área bajo la cicloide es exactamente tres veces el área del círculo que da lugar a ella!.

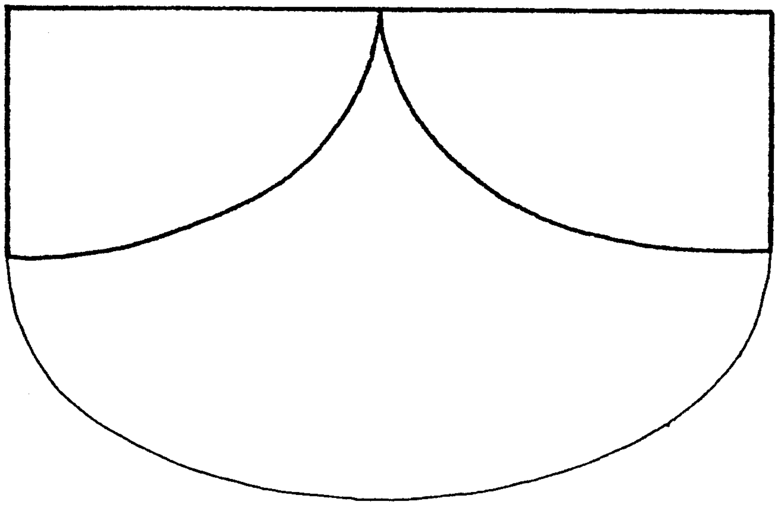
Más llamativo todavía resultó el cálculo de la longitud de un arco de cicloide. ¿Por qué no tratas de averiguarlo experimentalmente? Eso sí que es fácil. Recórtate una cicloide en cartón grueso, coge un hijo y ponlo bordeando ese cartón. ¡Y mide!. En mi cicloide, engendrada por mi rueda de 3,5 cm. de diámetro, me sale que la longitud del hilo es de 14 cm. Prueba tú con otro tamaño, por ejemplo de 4 cm de diámetro. ¿Qué te sale? Más o menos 16 cm ¿qué observas? 14/3,5 = 16/4 = 4. ¿Será verdad que la longitud de la cicloide es 4 veces la del diámetro? ¡Sí! Y esto es otro resultado de Roberval, Torricelli y otros hace unos tres siglos.

Tal montón de propiedades curiosas tiene la cicloide que aquellos señores del siglo XVII comenzaron a estudiarla con fruición... y a organizar unas terribles peleas sobre quién había encontrado primero tal o cual propiedad. La siguiente se debe a Huygens, un holandés nada errante que tenía su casa permanente en Groningen.

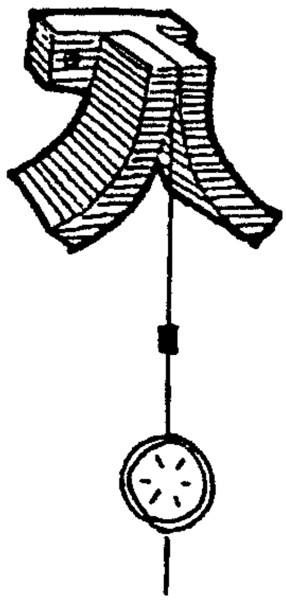
Recorta en cartón dos medias cicloides como indica la figura



Coloca un hilo ajustado a la parte C y fija un estremo en A. Sujeta la parte de tu lápiz al otro extremo en C y ahora, con el extremo en A fijo y el hijo tenso, apoyado en el cartón, sepáralo de C dejándolo describir una curva. ¿Qué curva? Hazlo primero y adivina después. ¡Sí! Es una cicloide igual a las de arriba, sólo que entera, como indica el dibujo.

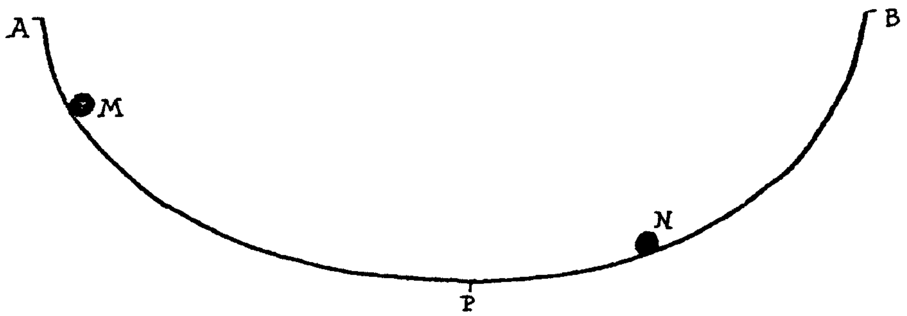


Huygens fue el primer constructor serio de relojes de péndulo, a la vez que un matemático y físico genial del siglo XVII. Se hizo un péndulo así



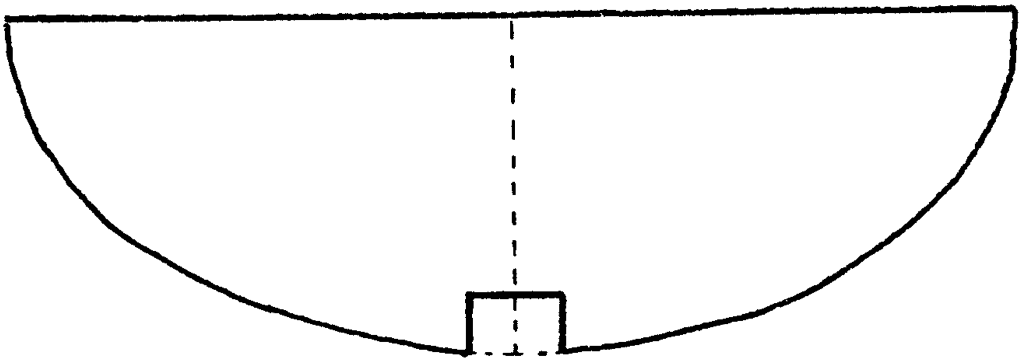
que tenía la siguiente propiedad muy especial: aun cuando la amplitud del movimiento del péndulo varíe y se haga más grande o más pequeña, el péndulo sigue marcando el tiempo igualmente bien, es decir, tiene el mismo período.

¿A qué se debe esto? Huygens descubrió que la cicloide tiene la propiedad de ser nada menos que *tautócrona*. ¿Qué qué es eso? Pues eso consiste en lo siguiente: si colocas una cicloide hacia arriba, como en el dibujo siguiente y dejas caer dos canicas por ella, una desde el punto M y otra desde el N, ... *¡las dos llegan al punto P más bajo de la cicloide al mismo tiempo!* Y eso que la que baja desde M tiene que recorrer un camino mayor.



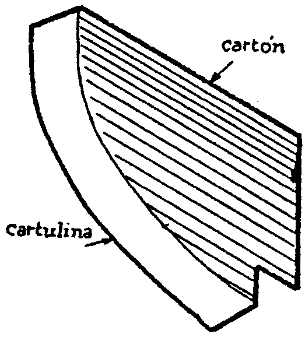
Esta propiedad te explica que si te puedes construir un péndulo tal que la lenteja recorra, no un arco de círculo, como en los relojes de péndulo que vemos hoy día, sino un arco de cicloide, entonces no importa que la amplitud sea mayor o menor. Su período es el mismo. Huygens se las ingenió, con la propiedad que hemos visto antes, para que la lenteja recorriera, efectivamente, una cicloide. Observa en el dibujo del péndulo de Huygens que los dos topes de la cuerda son dos arcos de cicloide.

Para experimentar esto de la tautocronía de la cicloide yo me he hecho un experimento bastante sencillo. ¿Por qué no me sigues y te lo haces tú mismo? Recorta un cartón de modo que el borde sea una cicloide bien grande, cuanto más grande mejor. Córtalo por la mitad, por la línea de puntos del dibujo.



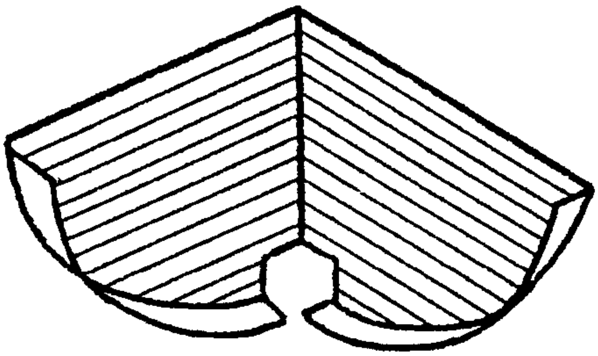
Recorta también dos trocitos por el borde de abajo de modo que quepa a través de cada uno de los agujeros una canica.

Pega un trozo de cartulina por el borde de cada mitad de modo que quede algo así



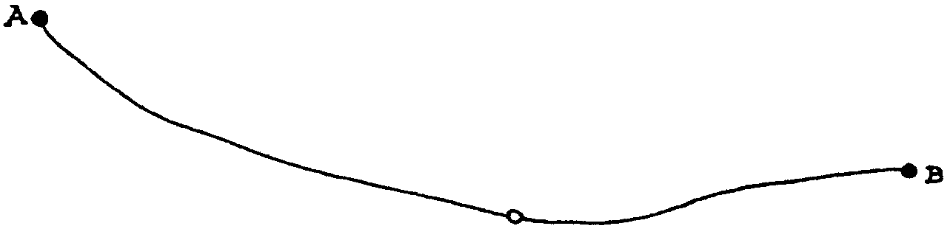
Procura que el borde exterior de la cartulina quede un poco levantado para que una canica pueda bajar por ella sin salirse, siguiendo la línea de la cicloide.

Ahora, con un papel de celo une los dos trozos de cicloide que has preparado en ángulo recto. Te debe quedar algo así



Ahora ya puedes empezar a experimentar. Vas a necesitar cuatro manos, de modo que ya puedes ir llamando a algún amigo. Tu amigo te sostiene el chisme que has preparado verticalmente. Tú dejas caer al tiempo dos canicas, una por cada mitad de la cicloide desde puntos de la cicloide situados a diferentes alturas. Si las cosas las has hecho bien, las dos canicas se chocarán en el punto más bajo, puesto que llegan allí al mismo tiempo. Si es que salen mal las cosas, una llegará antes que la otra y las dos se saldrán por los agujeros a toda velocidad.

A la cicloide no le basta con ser tautócrona, porque además es *braquistócrona*, ya que es ser...¿no? Ser *braquistócrona* significa ser la curva de descenso más rápido, en el siguiente sentido. Señala dos puntos A y B en un plano vertical, a distinta altura.



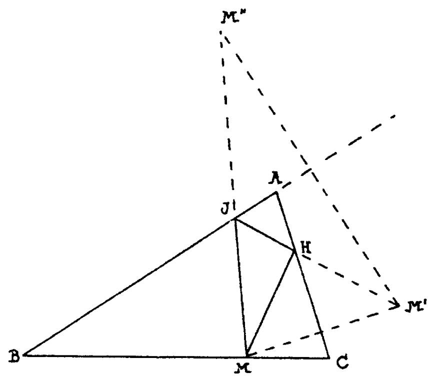
Suponte que tienes un alambre y una cuenta de rosario. Se trata de unir A y B con el alambre, de ensartar la cuenta en A y de hacerla caer por el alambre hasta B. Para cada forma de curva que le des al alambre la cuenta tardará un tiempo distinto en caer de A a B. La pregunta es ahora: ¿qué forma habrá que darle al alambre para que la cuenta llegue a B en el menor tiempo posible? ¡Pues resulta que la forma es precisamente la de la cicloide que sale verticalmente de A y pasa por B, del siguiente modo

Curioso ¿no? El segmento rectilíneo AB da la distancia menor entre A y B pero una bola que cae por el plano indicado AB... ¡Tarda más por ahí que si va por APB, bajando primero hasta P y luego subiendo a B! ¡Quién lo diría!

¿Por qué no te haces el experimento, como antes, con cartón y cartulinas y canicas? ¡Es fácil! Si tu cicloide es bien grande podrás observar la diferencia.

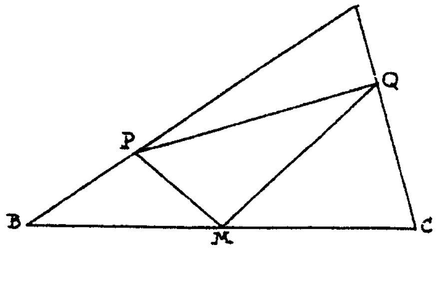
UN BILLAR MÁS COMPLICADO

Supongamos ahora que estamos jugando en un billar en forma de triángulo con sus tres ángulos agudos y que nuestro problema consiste en lo siguiente: nos dan un punto M de BC. Se trata de elegir una dirección de tiro de modo que la bola lanzada desde M vaya hacia la banda AC, rebote allí y luego rebote en la banda AB de modo que vaya a dar al mismo punto M de salida.

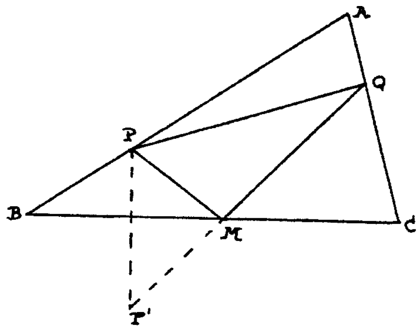


Tenemos la receta del billar normal que nos va a servir también ahora. Al rebotar en AC sale la bola como si viniera desde M´, simétrico de M respecto de AC. Al rebotar en AB sale la bola como si viniera desde M´´, simétrico de M´, respecto de AC. Como queremos que pase por M, unimos M´´ con M y esto nos da la última parte de la trayectoria. Unimos luego J con M´ y obtenemos la otra parte JH y luego MH. Está claro que, como antes, para que haya solución J debe quedar sobre el segmento AB y H sobre el segmento AC, lo cual no sucede en un triángulo cualquiera, pero sí si el triángulo es acutángulo, como hemos supuesto. Trata de demostrarlo. Es fácil.

Verás ahora cómo el saber jugar con esta técnica al billar resuelve un problema curioso e importante. Te dan en el lado AB del triángulo acutángulo ABC un punto P y en AC otro punto Q. Te piden que determines el triángulo que tiene por vértices P, Q y el tercero M que has de fijar tú de tal modo que esté sobre BC y que el perímetro de MPQ sea mínimo. Piensa



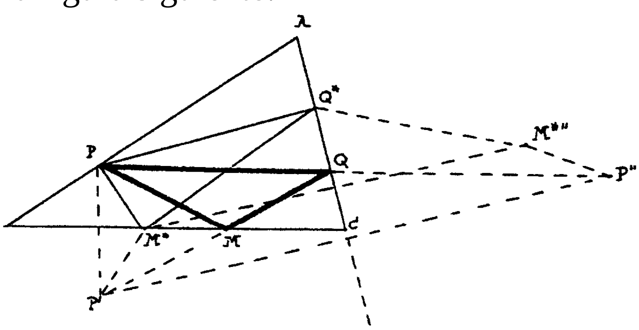
Ha de ser mínimo PQ+PM+MQ. Pero como PQ es fijo, pues los dos puntos P y Q te los han señalado, resulta que ha de ser mínimo PM+MQ. Pero esto es algo que ya hemos aprendido antes: la bola de billar que lanzada desde P a la banda BC vaya a parar a Q es la que da la trayectoria más corta tocando la banda. Así tenemos resuelto el problema.



Unimos Q al P´, simétrico de P respecto de BC y hallamos M.

Vamos un poco más allá con otro problema parecido. Ahora te dan el triángulo ABC y no te fijan los dos puntos P y Q, sino sólo P sobre AB. Te piden encontrar un triángulo MPQ con M sobre BC y Q sobre AC con perímetro mínimo.

Por lo que ya sabemos parece natural pensar que si hay una trayectoria de bola de billar que salga de P, vaya a M en BC, rebote allí y vaya a Q en la banda AC y vuelva a P, esta trayectoria PMQP dará el triángulo de área mínima. Ya tenemos una conjetura que parece buena, por nuestras experiencias anteriores. Esta trayectoria existe y ya sabemos trazarla en un triángulo acutángulo como el que nos han dado. Trazamos el punto P´, simétrico del P respecto de BC, luego el P´´, simétrico del P´ respecto de AC, etc... Obtenemos así el triángulo PMQ. ¿Será éste de verdad el de perímetro mínimo que buscamos? Para verlo lo compararemos con otro cualquiera PM*Q*. Observa la figura siguiente:

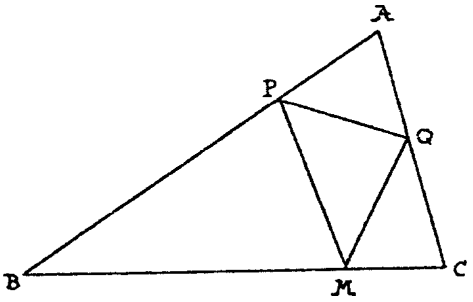


Ahí tienes que PM=MP´=M´´P´´. Asímismo, MQ=M´´Q. Así el perímetro de PMQ es igual al segmento PP´´. ¿Y el perímetro de PM*Q*? Fíjate que M* tiene su simétrico M*´´ respecto de AC fuera de PP´´. Así el perímetro de PM*Q* es

$$\mathbf{PM^* + M^*Q^* + Q^*P = P''M^{*''} + Q^*M^{*''} + Q^*P}$$

y esto último es la longitud de una quebrada de extremos P y P´´. Así este perímetro es claramente mayor que PP´´ que era la longitud del perímetro de PMQ.

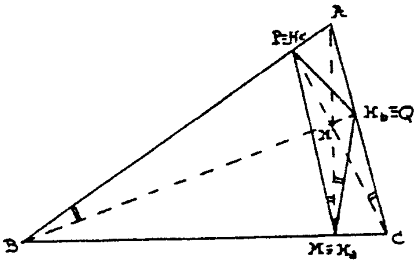
Para rematar este tipo de problemas imagínate que ahora no te fijas más que el triángulo ABC y te piden que determines un triángulo MPQ con M en BC, P en AB y Q en AC que tenga perímetro mínimo.



Parece claro, con la experiencia acumulada que tenemos, que si hay algún triángulo MPQ tal que lanzando la bola desde P en dirección a M ésta rebote hacia Q y allí rebote hacia P y al mismo tiempo que esta propiedad se verifique para P y para Q, es decir que lanzando P hacia M rebote hacia Q..., entonces este triángulo debería ser el de perímetro mínimo.

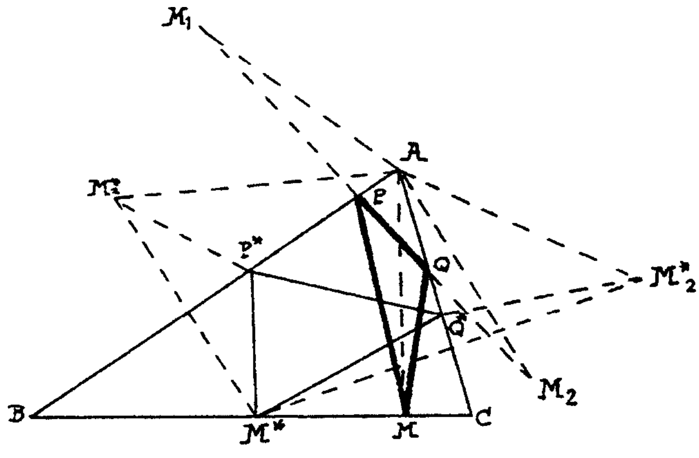
Así tenemos dos preguntas que contestaremos. ¿Existirá tal triángulo maravilloso? Y si existe ¿tendrá de verdad la propiedad de mínimo perímetro? Es curioso. El triangulo MPQ con la propiedad que buscamos no sólo existe sino que además es un viejo conocido. Es el triángulo de los pies de las alturas $H_aH_bH_c$, que se suele llamar el triángulo órtico. Para ver esto, observa primero que BH_cHH_a es un cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia de diámetro BH (recuerda que H es el punto de intersección de las tres alturas, el ortocentro), ya que HH_aB es un ángulo recto y HH_cB también.

Así los ángulos $HHaH_c$ y HBH_c que están inscritos en el mismo arco, son iguales. Fíjate además en que HBH_c = 90-A pues el triángulo ABH_b es recto en H_b.



Asímismo el cuadrilátero HH_bCH_a se puede inscribir en una circunferencia de diámetro CH y del mismo modo que antes HH_aH_b=HCH_b=90-A. Así AH_a es bisectriz de $H_cH_aH_b$. Si desde H_c se lanza una bola hacia H_a ésta rebota hacia H_b. Con cuentas iguales se demuestra que esta bola rebota en H_b hacia H_c y en H_c hacia H_a. Así éste es el triángulo MPQ que estábamos buscando con la propiedad de que si desde cada vértice se lanza una bola a otro, ésta rebota en las dos bandas y vuelve al punto de partida.

Queda por ver si es el de perímetro mínimo. Pero esto resulta sencillo comparando con cualquier otro como hicimos en el problema anterior. Observa la figura siguiente en la que M_1 es simétrico de M respecto de AB, M_2 es simétrico de M respecto de AC y análogamente M^*_1 es simétrico de M* respecto de AB y M^*_2 es simétrico de M respecto de AC. El ángulo M_1AM_2 así como el $M^*_1AM^*_2$ miden 2A y así se pueden escribir las cuentas siguientes con las que queda demostrado que el perímetro de MPQ es menor que el de M*P*Q*

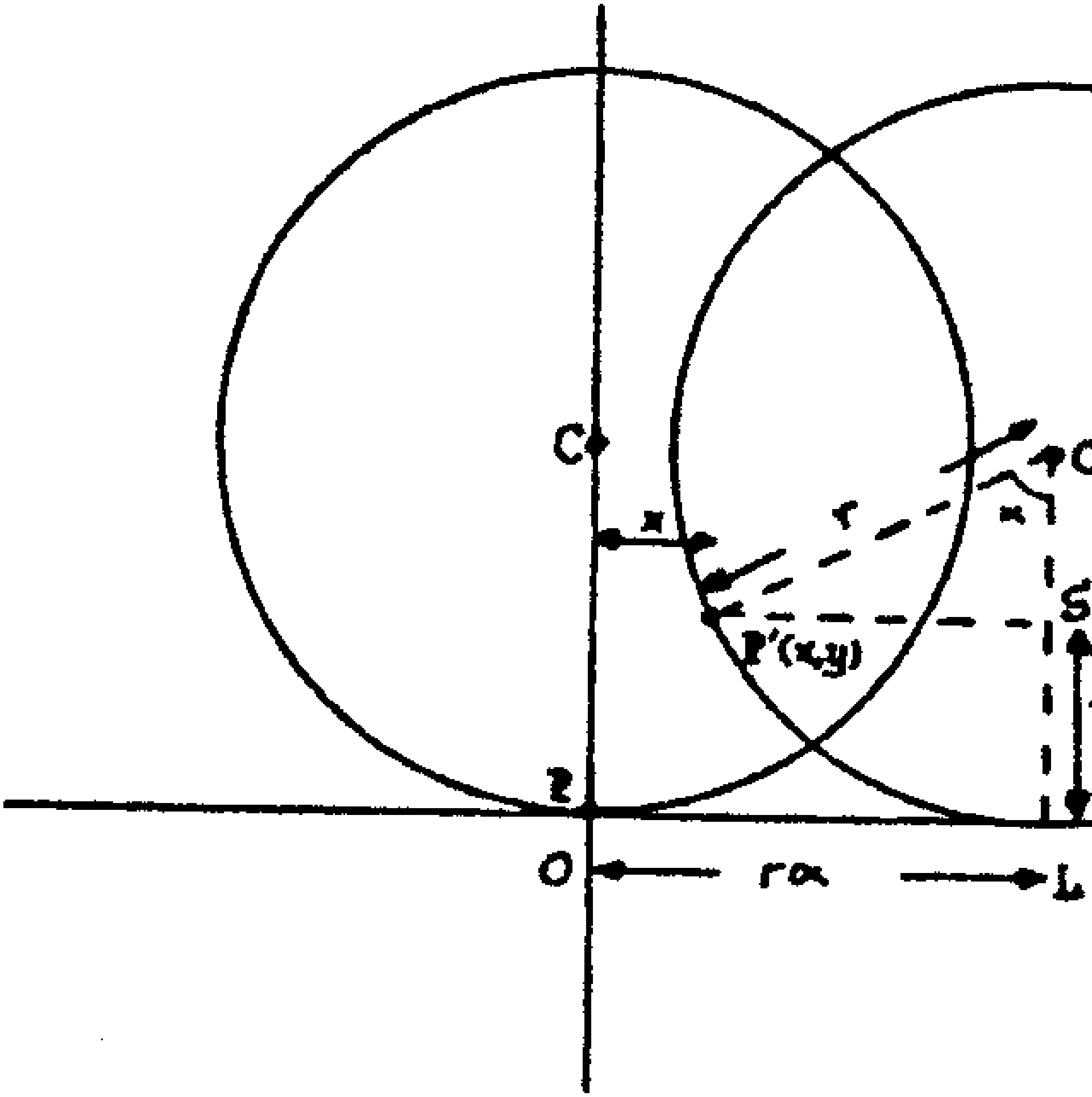


$PQ+PM+QM = M_1M_2 = 2AM_1 \text{ sen}A = 2AM \text{ sen}A$

$P^*Q^*+P^*M^*+Q^*M^*=P^*Q^*+P^*M^*_1+Q^*M^*_2>M^*_1M^*_2=2AM^*\text{sen}A>2AM \text{ sen}A$

ECUACIONES Y DEMOSTRACIONES DE LAS PROPIEDADES DE LA CICLOIDE.

Vamos a ver si nos podemos hacer con la ecuación de la cicloide. Tomemos unos ejes coordenados cómodos, la línea recta donde se apoya la rueda será el eje x y el eje y será la perpendicular a ella por el punto que has señalado en la rueda cuando éste está en el suelo.



Dejemos que la rueda ruede un poco y veamos dónde va a parar el punto P de la circunferencia. Cuando el centro del círculo C ha pasado a C´, el punto P ha pasado a P´. Este es el punto cuya ecuación queremos. Llamamos a sus coordenadas (x,y). Como la rueda no resbala sobre el suelo, lo que sabemos es que la longitud del arco LP sobre la circunferencia es igual a la longitud del segmento rectilíneo OL. Si llamamos α al ángulo LC´P´ medido en radianes, resulta OL=LP´=rα. Por otra parte, las coordenadas de P´en nuestro sistema son

x = OL - P´S = raα - rsenα
y = SL = C´L - C´S = r - rcosα

Así obtenemos la ecuación en coordenadas paramétricas (parámetro α) de la cicloide

$x = r\alpha - r\,\text{sen}\,\alpha$
$y = r - r\cos\alpha$

Si se intenta eliminar aquí α sale algo más lioso y es preferible dejarlo así.

La cicloide tiene propiedades geométricas muy interesantes. ¿Cuál será su longitud? Fácil
$dx / d\alpha = r(1-\cos\alpha)$; $dy / d\alpha = r\,\text{sen}\,\alpha$.

$$\text{Longitud} = \int_0^2 \sqrt{\frac{dx}{d}^2 + \frac{dy}{d}^2}\, d\alpha = r\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{1-\cos\alpha}\, d\alpha =$$

$$= 2r\int_0^2 \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 4r\left[-\cos\frac{\alpha}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r$$

€
Así resulta que la longitud de la cicloide es 8 veces la del radio de la rueda. No tiene nada que ver con Π como uno podría esperar.

La longitud desde el punto 0 hasta el punto correspondiente al valor β del parámetro será

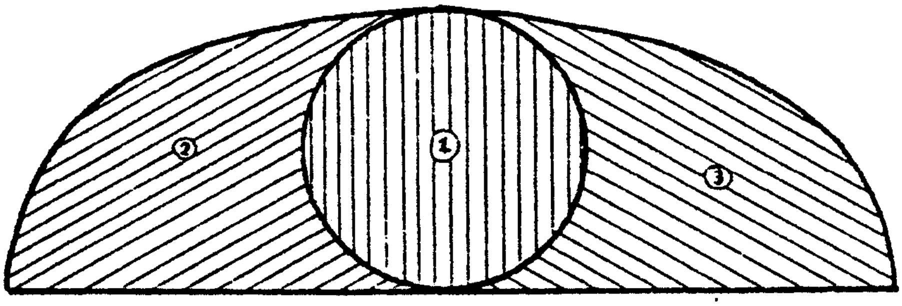
$$2r\int_0^\beta \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 4r\left[-\cos\frac{\beta}{2}\right]_0^\beta = 4r\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right) = 8r\,\text{sen}^2\frac{\beta}{4}$$

¿Cual será el área bajo la cicloide? Se halla de modo sencillo una vez que tenemos la ecuación de la curva:

$$\int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} (r-r\cdot\cos\alpha)\,(r-r\cdot\cos\alpha)\, d\alpha = 3\pi r^2$$

Así el área bajo la cicloide es tres veces la del círculo que engendra la curva.

Por tanto las áreas de las tres regiones señaladas en la figura siguiente son iguales.



Vamos a determinar ahora la normal, es decir la perpendicular a la tangente, en un punto (x,y) de la curva correspondiente al parámetro α. Tenemos

$$\frac{dx}{d\alpha} = r - r \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

La pendiente de la normal será $-\frac{1}{dy/dx} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha}$

y por tanto la normal en el punto de parámetro α tendrá por ecuación

$$\frac{y-(r-r\cos\alpha)}{x-(r\alpha - r\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{\cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

es decir, haciendo operaciones

$$\mathbf{x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha - x - r\alpha\cos\alpha + r\alpha = 0}$$

Ya tenemos la normal en cada punto de la cicloide. Vamos a hallar ahora la envolvente de estas rectas, es decir, la curva que es tangente a todas ellas. ¿Cómo se hace? Sólo hay que derivar la ecuación de las rectas con respecto a α y eliminar α entre la ecuación que resulta y la primera, la de las normales. Así hay que eliminar α entre las dos siguientes

$$\mathbf{x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha - x - r\alpha + r\alpha = 0}$$
$$\mathbf{-x\operatorname{sen}\alpha - y\cos\alpha - r\cos\alpha + r\alpha\operatorname{sen}\alpha + r = 0}$$

En lugar de eliminar α vamos a hacer algo más sencillo, despejar x e y en función de α. Así obtendremos las ecuaciones paramétricas de la envolvente. Como por arte de magia las cuentas salen facilísimas. Se multiplica la primera ecuación por cosα y la segunda por senα, se suman y sale x. De modo análogo para y. Resulta una cosa muy simple.

$$\mathbf{x = r\alpha + r\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\mathbf{y = - r + r\cos\alpha}$$

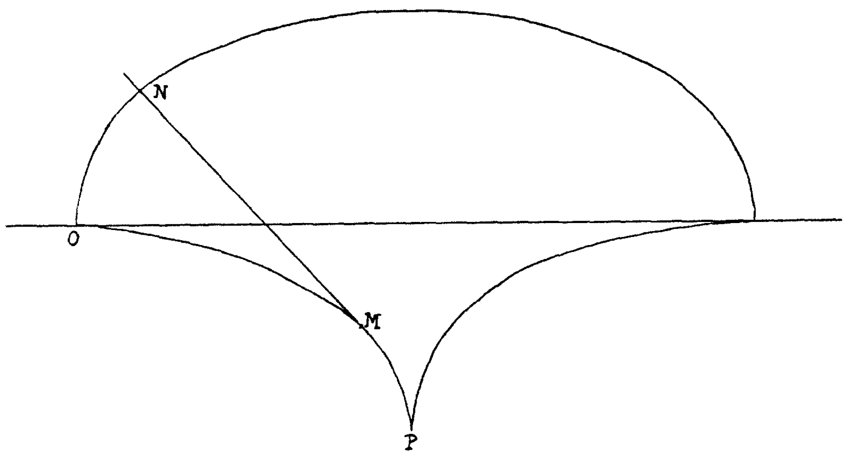
¿Qué curva es ésta? Si se representa se parece a la cicloide en su forma. ¿Será una cicloide? Vamos a trasladar los ejes al punto (rΠ, -2r) para comparar con la ecuación de la cicloide, referida al mismo tipo de ejes, que hemos hallado antes. Así resulta la ecuación

$$x = X + r\pi \qquad X = r(\alpha - \pi) + r \,\mathrm{sen}\, \alpha = r(\alpha - \pi) - r \,\mathrm{sen}\, (\alpha - \pi)$$
$$y = Y - 2r \qquad Y = r + r\cos\alpha = r - r\cos(\alpha - \pi)$$

y llamando $\alpha - \Pi = \theta$€obtenemos

$$X = r\theta - r \cdot \mathrm{sen}\, \theta$$
$$Y = r - r\cos\theta$$

con lo que resulta que... ¡la envolvente de las normales a la cicloide es la misma cicloide trasladada r**π** a la derecha y 2r hacia abajo! No hay muchas curvas con esta propiedad, como se puede comprobar mirando las conocidas, circunferencias, elipse...



Vamos a seguir echando algunas cuentas más. Tenemos la ecuación de la cicloide

$$\text{Cicloide} \begin{cases} x_c = r\alpha - r \,\mathrm{sen}\, \alpha \\ y_c = r - r\cos\alpha \end{cases} \qquad \text{Envolvente normales} \begin{cases} x_n = r\alpha + r \,\mathrm{sen}\, \alpha \\ y_n = -r + r\cos\alpha \end{cases}$$

y la de la envolvente de las normales. Al punto de parámetro sobre la cicloide le corresponde la normal MN que es tangente a la envolvente en el punto M. Conocemos las coordenadas de estos puntos

N ($r\alpha$ - $r\,\mathrm{sen}\alpha$, r - $r\cos\alpha$); M($r\alpha$ + $r\,\mathrm{sen}\alpha$, $r\cos\alpha$ - r)

la distancia entre ellos en

$$MN = \sqrt{(2r\ \mathrm{sen}\quad)^2 + (2r-2r\cos\alpha)^2} =$$
$$= 4r\ \mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}$$

la longitud del arco MP se calcula fácilmente, observando que el punto M corresponde al parámetro α y el P al parámetro π. Así

$$\text{Arco PM} = \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx_n}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = 4r - 4r\ \mathrm{sen}\frac{\alpha}{2},$$

<u>**MN + Arco PM = 4r**</u>

De todo esto resulta un hecho geométrico interesante y que tendrá aplicaciones como veremos despueés en la construcción de relojes de péndulo. Resulta por nuestras cuentas que: *MN + arco MP sobre la cicloide = constante = 4r*. Así, si sobre el borde de la cicloide OP fijas un cordel y vas desplazando el extremo en O manteniéndolo tirante para que la parte suelta siga siendo tangente a la cicloide OP, entonces resulta que <u>este extremo que se desplaza describe la cicloide de arriba</u> ON.

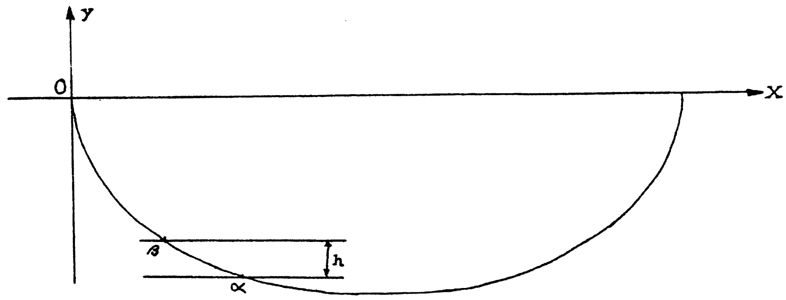
Si las propiedades geométricas de la cicloide son interesantes, sus propiedades físicas lo son aún más.

Haciendo girar la cicloide invertida alrededor de su eje de simetría, se forma un cuenco como este

y como vimos en el apartado: una curva polivalente, si <u>desde dos puntos a altura distinta del cuenco se dejan caer al mismo tiempo dos canicas, resulta que llegan al punto más bajo del cuenco simultaneamente</u>.

Con un poco de física podremos llegar a este resultado interesante. Nuestra cicloide invertida tiene por ecuación

$$x = r\alpha - r\,\mathrm{sen}\alpha$$
$$y = r\cos\alpha - r$$



Si se deja caer una bola desde el punto del parámetro β, entonces, según la ley de caída libre, llega al punto de parámetro α con una velocidad $\sqrt{egh} = V_\alpha$, siendo h la diferencia de altura entre los dos puntos, es decir

$$h = y_\beta - y_\alpha = r\,(\cos\beta - \cos\alpha)$$

y como $\cos\beta = \cos^2\frac{\beta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2} = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$

resulta $V_\alpha = 2\sqrt{gr}\,\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$

El elemento de longitud de la curva en α es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\,d\alpha = 2r\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha$$

Como sabemos, espacio = velocidad x tiempo, y así podemos escribir

$$ds = 2\sqrt{gr}\,\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}\,dt = 2r\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha$$

con esto resulta

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{gr}\cdot\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}}\cdot 2r\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha$$

Por tanto, el tiempo que tarda en la caída por la cicloide desde el punto de parámetro β al punto más bajo del cuenco, de parámetro π, será

$$\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\beta}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\,d\alpha \overset{*}{=} \qquad (*)\ \cos\frac{\alpha}{2}=u$$

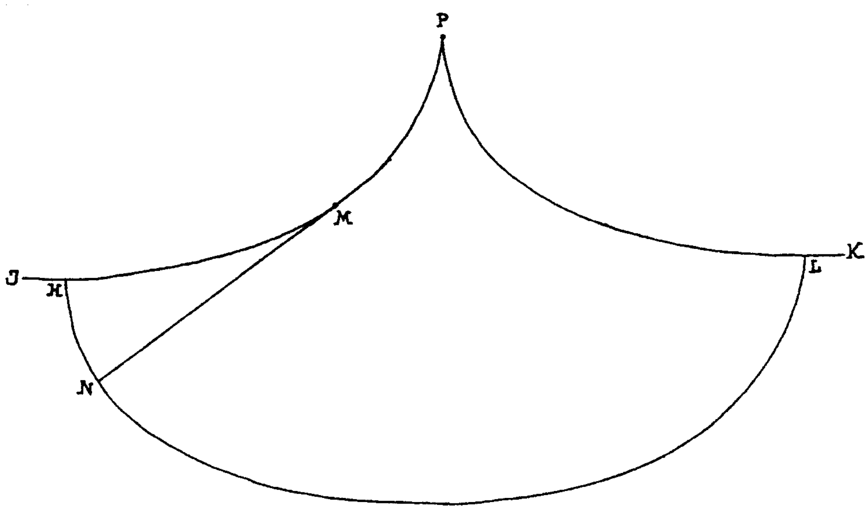
$$=\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{0}^{\cos\frac{\beta}{2}}\frac{du}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-u^2}} \overset{**}{=} \qquad (**)\,u=\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)x$$

$$=\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

QUE ES INDEPENDIENTE DE β

Huygens fue el primero en descubrir esta propiedad en 1673 y en darle una aplicación práctica. Huygens había estudiado a fondo los relojes de péndulo y observó que cuando un reloj tiene una variación en la amplitud de la oscilación del péndulo, entonces deja de ocntar el tiempo correctamente. ¡Pero si la lenteja del péndulo se moviese no en una circunferencia, como en el péndulo normal, sino a lo largo de una cicloide, entonces aunque la amplitud de oscilación fuera mayor o menor, el período del péndulo seguiría siendo el mismo, como hemos visto por nuestras cuentas!

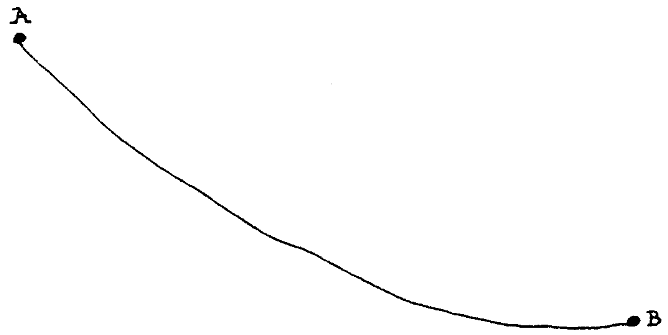
¿Cómo lograr que la lenteja del péndulo se mueva describiendo una cicloide? Huygens se las ingenió mediante una de las propiedades geométricas de la cicloide que hemos visto antes. Si miramos la figura siguiente, podemos apreciar que es como la de la página 48 sólo que invertida



Si cuelgas el péndulo de P con una cuerda de longitud 4r y colocas a ambos lados de P una cicloide PHJ y PLK como topes, según está indicado, entonces se sabe que N describe una cicloide igual. ¡Sea cual sea la amplitud del movimiento pendular de N, el período es el mismo! Es un péndulo que se compensa solo... (ver el apartado: Una curva polivalente).

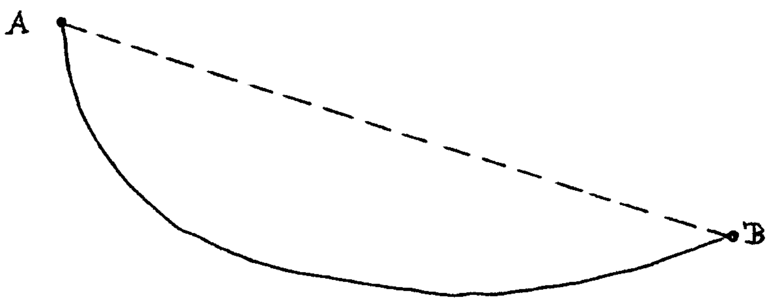
La cicloide tiene otra propiedad física más importante aún en la historia del desarrollo de las ideas matemáticas.

En 1969 Johann Bernoulli propuso un reto a todos los matemáticos de Europa. Consistía en el siguiente problema: te fijan dos puntos A y B en un plano vertical. A más alto que B pero no en la misma línea vertical. Te dan un alambre y una cuenta que se puede ensartar en él. Te piden que encuentres qué forma de curva debes dar al alambre uniendo A con B de modo que la cuenta ensartada emplee el menor tiempo posible en bajar desde A hasta B.



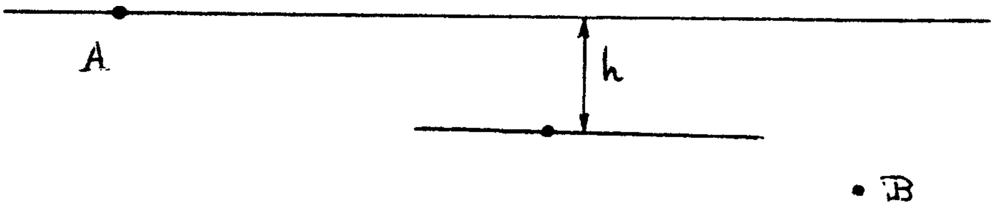
Fueron unos cuantos los matemáticos que resolvieron el problema en el plazo establecido, entre ellos Newton, Huygens, Leibniz, Jakob Bernoulli(hermano de Johann).. Este último dio una solución mediante un método originalísimo que dio lugar a toda una rama de la matemática moderna, el cálculo de variaciones.

La solución, como ya vimos en el apartado anteriormente mencionado, es la cicloide. Una cicloide que pase por A y B que salga vertical de A, como se indica en la figura



La solución de Jakob Bernoulli fue un poco complicada. La de Johann Bernoulli, una mezcla de física y geometría, fue genial, pero no tan fecunda y general como la de su hermano. Veamos un esquema de la de Johan en unos cuantos puntos.

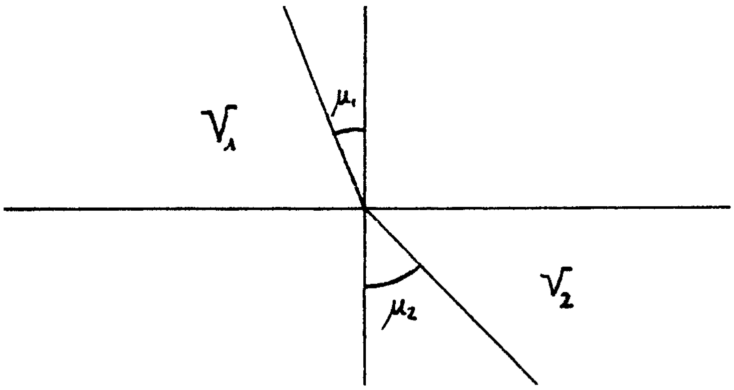
(1) Baje por donde baje la cuenta
cuando haya bajado h su velocidad será $\sqrt{2gh}$ (ley de caída libre). Lo que no sabemos aún es qué dirección tendrá esta velocidad.



(2) Sabemos (principio de Fermat) que la luz viaja de un punto a otro en el mínimo tiempo posible.

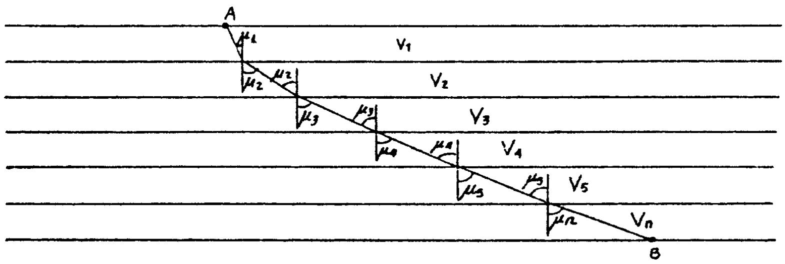
(3) Sabemos también que la luz tiene una velocidad distinta según el medio en el que viaje. Precisamente ésta es la razón del fenómeno de la refracción. Si tenemos dos medios distintos y la luz viaja a velocidades V1, V2 en ellos, entonces, la ley de refracción nos dice que

$$\frac{\operatorname{sen}\mu_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\mu_2}{v_2} = \text{cte} = k$$



(4) Imaginemos un medio óptico formado por láminas l1, l2, l3,...ln, horizontales y delgadas, tal que la velocidad de la luz en cada una de ellas es v1, v2, v3..., como se indica en la figura. Entonces un rayo que parta de A y llegue hasta B seguirá una trayectoria como se indica, de modo que

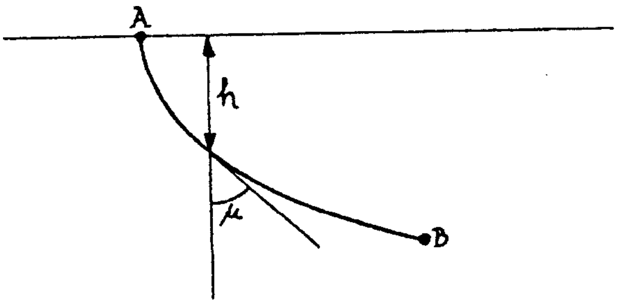
$$\frac{\operatorname{sen}\mu_j}{v_j} = k$$



¡ Y ESE CAMINO DEL RAYO DE LUZ SERIA EL CAMINO DE TIEMPO MINIMO PARA IR DE A A B CON LAS VELOCIDADES INDICADAS!

(5) En el caso de nuestro problema, sabemos que la velocidad al descender h es precisamente $\sqrt{2gh}$. Así, el camino que da el mínimo tiempo será el camino que sigue un rayo de luz en un medio tal que la velocidad de la luz varíe continuamente al descender h y sea precisamente $\sqrt{2gh}$. Pero para este camino ya sabemos que se verificará

$$\frac{\operatorname{sen}\mu}{\sqrt{2gh}} = k$$

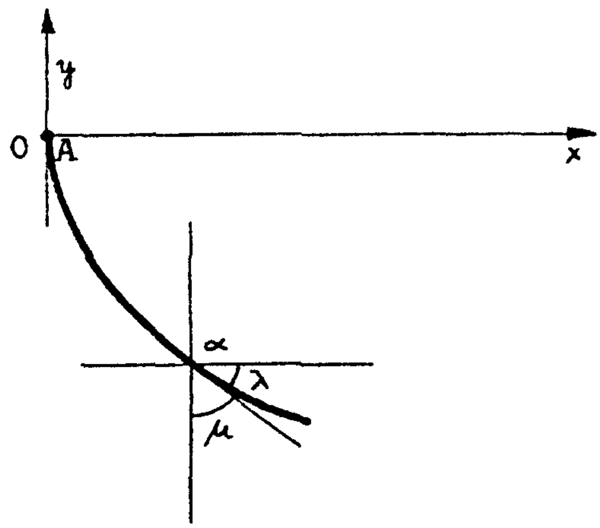


siendo μ el ángulo que forma dicho camino con la vertical.

(6) Así la curva que da el camino de tiempo mínimo compatible con la velocidad señalada a cada altura, v = $\sqrt{2gh}$, es la que satisface

$$\frac{\operatorname{sen}\mu}{\sqrt{2gh}} = k$$

(7) Vamos a ver que la cicloide es la curva que satisface esta condición



$$\frac{dx}{d\alpha} = r - r\cos\alpha$$

La ecuación es

$$\frac{dy}{d\alpha} = -r \operatorname{sen}\alpha$$

Podemos escribir

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{dx}{dy} = \frac{1-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \mu = \frac{\alpha}{2}$$

$$v = \sqrt{2gr\,(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gr}\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

Así, efectivamente,

$$\frac{\operatorname{sen}\mu}{v} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{gr}} = \frac{1}{2\sqrt{gr}} = \text{constante indep. de } \alpha$$

y, por tanto, la cicloide tiene la propiedad que buscamos.