Experiência I. **Análise de conhecimentos**

Objectivo: Vamos apresentar alguns processos, métodos e conceitos, ainda que dispersos pelos programas de Matemática do Ensino Secundário em Portugal, fundamentais para uma boa aprendizagem do tema de Matemática a nível superior, e também para a resolução de problemas de competições internacionais. Antes de mais deixamos-te umas quantas questões de carácter geral, onde são abordados temas de cultura matemática. Terminamos com uma selecção de problemas dos primórdios das competições internacionais de Matemática.

---

1. Algumas questões

(1) Quando foi realizada, pela primeira vez, uma Olimpíada de Matemática? E em Portugal?

(2) Quando é que Portugal participou pela primeira vez nas Olimpíadas Internacionais de Matemática?

(3) Tens conhecimento de problemas de competições internacionais? Que áreas são usualmente abrangidas?

(4) O nível das nossas competições é inferior, igual ou superior ao dessas competições internacionais? Justifiqua a resposta que deres.

(5) Já leste livros de matemática para além dos manuais escolares? Se a resposta que deres for afirmativa, quais?

(6) Como classificarias os teus conhecimentos de inglês, quando confrontado com um texto de matemática nesse idioma?
(Podes substituir o idioma **inglês** por outro qualquer distinto do **português**)

(7) O que te levou a participar em competições de matemática?

(8) Enuncia um teorema de matemática que tenhas alguma vez aplicado na resolução de um problema.

(9) Indica nomes de matemáticos.

(10) Estarias disponível para participar num programa de trabalho anual em matemática?

2. Alguns conceitos

(1) $0.99\cdots = 1$?

(2) Existe unicidade da representação decimal de um número real?

(3) O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é numerável?

(4) Estabeleçe uma aplicação bijectiva entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos múltiplos de três. Que te leva a concluir?

(5) Identifica a igualdade $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Determina uma expansão para $(a+b)^n$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

(6) O número $\sqrt{7}/(1+\sqrt{2})$ é algébrico? Justifica.

(7) O número π é transcendente? Justifica.

(8) Define a função tangente, i.e. indique o seu domínio, contradomínio e expressão analítica. Estamos em presença de uma bijecção entre $\mathbb{R}$ e um seu subconjunto?

(9) Define média aritmética e geométrica dos três números reais a, b, c. Indica a relação que existe entre elas.

(10) Seja p o polinómio de expressão analítica $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. O produto dos seus zeros é igual a $(-1)^n a_n/a_0$?

3. Algumas equações

(1) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que verificam $2^{2+x} - 2^{1-x} = 8$.

(2) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que verificam $3^{2^x} = 2^{3^x}$.

(3) Determine todas as aplicações bijectivas de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ tais que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(xy) = f(x)f(y)$.

(4) Estabelece a identidade $(a^2 + a^{4/3}b^{2/3})^{1/2} + (b^2 + b^{4/3}a^{2/3})^{1/2} = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

(5) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} = \frac{1}{\log_{abc} x}$, $a, b, c, x \in \mathbb{R}^+$.

(6) Resolve o sistema de equações $x^y = y^x$ e $y = 3x$.

(7) Definimos por recorrência, uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estipulando que $f(1) = 3$ e $f(n+1) = 5f(n) + 1$. Determina uma expressão analítica para f.

(8) Com as operações usuais de adição algébrica, multiplicação, divisão e módulos, estabelece uma fórmula que determine dados dois números, o maior deles.

IMO 59 Para que valores de x se tem

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = A\,,$$

para (a) $A = \sqrt{2}$, (b) $A = 1$, (c) $A = 2$?

Indicação: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

IMO 59 Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considera a equação quadrática em $\cos x$:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0\,.$$

Usando a, b, c, determina uma equação quadrática em $\cos 2x$, com os mesmos zeros da equação inicial.

4. Problemas das primeiras Olimpíadas de Matemática

Sabes quando foi realizada a primeira Olimpíada de Matemática?

Foi no ano de 1894, na Hungria. Nesse ano, a Sociedade de Matemática e Física da Hungria promoveu uma competição de Matemática, envolvendo todos os alunos dos últimos anos das escolas, para homenagear seu presidente Loránd Eötvös, eleito ministro da educação do país. O evento foi um exito, e passou a ser realizado todos os anos.

Vamos mostrar alguns problemas dessa competição. As ferramentas exigidas são elementares, mas as soluções necessitam de uma certa dose de criatividade. Aproveitem!

(1) Prova que as expressões $2x + 3y$ e $9x + 5y$ são divisíveis por 17 para os mesmos pares de valores dos inteiros x e y.
(2) Determina todos os valores do natural n, para os quais $2^n + 1$ é múltiplo de 3.
(3) Na figura 1, $[AM], [BN], [CP]$ são paralelos. Prova que $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{BN} = \dfrac{1}{CP}$.

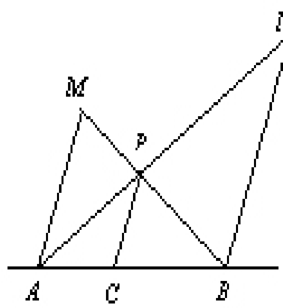

FIGURA 1. Problema 3

(4) A sucessão $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma reordenação arbitrária dos números $1, 2, 3, \ldots, n$. Prova que se n é um número ímpar o produto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \ldots (a_n - n)$ é um número par.
(5) Se a, b, c são números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, prova que
$$-1/2 \leq ab + bc + ac \leq 1\,.$$
(6) Prova que para todo natural $n > 2$, se tem $(1\,2\,\ldots\,n)^2 > n^n$.
(7) No triângulo $\Delta[ABC]$, $[AD]$ é a bissetriz do ângulo A. Prova que $AD < \sqrt{AB\,AC}$.
(8) Representa o conjunto dos números $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ como união disjunta de dois quaisquer subconjuntos. Prova que um dos subconjuntos contém dois números e sua diferença.
(9) Dá uma fórmula explícita para $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sabendo que $f(1) = 1$, $f(2) = 5$ e $f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

5. INDICAÇÕES SOBRE A RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

1. Resposta a estas questões podem encontrar-se na experiência "O Diabo dos Números" bem como em alguns livros de matemática do Ensino Secundário.

Podes também consultar a parte dedicada aos comentários a livros de matemática que te podem ser úteis na descoberta da beleza matemática.

2. As questões aqui colocadas são já vossas conhecidas, de qualquer forma daremos respostas a estas e outras questões no decorrer das próximas sessões.

   Nota que os temas de matemática elementar que aparecem nas competições internacionais dividem-se em Aritmética, Geometria, Números, Trigonometria, Desigualdades e Equações Funcionais.

   Se analisares com atenção os exercícios que colocamos nas próximas secções verás algumas destas matérias.

3.(1) Considera a mudança de variável $y = 2^x$ e resolve a equação quadrática resultante.

3.(2) Toma logarítmos em ambos os membros da equação (justifique!).

3.(3) Usando as propriedades aditiva, $f(0) = 0$, e multiplicativa, $f(1) = 1$.

Nota que da sobrejectividade sabemos que existe um $f(x) \neq 0$ e da injectividade $f(x) = 0$ somente para $x = 0$.

Agora para $n \in \mathbb{N}$ temos $f(n+1) = f(n) + 1$, pelo que $f(n+1) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Mostra que a expressão geral de $f(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$.

3.(4) No primeiro termo da igualdade factoriza o termo $a^{4/3}$ e no segundo o termo $b^{4/3}$.

3.(5) Mostra que $\log_a x = \ln x / \ln a$, $a, x \in \mathbb{R}^+$.

3.(6) Justifica que podes tomar logarítmos na primeira equação do sistema.

3.(7) Iterando o processo vemos que

$$f(n+1) = 5^n f(1) + (5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 1)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

i.e $f(n) = 5^n\, 3 + (5^n - 1)/4$, $n \in \mathbb{N}$.

3.(8) Nota que $|b-a| = \begin{cases} b-a & , \ b-a \geq 0 \\ a-b & , \ b-a < 0 \end{cases}$, cuja média aritmética com $a+b$ nos dá o resultado pedido. Obtenha agora o menor deles.

3.(9) Tomando x_1 igual ao primeiro termo e x_2 igual ao segundo termo obtemos

$$A^2 = x + \sqrt{2x-1} + x - \sqrt{2x-1} + 2(x^2 - 2x + 1)^{1/2}\,,$$

e portanto $A^2/2 = x + |x-1|$. Resolvendo esta equação no intervalo $[1/2\,, +\infty[$ para cada valor do parâmetro A, obtemos a solução do problema.

3.(10) Basta notar que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

4.(1) Basta notar que $4(2x+3y) + (9x+5y) = 17(x+y)$.

4.(2) Prova por indução que n ímpar é a solução do problema.

4.(3) Por semelhança de triângulos vemos que

$$\frac{CP}{AM} = \frac{CB}{AB}\,, \quad \frac{CP}{BN} = \frac{AC}{AB}\,,$$

que somada ordenadamente nos dá a igualdade pretendida.

4.(4) O produto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)\ldots(a_n - n)$ possui um número ímpar de termos porque n é ímpar. Mas, a soma desses termos é zero, que é par. Como a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares não pode ser par, concluímos que um dos termos é par e, consequentemente, o produto é um número par.

4.(5) Para obter cada uma das desiguladades expande as expressões

$$(a+b+c)^2 \text{ e } (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$$

e aplica a hipótese.

4.(6) A expressão do primeiro membro da desigualdade pode ser escrita na forma

$$1n\,2(n-1)\,3(n-2)\,\ldots\,(n-2)3\,(n-1)2\,n1$$

e os produtos

$$1n\,,\ 2(n-1)\,,\ 3(n-2)\,,\ \ldots\,,\ (n-2)3\,,\ (n-1)2\,,\ n1\,,$$

são todos $\geq n$.

4.(7) Considera a circunferência circunscrita ao triângulo ABC (cf. figura 2). A bissetriz

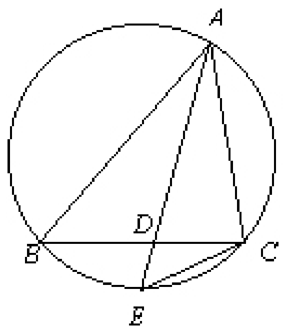

Figura 2. Problema 7

AD encontra a circunferência em E, ponto médio do arco BC. Como os ângulos ABC e AEC são iguais (justifique!) e como os ângulos BAE e EAC são também iguais (justifique), concluímos que os triângulos ABD e AEC são semelhantes. Daí,

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}\,,\quad AD<AE\,.$$

4.(8) O número 2 não pode estar no mesmo conjunto que os números 1 ou o 4 pois $2-1=1$ e $4-2=2$. Portanto, vamos colocar o número 2 num conjunto e os números 1 e 4 no outro. Continue este processo!

4.(9) Confirma que a relação que f verifica se pode escrever como

$$f(n+2)-f(n+1)=2\,(f(n+1)-f(n))\ ,\quad n\in\mathbb{N}\,,$$

pelo que $f(n+2)-f(n+1)=2^n\,(f(2)-f(1))$, $n\in\mathbb{N}$. Aplicando a propriedade telescópica obtemos que

$$f(n)=-1+\sum_{k=2}^{n}2^n\,,\quad \text{i.e.}\quad f(n)=-3+2^{n+1}\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$$