

## Primeiro problema das Olimpíadas Internacionais de Matemática de 2004

Enunciado: Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com  $AB \neq AC$ . A circunferência de diâmetro  $BC$  intersecta os lados  $AB$  e  $AC$  nos pontos  $M$  e  $N$  respectivamente. Seja  $O$  o ponto médio do lado  $BC$ . As bissectrizes dos ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{MON}$  intersectam-se em  $R$ . Prove que as circunferências circunscritas aos triângulos  $BMR$  e  $CNR$  têm um ponto em comum que pertence ao lado  $BC$ .

Resolução: Para uma melhor compreensão do problema, considera a figura 1. Convém realçar

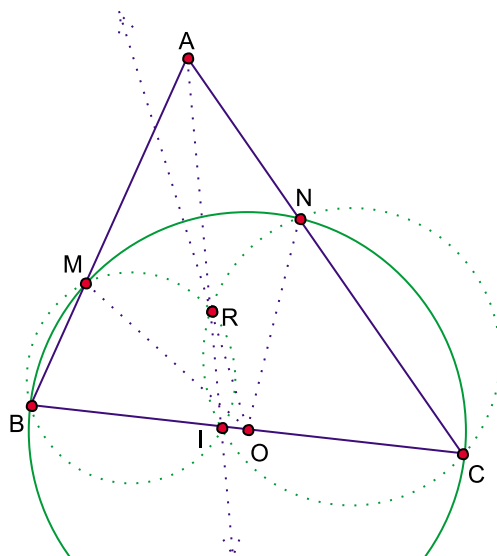


Figura 1: Interpretação geométrica do problema proposto

que, visto o desenho ter sido feito a computador, e considerando verdadeiro o que queremos demonstrar, é natural que o ponto  $I$ , que assumimos ser a outra intersecção das circunferências, vá cair sobre o lado  $BC$ . Então, para esta representação, o ponto  $I$  é efectivamente a intersecção das circunferências.

Como  $B, C, M, N$  formam uma circunferência, então os ângulos opostos do quadrilátero  $BCNM$  são suplementares, daí que  $\widehat{ABC} \cong \widehat{ANM}$  e  $\widehat{ACB} \cong \widehat{AMN}$ .

Como estas conclusões respeitam a conservação dos ângulos para as inversões de centro  $A$ , então é natural que tentemos aplicar essa mesma inversão, neste caso que transforme  $B$  em  $M$  (que deverá transformar  $C$  em  $N$ ).

Consideremos então  $\Gamma$  a circunferência de centro  $O$  que passa por  $B$ ,  $\Gamma_1$  a circunferência que passa por  $B, M$  e  $R$  e  $\Gamma_2$  a circunferência que passa por  $C, N$  e  $R$ .

Temos então que o raio da inversão  $I$  de centro  $A$  só poderá ser  $\sqrt{\text{pot}_\Gamma(A)}$ . Sendo este o raio,



vemos logo que também  $I(C) = N$ .

No entanto, acontece que  $\text{pot}_{\Gamma_1}(A) = \text{pot}_{\Gamma}(A) = \text{pot}_{\Gamma_2}(A)$ , daí que por esta igualdade tenhamos visto que  $R$  pertence a ambas as circunferências,  $I(R) = I$ . Assim, basta demonstrar que  $I(R)$  está sobre  $BC$ , ou então, que  $R$  está sobre a circunferência que passa por  $A$ ,  $M$  e  $N$ , devido ao que é conhecido sobre a inversão de conjuntos de pontos.

Consideremos então um ponto  $R'$  que é a intersecção da circunferência que passa em  $A$ ,  $M$  e  $N$  com a bissectriz de  $\widehat{MAN}$ . Queremos então provar que  $R' = R$ , ou seja, que  $R'$  pertence à bissectriz de  $\widehat{MON}$ . Pelo Teorema do Arco Capaz, como numa mesma circunferência a ângulos iguais correspondem arcos iguais (logo cordas iguais), como  $\widehat{MAR'} \cong \widehat{R'AN}$ , então  $MR' = R'N$ . Mas como  $OM = ON$ , concluímos que  $R'$  está efectivamente sobre a bissectriz de  $\widehat{MON}$ , logo  $R' = R$ , portanto  $R$  pertence à circunferência que passa por  $A$ ,  $M$  e  $N$ , logo  $I(R)$  está sobre o lado  $BC$ .

---

## “XIX Olimpíada Ibero-Americana de matemática: Prova por equipas”

**Instruções:** A partir da situação matemática que se propõe, devem os alunos obter como solução, resultados matemáticos relacionados com a situação apresentada, estabelecendo e resolvendo os problemas matemáticos por ela sugeridos.

**Enunciado:**  $PQRS$  é um trapézio, com  $PQ$  paralelo a  $RS$ . As diagonais  $PR$  e  $QS$  cortam-se em  $T$ ;  $TU$  é paralela às bases  $PQ$  e  $SR$ , com o ponto  $U$  no segmento  $QR$ . Supomos que as medidas dos comprimentos dos segmentos  $PQ = a$ ,  $RS = b$ ,  $TU = c$ , são números naturais, e consideramos que o triângulo  $ABC$  cujos lados são esses números naturais  $a, b, c$ . Tomamos  $S$  como a área do triângulo  $ABC$ .

**Problema proposto:** Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas circunferências tangentes externamente no ponto  $O$  e com centros  $O_1$  e  $O_2$  respectivamente. Uma recta tangente comum que não passa por  $O$  e que é tangente a  $C_1$  em  $T_1$  e a  $C_2$  em  $T_2$ . O ponto  $P$  é o ponto de intersecção de  $O_1T_2$  com  $O_2T_1$ . Se  $O_1T_1$ ,  $O_2T_2$  e  $OP$  tem medidas inteiras e mínimas para  $O_1T_1/O_2T_2 = k$ , onde  $k$  é um número racional positivo dado, prove que a soma das medidas de  $O_1T_1$  e de  $O_2T_2$  é um quadrado perfeito.

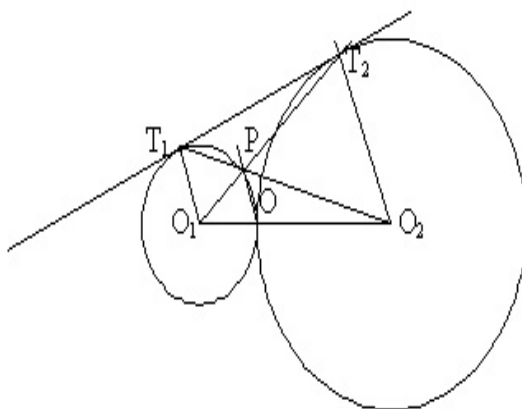


Figura 2: Interpretação geométrica do problema proposto

**Interpretação geométrica:**  $O_1T_1 = a$ ,  $O_2T_2 = b$ . Vamos provar que  $OP \parallel O_1T_1 \parallel O_2T_2$ . De facto,  $O_1T_1 \parallel O_2T_2$  porque ambos são perpendiculares à recta tangente comum. Então os triângulos  $O_1T_1P$  e  $O_2T_2P$  são semelhantes com razão  $a/b$ . Logo  $T_1P/PO_2 = a/b$  e como  $O_1O = a$ ,  $O_2O = b$  e assim  $O_1O/O_2O = a/b$ . E então  $OP \parallel O_1O$ . Seja  $OP = c$ . Usando a semelhança entre os triângulos  $O_1T_1O_2$  e  $OPO_2$  temos  $O_1T_1/O_1O_2 = OP/OO_2$  e portanto  $a/(a+b) = c/b$ , i.e.  $c = ab/(a+b)$ .



Interpretação em teoria dos números:  $c = ab/(a + b)$  deve ser inteiro com  $a$  e  $b$  inteiros. Seja  $\text{m.d.c.}(a, b) = d$ , então  $a = dx$  e  $b = dy$  com  $x$  e  $y$  inteiros e  $\text{m.d.c.}(x, y) = 1$ . Então  $c = d^2xy/d(x + y) = dxy/(x + y)$ . Já que  $\text{m.d.c.}(x + y, x) = \text{m.d.c.}(x + y, y) = \text{m.d.c.}(x, y) = 1$  então  $x + y | d$ , i.e.  $d = m(x + y)$ , com  $m$  inteiro. E assim temos  $a = mx(x + y)$ ,  $b = my(x + y)$  e  $c = m(x + y)xy/(x + y) = mxy$ . Como queremos  $a$ ,  $b$  e  $c$  mínimos e inteiros, então  $m = 1$ . Finalmente temos  $a = x(x + y)$  e  $b = y(x + y)$  e assim  $a + b = (x + y)^2$ , como queríamos.

---



“XIX Olimpíada Ibero-Americana de matemática: Prova Individual”

Problema 1: Deve-se colorir as casas de um tabuleiro  $1001 \times 1001$  de acordo com as seguintes regras:

- Se duas casas têm um lado comum, então pelo menos uma delas deve ser colorida.
- De cada seis casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna, devem colorir-se sempre pelo menos duas delas que sejam adjacentes

Determinar o número mínimo de casas que devem ser coloridas.

**Resolução:** Consideremos cinco casas consecutivas de uma qualquer linha. De entre estas cinco casas, pelo menos três têm de ser coloridas. Se apenas duas estivessem coloridas, seríamos obrigados pela primeira regra a dispô-las na forma BCBCB, onde B representa uma casa branca e C uma casa colorida. Mas então, juntando mais uma casa, quer à esquerda quer à direita, teríamos seis casas consecutivas que não cumprem a segunda regra.

Como queremos minimizar o número de casas coloridas vamos então procurar padrões de coloração para os quais escolhendo quaisquer cinco casas consecutivas de uma linha ou coluna, três e só três dessas casas estão coloridas. Formando esses padrões a partir de peças de cinco casas, temos três hipóteses para as peças:

CBCBC, CCBCB, BCCBC,

e suas simétricas. Experimentando um pouco, facilmente se vê que, a partir destas peças, os únicos padrões que cumprem as regras e simultaneamente minimizam as casas coloridas são os que se obtêm por repetição de uma só das três peças. Mais, a linha formada a partir de qualquer uma das três peças é uma mera deslocação da linha obtida a partir de outra delas. Podemos portanto escolher uma delas para construir o padrão. Vamos tomar a primeira peça: CBCBC.

Como  $1000 \equiv 1 \pmod{5}$  vamos ter os seguintes tipos de linhas criados a partir da peça:

1.  $200 \times (\text{CBCBC}) + \text{C}$ ;
2.  $\text{BCBC} + 199 \times (\text{CBCBC}) + \text{CB}$ ;
3.  $\text{CBC} + 199 \times (\text{CBCBC}) + \text{CBC}$ ,

e respectivos simétricos.

No tipo 1 começamos com C e temos  $200 \times 3 + 1 = 601$  casas coloridas.

No tipo 2 começamos com B e temos  $2 + 199 \times 3 + 1 = 600$  casas coloridas.

No caso 3 começamos com C e temos  $2 + 199 \times 3 + 2 = 601$  casas coloridas.



O número de casas coloridas de uma linha é portanto determinado pela primeira casa da linha, sendo o mesmo é válido para as colunas. Como a primeira linha do tabuleiro contém a primeira casa de cada uma das colunas do tabuleiro, a coloração da primeira linha determina o número de casas coloridas de todo o quadrado. Mas sendo a primeira linha determinada pela sua primeira casa, a coloração da primeira casa da primeira linha determina o número de casas pintadas em todo o tabuleiro.

Se a primeira casa da primeira linha é colorida: temos na primeira linha  $601 \times C$  e  $600 \times B$ . Temos então 601 colunas de tipo 1 ou 3 e 600 colunas de tipo 2. Portanto, número total de casa coloridas =  $601 \times 601 + 600 \times 600 = 721201$ .

Se a primeira casa da primeira linha é branca: Temos na primeira linha  $600 \times C$  e  $601 \times B$ . Temos então 600 colunas de tipo 1 ou 3 e 600 de tipo 2. Portanto, número total de casas coloridas =  $600 \times 601 + 601 \times 600 = 721200$ .

O número mínimo de casas que devem ser coloridas é então 721200.

---

**Problema 4:** Determinar todos os pares  $(a, b)$ , onde  $a$  e  $b$  são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que  $100a + b$  e  $201a + b$  são quadrados perfeitos de quatro dígitos.

---

**Resolução:** Sabemos que existem  $x$  e  $y$ , inteiros positivos de dois dígitos cada um tais que  $201a + b = x^2$  e  $100a + b = y^2$ . Subtraindo as equações obtemos

$$101a = x^2 - y^2 \Leftrightarrow 101a = (x + y)(x - y), \quad (1)$$

pelo que, como 101 é primo,  $101|x + y \vee 101|x - y$ . Como  $x$  e  $y$  são de dois algarismos e  $x > y$ , então  $0 < x - y < 101$  e portanto 101 não divide  $x - y$ , pelo que  $101|x + y$ . Mas  $0 < x + y < 202$ , logo  $101 = x + y$ .

Substituindo na equação 1, vem  $101a = 101(x - y) \Leftrightarrow a = x - y \Leftrightarrow a = (101 - y) - y = 101 - 2y$ .

Substituindo agora numa das equações iniciais, podemos obter  $b$  em função de  $y$ , i.e.  $100a + b = y^2 \Leftrightarrow 100(101 - 2y) + b = y^2 \Leftrightarrow b = y^2 + 200y - 10100$ .

Como  $b$  é um inteiro positivo de dois dígitos, e portanto  $10 \leq y^2 + 200y - 10100 < 100$ , temos as desigualdades  $y^2 + 200y - 10110 \geq 0$  e  $y^2 + 200y - 10200 < 0$ .

Resolvendo as desigualdades quadráticas vem que: Da primeira desigualdade temos  $y \leq -100 - \sqrt{20110} \vee y \geq -100 + \sqrt{20110}$ . Como queremos  $y$  inteiro positivo, tem-se que  $y \geq 42$ ; Da segunda desigualdade, temos  $y \geq -100 - \sqrt{20200} \wedge y \leq -100 + \sqrt{20200}$ , donde obtemos que  $y \leq 42$ .

Como tal,  $y = 42$ . Então  $x = 101 - 42 = 59$ , e portanto  $a = x - y = 59 - 42 = 17$ ,  $b = y^2 - 100 \cdot a = 1764 - 1700 = 64$ . Portanto, a única solução é o par  $(17, 64)$ .