

Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Três robots foram programados para moverem-se num plano, apenas quando os outros dois estão parados, e numa direcção paralela à recta em que estão os robots parados. Inicialmente os robots estão à distância de um metro entre si. Ao fim de algum tempo um dos robots fica a uma distância de dois metros em relação a cada um dos outros dois. Qual a distância entre esses outros dois?
2. De quantas maneiras se podem alinhar numa fila 19 pessoas, todas de altura diferente, de modo a que ninguém tenha uma pessoa mais baixa imediatamente à sua frente e outra mais baixa imediatamente atrás de si?
3. Seja $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinómio qualquer. Determine os polinómios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ que satisfazem a igualdade $p(p(x)) = q(p(x))$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
4. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $|AB| = |AC|$ e tal que a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ intersecta o lado $[AC]$ no ponto D . Supondo que $|BC| = |BD| + |AD|$, determine a medida de todos os ângulos de $[ABC]$.
5. Mostre que entre 9 números reais distintos, existem dois números reais a e b tais que $ab \neq -1$ e

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leq \sqrt{2} - 1.$$