Problema da 'secção áurea'

Dado um segmento de recta, construa com régua e compasso os seus dois pontos áureos.

Trata-se dum problema de alguma complexidade. A sua resolução passa pela compreensão de etapas simples de construção cujo encadeamento leva ao que se pretende. Apresento a resolução mais simples a que cheguei.

Resolução. Seja $[OA]$ o segmento dado. Escolha-se o comprimento de $[OA]$ como padrão de medida de comprimentos. Construa-se, com origem em O, um sistema de eixos ortonormado, XOY, de modo a que o ponto A tenha coordenadas $(1, 0)$. Sejam R e S os pontos áureos de $[OA]$, que têm coordenadas $(r, 0)$ e $(s, 0)$, respectivamente; vamos supor que $r < s$. Por definição de secção aúrea, temos $[OA]/[OS] = \phi = [OA]/[RA]$. Recorde que $1/\phi = \phi - 1$. Chega-se, então, aos seguintes valores:

$$s = \phi - 1 \qquad \text{e} \qquad r = 2 - \phi. \tag{1}$$

Consequentemente, a determinação de R e S equivale à determinação de ϕ com régua e compasso. É isso que se esboça na figura seguinte.

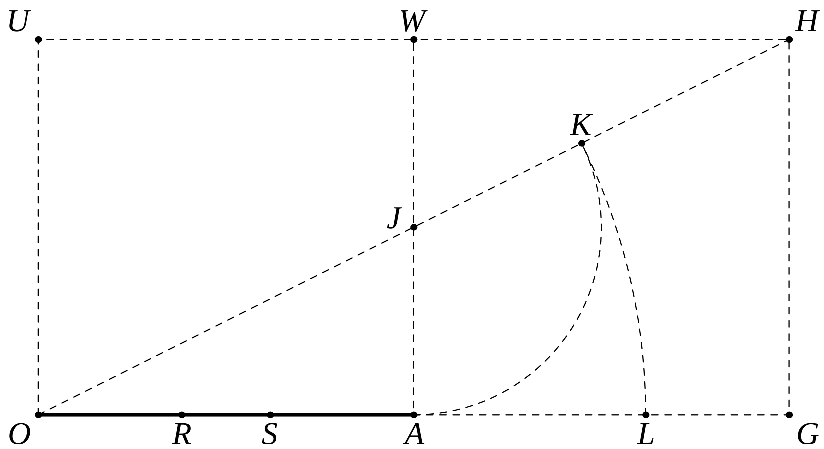

Figura 1: *Os pontos áureos de* $[OA]$.

1. Traçado $[OA]$, constroem-se os quadrados $OUWA$ e $AWHG$ (com operações conhecidas e que aqui não se reproduzem) e o segmento $[OH]$.

2. Pelo teorema de Pitágoras, $[OH]$ mede $\sqrt{5}$; portanto $[OJ]$ mede $\sqrt{5}/2$, pelo teorema de Thales (*i.e.*, semelhança de $\triangle OAJ$ e $\triangle OGH$).

3. Constrói-se o ponto K de $[JH]$, tal que $[JK]$ mede $1/2$ (K é um dos pontos de intersecção da circunferência de centro J e que passa por V — na figura mostra-se apenas o arco $\widehat{VK}$). Assim, $[OK]$ mede ϕ.

4. Traça-se o arco de circunferência de centro O e que passa por K, o qual intersecta $[OG]$ num ponto L; $[OL]$ mede ϕ, *i.e.*, o comprimento de $[OL]$ é ϕ vezes o de $[OA]$.

5. A determinação de R e S faz-se usando (1): $s = \overline{OL} - \overline{OA}$, pelo que S é o ponto do semi-eixo positivo dos X's tal que $\overline{SL} = \overline{OA}$; portanto, S determina-se por transporte da distância $\overline{OA}$. Também por transporte de distância se pode determinar R, pois, por ser $2 - \phi = \overline{LG}$, temos $\overline{OR} = \overline{LG}$ (também se pode transportar a distância $\overline{SA}$, pois sabemos que R tem de satisfazer $\overline{OR} = \overline{SA}$.

Nota. Numa aula dedicada ao assunto, após a determinação de L, fizemos a determinação de S por uma estratégia diferente da usada acima:

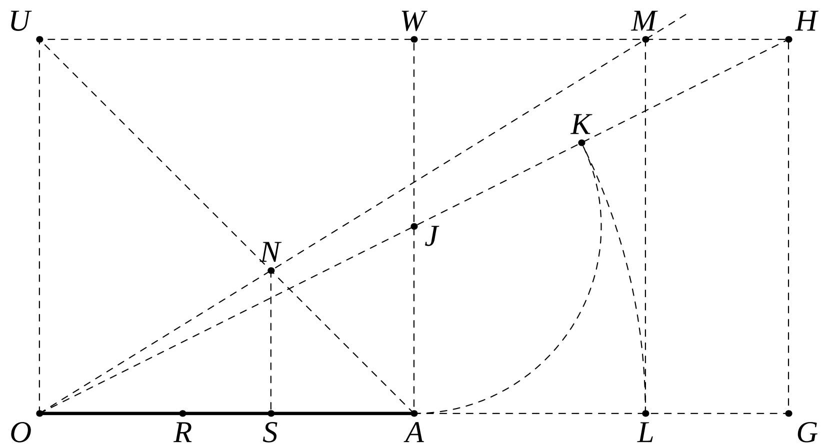

Figura 2: *A "diagonal de ouro"*

5.* Determina-se o ponto M, pé da perpendicular a UH lançada de L. O rectângulo $OLMU$ é de ouro.

6.* Traça-se a semi-recta $\dot{O}M$ que é uma diagonal muito especial: é diagonal de todos os rectângulos de ouro do primeiro quadrante, que têm O como vértice e lado maior assente sobre o semi-eixo positivo dos X's.

7.* Traça-se a recta UA, que é o lugar geométrico dos pontos de coordenadas (x, y) tais que $x + y = \overline{OA}$.

8.* Define-se N como intersecção de UA com OM. Define-se S como projecção ortogonal de N sobre OG. Este S é ponto áureo de $[OA]$ (porquê?). R pode determinar-se por transferência de distâncias.