

Problemas da Linguagem e da Matemática

Eduardo Marques de Sá
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Dezembro 2001

No seguimento, encontrará pequenos textos contendo desacertos de calibre diverso, desde erros pesados a pequenos desajustes de linguagem. Há-os de carácter científico, pedagógico, de linguagem técnica, de Língua Materna. Relativamente a cada um dos textos, peço-lhe comentários críticos que, num primeiro tempo, de análise rigorosa e pormenorizada, o desmontem ou destruam. Num segundo tempo, o fundamental é que lhe exigirá maior esforço, construa alternativas mais aceitáveis.

Trata-se de exemplos seleccionados, indo, por vezes, a ‘pequenos nada’s’, com os quais pretendo ilustrar o processo que utilizo na demolição e reconstrução de tudo o que escrevo. O espírito a adoptar no processo de elaboração de textos para os nossos alunos é o de pensar que eles irão ser lidos, também, pelos nossos colegas e por pais de alunos com cultura e sentido crítico de alto nível... Imagine qual deve ser o peso da responsabilidade das pessoas que elaboram os enunciados de exames nacionais, os programas, os manuais. Procure colocar-se, sempre, a esse nível, quando produz um texto de matemática.

1. Depois de definida a relação “maior que”, definem-se outras relações de ordem em $\mathbb{R}$. O texto continua:

“ E a partir dela podemos definir ainda outras relações de ordem já conhecidas do 3º ciclo:

Relação ‘menor que’: $x < y \Leftrightarrow y > x$

Relação ‘maior ou igual que’: $x \geq y \Leftrightarrow x > y \vee x = y$

[...]”

2. Teorema: Se $u_n \rightarrow 0$ também $ku_n \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Demonstração: Se $k = 0$, $ku_n = 0$ logo $ku_n \rightarrow 0$.

Seja: $k \neq 0$: $\forall \delta > 0$ temos $u_n < \frac{\delta}{|k|}$ a partir de certa ordem, visto que u_n é infinitésimo.

Donde $ku_n < \delta$ a partir dessa ordem.

Ora isto significa que $ku_n \rightarrow 0$.

c.q.d.

3. Teorema: O inverso dum infinitamente grande é um infinitésimo

Hipótese: a_n é infinitamente grande (de qualquer tipo)

Tese: $\frac{1}{a_n}$ é infinitésimo ($a_n \neq 0, \forall n$)

Demonstração: Por hipótese, $\forall \delta > 0$ há uma ordem

depois da qual $a_n > \frac{1}{\delta}$. Então, $\frac{1}{|a_n|} < \delta$ ou ainda

$\left| \frac{1}{a_n} \right| < \delta$, o que significa que $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

c.q.d.

4. Teorema: O inverso dum infinitésimo é um infinitamente grande.

Hipótese: b_n é infinitésimo.

Tese: $\frac{1}{b_n}$ é infinitamente grande ($b_n \neq 0, \forall n$)

Demonstração: Por hipótese, $\forall \delta > 0$ há uma ordem

depois da qual $a_n > \frac{1}{\delta}$. Então, $\frac{1}{|a_n|} < \delta$ ou ainda

$\left| \frac{1}{a_n} \right| < \delta$, o que significa que $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

c.q.d.

5. Na “definição” seguinte, as incorrecções técnicas e os deslizes de linguagem concorrem para transmitir uma ideia errada:

“A grandeza a é directamente proporcional à grandeza b se existe um número c de modo que:

- $a = bc$ ou $\frac{a}{b} = c$;
- se a é zero, b também é zero.”

6. Um número é divisível por 3 se a soma dos números representados pelos seus algarismos é múltiplo de 3. [...] Exercício: usa o critério [...] para mostrar que 4451 não é divisível por 3.

7. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ ou $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$

8. Analisemos a afirmação: ‘*Ele está a mentir.*’

– Se ele está na verdade a mentir, então é porque diz a verdade. E se diz a verdade é porque não está a mentir.

– Se ele não está a mentir, então ele diz a verdade. Mas como ele afirma que está a mentir, então ele está a mentir.

Em qualquer caso, ele afirma que está a mentir e que não está a mentir. Estas expressões contraditórias, como ‘*Ele está a mentir*’, chamam-se **paradoxos** ou **falácias**.

9. Jogo: O 1º jogador coloca na sua calculadora um nº qualquer (positivo) entre 0 e 1. O 2º jogador adiciona-lhe o nº que quiser. O 1º volta a fazer o mesmo, e assim sucessivamente, tentando cada um não totalizar 3 [...] O primeiro jogador que igualar ou ultrapassar 3, perde.
[...]

Se o jogo for jogado com papel e lápis achas que o jogo poderá não ter fim? Porquê?

10. Vejamos, por exemplo, que $\sqrt{2}$ é irracional. Consideremos um triângulo rectângulo isósceles de lado 1.

[Figura, com catetos, AC e BC , de comprimento 1]

Procuremos a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Se essa razão existir, então será $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{p}{q} = \sqrt{2}$

sendo p e q dois números não pares e admitindo que a fracção $\frac{p}{q}$ já está simplificada.

Como, pelo teorema de Pitágoras $p^2 = q^2 + q^2$, então $p^2 = 2q^2$. Daqui concluímos que p é par, pois é o dobro de outro número [...]"

11. Durante muito tempo pensou-se que os racionais correspondiam a uma recta ‘sem buracos’. Podemos não conseguir escrever na totalidade um número racional mas conseguimos ‘imaginá-lo’. Por exemplo, podemos conhecer qual é a centésima casa decimal de $20/44 = 0.45454545 \dots$

Mas com os irracionais não é assim! A impossibilidade de responder a uma questão destas para um destes números, contribuiu para que fossem precisos muitos séculos para os ‘aceitar’, embora já se conhecessem alguns, como $\sqrt{2}$ e π .

Qual será a milésima casa decimal de $\sqrt{17}$? Não o podemos saber agora, pois esta sequência de casas decimais parece ao acaso! No entanto é única e tem uma organização.

12. Determine, usando a máquina de calcular, quais das fracções $1/k$ apresentam dízimas periódicas. Tenta valores inteiros de k entre 1 e 30.

- 13.

[Figura: um círculo dividido em 8 sectores iguais (de 45° cada) coloridos, alternadamente, a preto e branco.]

Por rotação qual o menor elemento que gera a figura?

14. ‘Raio’ é o segmento que une qualquer ponto da circunferência com o seu centro.

‘Corda’ é o segmento que une quaisquer dois pontos da circunferência.

15. $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$ (compare com $A \Leftrightarrow B \vee C$).

16. O velocímetro do automóvel marcava, no instante t , $v(t)$ km/h

[É apresentado o gráfico de $v(t)$]

Olhando para o gráfico, temos $\frac{v(7)-v(2)}{7-2} = \frac{100}{5} = 20$.

Assim, em média, dos 2 aos 7 segundos, a velocidade aumentou 20 km por segundo. Isto não quer dizer que em cada segundo tenha aumentado 20. Determinemos, por exemplo, quanto aumentou exactamente no 4º segundo.

[Depois de manipulação gráfica, com papel e lápis, determina o declive da recta: 18.2]

Concluimos que o aumento da velocidade no instante $t = 4$ foi aproximadamente 18.2 km/s.

17. Dada uma função arbitrária, apresentam-se dois modos de introduzir a sua derivada: a “determinação algébrica” e a “determinação geométrica”.
18. Todas as sucessões que tendem para $+\infty$, a partir de certa ordem, são crescentes.
19. Definição: Uma sucessão é convergente quando tende para um número real.

Exemplo: a sucessão $1/n \rightarrow 0$, como 0 é um número real a sucessão $(1/n)$ é convergente.

Teorema: Uma sucessão (u_n) tende para um número real a se e só se $(u_n - a)$ for um infinitésimo.

Definição: Chamamos *oscilantes* às sucessões que tendem para ∞ ou que não têm limite.

20. Definição: *Espaço amostral* é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.

Definição: *Acontecimento* de uma experiência aleatória é cada um dos subconjuntos do espaço amostral.

Definição: Se o resultado de uma experiência consta de um só elemento do espaço amostral, dizemos que se trata de um *acontecimento elementar*.

Definição: Se o resultado de uma experiência não tem qualquer elemento do espaço amostral, dizemos que se trata de um *acontecimento impossível*.

21. Exercício. Defina o acontecimento: no lançamento de um dado, saída de um número par. Defina o acontecimento complementar.
22. Represente graficamente a região do plano delimitada pelas curvas de equações $x = y$, $y = x^2$ e $x = 1/2$.
23. Exercício:

Certa função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(1) = 0$ e $f'(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

Mostre que $f''(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ e estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Resolução: $f''(x) = [...] = [...] = \frac{-\ln x}{x^2}$.

Introduzindo a função f'' na calculadora gráfica e observando o gráfico, vê-se imediatamente que f'' se anula para $x = 1$, que é positiva para $x < 1$ e que é negativa para $x > 1$. Portanto:

em $]0; 1[$, a concavidade de f é virada para cima;
 em $]1; +\infty[$, a concavidade de f é virada para baixo;
 para $x = 1$, existe um ponto de inflexão de f .

Mas podemos tirar estas conclusões analiticamente. No domínio da função:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f''(x) > 0 &\Leftrightarrow -\ln x > 0 \text{ (porque } x^2 > 0) \Leftrightarrow x < 1 \\ f''(x) < 0 &\Leftrightarrow -\ln x < 0 \text{ (porque } x^2 > 0) \Leftrightarrow x > 1. \end{aligned}$$

[Complementando esta resolução de uma pergunta de exame, proponho-lhe o seguinte exercício:

Introduzindo a função $g(x) = f''(x) + \frac{0.1}{x^{1.9}}$ na calculadora gráfica e observando o gráfico, o que se vê imediatamente?]

24. ‘Silogismo’ de Carroll: ‘Todos os soldados são bravos’
 ‘Alguns ingleses são bravos’
 $\therefore$ ‘Alguns ingleses são soldados’

25. Paradoxo de Carroll: (redacção minha) *Aquiles e a Tartaruga...*

A regra *modus ponens* diz: “Se A e $A \Rightarrow Z$, então Z ”. Se chamarmos ‘ B ’ à proposição $A \Rightarrow Z$, a regra pode exprimir-se pela veracidade da proposição C , onde

$$‘C’ \text{ denota } [A \wedge B] \Rightarrow Z.$$

Para podermos concluir, da veracidade de A e de B , a veracidade de Z , é indispensável aceitarmos a veracidade da regra, ou seja, a veracidade de C . Dito de outro modo: a veracidade de Z resulta da veracidade de $A \wedge B \wedge C$. Mas, para podermos concluir, da veracidade de $A \wedge B \wedge C$, a veracidade de Z , é indispensável aceitarmos a veracidade da proposição D , onde

$$D \text{ denota } (A \wedge B \wedge C) \Rightarrow Z,$$

O argumento pode continuar-se indefinidamente, até esgotar o abecedário. Tal como Aquiles não pôde alcançar a tartaruga, não seremos capazes de extrair a conclusão Z , por termos, previamente, que assegurar a veracidade de A , B , C , D , etc.

26. A verdade matemática, oriunda da civilização grega, [foi] substituída por uma *verdade relativa* dos teoremas relativamente aos postulados, definições e correcção de raciocínio.
27. [...] Conclui-se, então, que se num ponto $f'(x)$ passa de positiva para negativa, a função tem um máximo relativo. A recíproca será verdadeira?

Para provarmos que não é verdadeira, temos de descobrir uma função que tenha um extremo relativo num ponto e que não tenha derivada nesse ponto.