

*Módulo constituído por uma aula teórico-  
-prática, a apresentar, com vista à realização  
de Provas de Aptidão Pedagógica e  
Capacidade Científica.*

## Prefácio

Os avanços tecnológicos ao nível da aquisição e processamento de dados vieram abrir também à Topografia novas áreas de aplicação; uma delas foi a *Metrologia por coordenadas*.

As técnicas topográficas podem ser adaptadas por forma a permitirem a aquisição de coordenadas tridimensionais de forma bastante eficiente, especialmente quando as peças a medir são de grande porte, facilmente deformáveis ou estão numa posição de difícil acesso.

O processo que iremos descrever é já usado há alguns anos com sucesso na indústria, nomeadamente na construção naval e aeronáutica.

Neste módulo apresenta-se então o designado Sistema Móvel Tridimensional (STM) que permite a aquisição de coordenadas de pontos através de processos topográficos; os seus destinatários serão os alunos de Topografia Aplicada do 4º ano da Licenciatura em Engenharia Geográfica do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, aos quais poderá ser ministrado como aula teórico-prática.

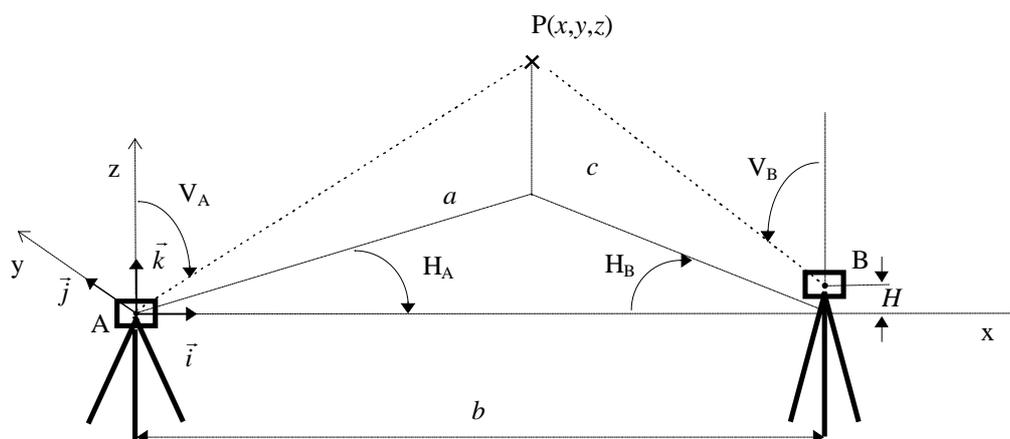
Pretende-se assim que os alunos adquiram novas perspectivas para além da Topografia clássica que eles já conhecem, abrindo ainda caminho para a disciplina de Metrologia Geométrica que eles irão ter oportunidade de frequentar no 5º ano.

No caso específico do SMT tenta-se que os alunos apreendam o modelo matemático simples em que se baseia o sistema e, especialmente, a forma como ele é posto em prática. Mostram-se também as possíveis vantagens e inconvenientes que um sistema deste tipo pode apresentar. E, finalmente, chama-se a atenção para as possíveis aplicações de um SMT, ilustrando as suas potencialidades com dois casos práticos concretos.

## Introdução

O SMT tem como fim imediato a determinação das coordenadas cartesianas tridimensionais  $(x, y, z)$  de pontos num referencial a definir. Os componentes essenciais deste sistema são dois teodolitos que irão ser estacionados em redor do objecto a medir. As coordenadas de cada ponto são obtidas por intersecção das linhas de visada quando se aponta a partir dos teodolitos para esse mesmo ponto.

A primeira coisa a fazer será definir o sistema de coordenadas ligado ao SMT. Para isso consideremos então a *figura 1* em que  $P$  é o ponto de coordenadas a determinar e os pontos  $A$  e  $B$  são os respectivos centros dos teodolitos.



*Figura 1* Sistema Móvel Tridimensional (SMT).

De uma forma geral, as coordenadas de  $P$  são consideradas em relação ao sistema de referência directo  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , com origem coincidente com o ponto  $A$  e plano  $O\vec{i}\vec{k}$ , vertical, contendo os pontos  $A$  e  $B$ , sendo  $\vec{k}$  o vector director da vertical de  $A$  no sentido ascendente e  $\vec{i}$  o vector horizontal apontado de  $A$  para a vertical de  $B$ .

Relativamente a este referencial, teremos então  $A \equiv (0,0,0)$  e  $B \equiv (b,0,H)$ , sendo  $b$  a distância horizontal entre os pontos  $A$  e  $B$  e  $H$  a sua diferença de nível.

Assim, podem-se obter as coordenadas de  $P$  a partir das relações

$$\begin{cases} x = a \cos H_A \\ y = a \sin H_A \\ z = \frac{h_1 + (h_2 + H)}{2} \end{cases}, \quad (1.1)$$

com

$$a = b \frac{\sin H_B}{\sin(H_A + H_B)}, \quad h_1 = a \cot V_A \quad (1.2.1)$$

$$c = b \frac{\sin H_A}{\sin(H_A + H_B)}, \quad h_2 = c \cot V_B + H \quad (1.2.2)$$

e em que  $H_A$  e  $H_B$  são os ângulos horizontais e  $V_A$  e  $V_B$  os ângulos verticais representados na *figura 1*; os valores de  $b$  e de  $H$  são determinados durante a calibração do sistema, como veremos mais tarde.

Portanto, as coordenadas de  $P$  são obtidas através de ângulos horizontais e verticais medidos por teodolitos segundo o esquema da *figura 1*.

### Materialização física do sistema

Num teodolito podemos identificar essencialmente dois eixos de rotação :

- o *eixo principal* (ou *vertical*) em torno do qual se medem os *ângulos horizontais* ou *azimutais* e que, portanto, deve ser perpendicular ao plano do *limbo* ou *circulo azimutal* (circulo graduado onde se medem os *ângulos azimutais*);

- o *eixo secundário* (ou *horizontal*) em torno do qual se medem os *ângulos verticais* ou *zenitais* e que, por conseguinte, deve ser perpendicular ao plano do *limbo* ou *circulo zenital* (circulo graduado onde se medem os *ângulos zenitais*).

Se um teodolito estiver correctamente construído, isto é, se as *condições de construção* se verificarem, para além dos eixos serem perpendiculares aos respectivos limbos, eles serão ortogonais entre si e intersectar-se-ão num ponto que é o denominado *centro do teodolito* (ou *centro de perspectiva*).

Para que os teodolitos estejam devidamente estacionados, é essencial neste caso que os seus eixos principais sejam paralelos entre si, para assegurar a correcta definição da

direcção do eixo  $O\vec{k}$ . Na prática, o que se faz é verticalizar ambos os eixos usando para isso as nivelas do aparelho.

No sentido de definir a direcção do eixo  $O\vec{i}$  vai ser necessário visar um ponto do eixo principal do teodolito  $B - P_B$  - a partir do teodolito  $A$  e um ponto do eixo principal do teodolito  $A - P_A$  - a partir do teodolito  $B$ . O problema está agora na materialização dos pontos  $P_A$  e  $P_B$  por forma a se poder apontar para eles.

Alguns teodolitos dispõem de dispositivos, designados *de autocolimação*, que permitem *visadas recíprocas*, isto é, permitem apontar directa e mutuamente para o centro de cada teodolito.

Na falta desse dispositivo pode-se tentar apontar para os *pontos estação* (intersecção do eixo principal com o terreno) se estes forem intervisíveis ou então pode-se tentar usar o fio de prumo (supondo que o eixo principal está vertical).

Normalmente costumam-se fixar as leituras azimutais a zero quando se fazem as visadas recíprocas por forma a que os ângulos horizontais sejam dados directamente pelas leituras nos respectivos limbos, bastando para isso que a graduação do limbo do teodolito  $B$  seja crescente no sentido dos ponteiros do relógio e a do limbo de  $A$  seja crescente no sentido contrário.

Resumindo: a materialização da direcção do eixo  $O\vec{k}$  será feita pela direcção dos eixos principais, enquanto que a do eixo  $O\vec{i}$  será realizada à custa das visadas recíprocas a zeros.

## Calibração do sistema

Vamos então designar o conjunto das operações que levam à determinação dos parâmetros  $b$  e  $H$  do sistema por *calibração do sistema*.

Para que a calibração seja realizada é necessário conhecer com precisão uma distância  $l$  que é normalmente materializada fisicamente por uma chamada *base de ínvar*.

Costuma-se designar  $b$  por *base métrica* do sistema, já que é essa distância que vai fixar a escala em que se vai trabalhar. Numa primeira aproximação pode-se fixar arbitrariamente um valor para a escala, atribuindo a essa base um valor  $b'$  (por exemplo,

$b'=10$ ). Em função desse valor pode-se calcular a diferença de nível  $H'$  à escala fixada através da relação

$$H' = h'_1 - h'_2.$$

Para se obterem os valores de  $h'_1$  e  $h'_2$ , aponta-se para um ponto qualquer e registam-se os respectivos ângulos, aplicando-se depois as relações (1.2).

Para se determinar a escala verdadeira, vamos fazer pontarias às extremidades da base de invar, no sentido de obter as coordenadas desses dois pontos à escala arbitrada. Usando essas coordenadas, podemos calcular a distância  $l'$  nessa escala fixada. Como essa distância é conhecida à escala verdadeira, pode-se assim obter o *factor de escala*  $s$  que permite passar da escala inicial para a verdadeira através da relação

$$s = \frac{l}{l'}.$$

Os parâmetros de calibração na escala verdadeira são então dados por

$$b = s l' \quad \text{e} \quad H = s H'.$$

## A aquisição de coordenadas

Após a cuidadosa calibração do sistema, estamos em condições de iniciar a determinação das coordenadas necessárias à resolução do problema em causa.

As maiores dificuldades práticas deste sistema residem na necessidade de todos os pontos, cujas coordenadas se pretendem determinar, terem de ser visados a partir de ambos os teodolitos.

Por um lado existe o problema da correcta identificação dos pontos que pode ser ultrapassado se eles forem marcados com um alvo e uma etiqueta; nos sistemas mais sofisticados um dos teodolitos emite um raio luminoso para o ponto visado, o que permite apontar o outro teodolito para esse mesmo ponto.

Por outro lado surge o problema da visibilidade dos pontos a partir dos teodolitos. Em objectos planos como fachadas de edificios ou secções de cascos de navios, por exemplo, esse problema pode ser normalmente ultrapassado por um correcto posicionamento dos teodolitos em relação ao objecto a medir. No entanto, quando o objecto tem várias faces a inspeccionar, torna-se necessário mudar a posição do sistema em

relação a esse objecto e depois passar todas as coordenadas para um mesmo referencial, caso haja necessidade disso.

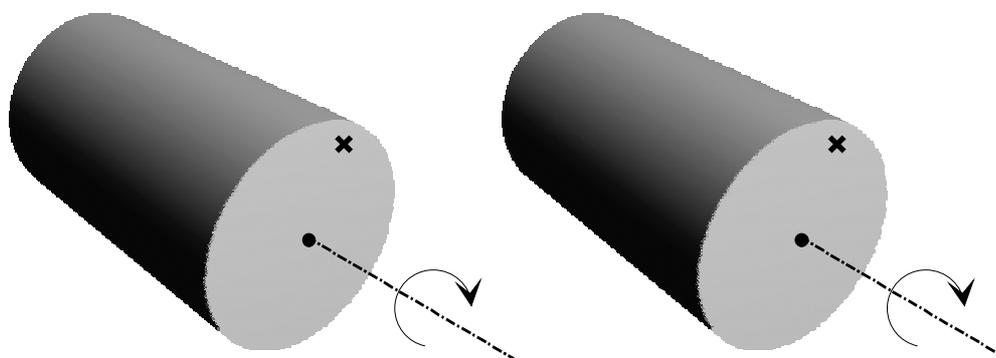
Nalguns sistemas mais complexos utilizam-se vários teodolitos (mais de 2) que são estacionados à volta da peça a medir por forma a fazerem uma cobertura quase integral de toda a superfície a inspeccionar. O princípio de funcionamento é o mesmo, só que agora irão coexistir vários sistemas de 2 teodolitos ligados entre si por transformações de coordenadas.

Nestes casos, os parâmetros de transformação entre 2 referenciais podem ser determinados à custa do conhecimento das coordenadas de pelo menos 3 pontos nesses 2 referenciais ou através das *equações de colinearidade* (ver [1]).

## Exemplos prático de aplicação na resolução de problemas

### *Exemplo 1 :*

Foi solicitado por uma empresa de produção de papel que se verificásse o paralelismo entre os eixos de rotação de dois rolos horizontais de grande porte existentes na sua fábrica (figura 2). Portanto, o que se pretende determinar é o ângulo entre os dois eixos para ver em que medida é que esse ângulo se afasta do valor nulo.



*Figura 2 :* Esquema dos dois rolos.

Na óptica da Metrologia Geométrica, o que se irá tentar fazer será a determinação dos parâmetros definidores dos eixos num sistema de coordenadas comum (vamos supor que a posição dos eixos se mantém fixa durante a rotação).

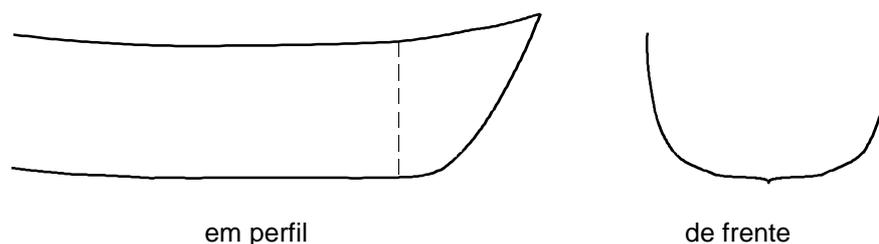
Vamos então usar o SMT para obter as coordenadas de pontos que nos permitam obter os referidos parâmetros.

Para materializar esses pontos coloca-se uma marca no topo de cada rolo, o mais próxima possível da aresta, como mostra a figura 2. A rotação dos rolos fará com que cada uma dessas marcas gera uma circunferência contida num plano ortogonal ao respectivo eixo de rotação e cujo centro pertence a esse eixo.

Portanto, o SMT será usado para determinar as coordenadas das diferentes posições que cada marca vai ocupando (3 posições, no mínimo) durante a rotação.

### ***Exemplo 2:***

Como a proa é a parte das embarcações que mais está sujeita ao desgaste, torna-se muitas vezes necessário proceder à sua substituição. Para isso, a proa é cortada transversalmente, como mostra a figura 3, sendo substituída por uma nova.



*Figura 3* : Esquema do corte do casco.

Uma das dificuldades que surgem nesta operação é fazer coincidir a nova proa com o resto do casco, por forma a haver um bom ajustamento entre as duas partes.

A resolução deste problema também pode ser facilitada pelo uso de um SMT que irá permitir a determinação das coordenadas de pontos a partir dos quais se possa interpolar a curva de cada uma das partes, que terão de coincidir.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Gonçalves, G.R. - *Orientação Relativa de Dois Teodolitos* - Coimbra, 1994
  
- [2] Antunes, A. L. P. - *Sistemas Móveis de Medição Tridimensional* -  
Apontamentos das aulas de Topografia Aplicada, 1995
  
- [3] Lardelli, A. - *La technique mobile de mesure 3D avec des théodolites s'est imposée* - Kern Swiss, 1986
  
- [4] Gottwald, R. - *Space, un système automatisé de mesure tridimensionnel sans contact pour des applications industrielles* - Kern Swiss, 1988
  
- [5] Alves, A.S. - *Metrologia Geométrica* - Coimbra, 1994;
  
- [6] Forbes, A.B. - *Least-squares best-fit geometric elements* - NPL report DICT 140/89, edição revista, National Physical Laboratory, Teddington, 1991;