

1. Diga por que razão é necessário proceder à calibração de um palpador.
2. Descreva como pode avaliar a incerteza de uma *CMM* a partir dos dados fornecidos pelo fabricante da máquina.
3. Mostre que a determinação do vector director do plano ajustado a um conjunto de s pontos ($s \geq 3$) se pode reduzir à determinação de um vector próprio unitário de uma certa matriz.
4. Exponha de forma clara o processo de calibração de uma régua graduada com 300 *mm* de comprimento, no sentido de corrigir ou, pelo menos, minimizar o erro sistemático.
5. Mostre que a distância entre os planos definidos, respectivamente, pelas equações

$$Ax + By + Cz = D_1$$

e

$$Ax + By + Cz = D_2$$

pode ser dada por

$$|D_1 - D_2|.$$

6. Com base no método iterativo de *Newton* para a resolução de sistemas não lineares, deduza a fórmula iterativa do método de *Gauss-Newton*.
7. Indique 2 sistemas de aquisição de coordenadas e explique o seu funcionamento.
8. Diga quais são as diferenças entre os *Pontos Nominais* e os *Pontos Actuais*.
9. Exponha e resolva o problema do ajustamento de um plano a um certo conjunto de pontos medidos sobre uma superfície.
10. Diga quais são as fontes de erro numa Máquina de Medição de Coordenadas (*CMM*).
11. Defina o que é um *Ponto Livre* e explique a sua utilidade.
12. Exponha e resolva o problema do ajustamento de uma esfera a um certo conjunto de pontos medidos sobre uma superfície.
13. Defina desvio de forma cilíndrica segundo as normas *ISO 1101* e descreva como o pode determinar.
14. Exponha e resolva o problema do ajustamento de um plano a um certo conjunto de pontos medidos sobre uma superfície.
15. Defina e indique a utilidade dos Pontos Livres.
16. Deduza a relação que permite determinar a intersecção entre duas rectas, dados os parâmetros definidores dessas rectas.
17. Determine a matriz de ortogonalização que permita passar as coordenadas de um referencial não ortogonal *Oxyz* para um referencial ortogonal $O'x'y'z'$.
18. Indique dois sistemas de aquisição de coordenadas usados em Metrologia Geométrica e explique o seu funcionamento.
19. Diga quais são os objectivos da calibração dos palpadores e explique como se processa essa operação.
20. Um dos erros que afectam as coordenadas medidas por uma *CMM* é a falta de ortogonalidade entre os eixos do seu referencial interno, suposto ortogonal. Exponha e resolva o problema da ortogonalização desses eixos.
21. Explique como pode obter uma região de confiança (a 95 %) para as coordenadas (x_a, y_a, z_a) de um ponto,

22. Indique os Sistemas de Palpação que conhece e descreva como funciona o Palpador Estático.
23. Como alternativa ao método directo de ajustamento, deduza um algoritmo que lhe permita fazer o ajustamento de um plano a partir de um conjunto de pontos por aplicação do Método Iterativo de *Gauss-Newton*, análogo ao que foi feito para outros elementos geométricos.
24. Explique como é efectuada a correcção de raio do palpador para o caso da medição de um plano.
25. Defina *Incerteza Aleatória* e indique como pode fazer a sua estimativa.
26. Deduza um algoritmo que lhe permita fazer o ajustamento de um cilindro (de revolução) a partir de um conjunto de pontos, por aplicação do Método Iterativo de *Gauss-Newton*.
27. Explique a estrutura e o funcionamento de uma *CMM*.
28. Considerando as coordenadas medidas por uma *CMM* (no referencial-máquina) associadas a variáveis aleatórias normais independentes e com desvios-padrão conhecidos, deduza a expressão que lhe permite obter a matriz de covariância dessas coordenadas num referencial-peça.
29. Suponha que pretende obter as coordenadas ajustadas do centro duma esfera de calibração a partir de coordenadas de pontos medidas sobre a sua superfície. Obtenha um algoritmo que lhe permita fazer esse ajustamento por aplicação do Método Iterativo de *Gauss-Newton*.
30. Diga o que entende por "*Erro do Cosseno*" e explique a sua influência no resultado da medição de um bloco-padrão.
31. Diga o que entende por desvio de forma cónica, segundo as normas *ISO*, e como o pode determinar.
32. Suponha que tem uma *CMM* cujo referencial tem um eixo que não é ortogonal aos outros dois (que são perpendiculares entre si). Determine uma matriz que permita ortogonalizar esse referencial.
33. Explique como pode determinar uma aproximação inicial que lhe permita fazer o ajustamento de um cone, por aplicação do Método Iterativo de *Gauss-Newton*.
34. Explique as diferenças entre um *Ponto Livre* e um *Ponto Actual*.
35. Deduza um algoritmo que lhe permita fazer o ajustamento de uma recta, no plano, a um conjunto de pontos cujas coordenadas cartesianas (x, y) foram medidas.
36. Resolva o seguinte problema:
- Gerar 6 pontos nominais de contacto (*PRB*), uniformemente distribuídos, para medir um furo cilíndrico com 50 mm de comprimento e 16 mm de raio, cujo eixo está contido no plano coordenado Oyz e faz um ângulo de 20 graus com o eixo Oz , usando-se para isso um palpador esférico com 4 mm de raio. As coordenadas do centro do círculo da base são (7.0000, 4.0000, 5.0000).
 - Determine o plano que corta, perpendicularmente ao eixo, a secção cilíndrica anterior em duas partes iguais.
37. Determine a projecção (ortogonal) da esfera $E = \{45.0000, -24.0000, 8.0000, 10.0000\}$ sobre o plano $\pi = \{-23.0000, 4.0000, 37.0000, 1.0000, -2.0000, 3.0000\}$.
38. Defina desvio de forma plana e desvio de forma esférica segundo as Normas *ISO*.
39. Construa um referencial peça cujo plano Ozx seja paralelo ao plano
- $$\pi_1 = \{7.0000, -22.0000, 1.0000, 3.0000, 6.0000, -2.0000\},$$
- o eixo Ox seja dado pela recta
- $$r_1 = \{0.0000, -34.0000, 2.0000, -2.0000, 1.0000, 0.0000\}$$
- e a origem esteja sobre o ponto médio do menor segmento que une o plano π_1 e a origem do referencial máquina.
40. Resolva o seguinte problema:

(a) Dados os pontos

i	x_i	y_i	z_i
1	23.3000	22.0000	-1.7000
2	-12.2000	22.0000	8.0000
3	0.2300	22.0000	19.2800

determinar os parâmetros da circunferência que passa por esses pontos.

(b) Determinar a intersecção da recta

$$r = \{5.0836, 22.0000, 1.4430, 0.8944, 0.0000, -0.4472\}$$

com a circunferência anterior.

(c) Sabendo que os pontos anteriores foram medidos com um palpador de 4 mm de diâmetro e que foi obtido um ponto livre

$$CLP = (8.1000, 22.0000, 4.0000),$$

efectue a respectiva correcção de raio sobre a circunferência obtida, justificando a sua resposta.

41. Resolva a seguinte questão:

(a) Determine a distância entre o plano

$$\pi = \{4.5700, -3.4700, 2.7100, -0.5345, 0.2673, 0.8019\}$$

e a esfera

$$E = \{3.1000, 5.8000, 7.2300, 6.7000\}.$$

(b) Obtenha os parâmetros do plano que é tangente à esfera E e paralelo ao plano π .

(c) Construa um referencial peça cuja origem coincida com o centro de esfera E e cujo plano Oyz seja paralelo ao plano π .

42. Pretende medir-se a secção cónica de uma peça limitada na base e no topo por circunferências nominais de centros $(-2.0000, 4.0000, 5.0000)$ e $(2.0000, 9.0000, 12.0000)$ e raios 30.0000 e 20.0000, respectivamente.

(a) Determine as coordenadas do vértice do cone (que não estão materializadas na peça).

(b) Determine a transformação a efectuar para colocar a secção cónica com a base sobre o plano Oxy e centrada na origem do referencial que estamos a considerar.

(c) Gerar 6 pontos nominais de contacto (PRB), uniformemente distribuídos por 2 circunferências, para medir a referida secção cónica, usando-se para isso um palpador esférico com 2 mm de raio.

43. Resolva o seguinte problema:

(a) Determine a intersecção da recta

$$r = \{44.0000, 24.0000, 9.0000, 2.0000, 1.0000, 0.0000\}$$

com a esfera

$$E = \{45.0000, -24.0000, 8.0000, 10.0000\}.$$

(b) Construa um referencial em que a recta

$$r' = \{-23.0000, 4.0000, 37.0000, 2.0000, 1.0000, -1.0000\}$$

seja a nova direcção do eixo dos xx e a nova origem seja o ponto médio do menor segmento que une a origem do referencial máquina com a esfera anterior.

44. Resolva o seguinte problema:

(a) Gerar 6 pontos nominais de contacto (PRB), uniformemente distribuídos, para medir um furo circular com 20 mm de raio, cujo eixo está contido no plano coordenado Oyz e faz um ângulo de 25 graus com o eixo Oz , usando-se para isso um palpador esférico com 2 mm de raio. As coordenadas nominais do centro são $(3.0000, 1.0000, 5.0000)$.

(b) Determine a intersecção entre a circunferência anterior e a recta

$$\{3.0000, 1.0000, 5.0000, 0.0000, -\cos 25^\circ, \sin 25^\circ\}.$$

45. Resolva o seguinte problema:

(a) Determine a projecção (ortogonal) da esfera

$$E = \{45.0000, -24.0000, 8.0000, 10.0000\}$$

sobre a recta

$$r = \{-23.0000, 4.0000, 37.0000, 2.0000, 1.0000, 0.0000\}.$$

(b) Construa a transformação que permita colocar a recta

$$r = \{-23.0000, 4.0000, 37.0000, 2.0000, 1.0000, -1.0000\}$$

numa posição coincidente com o eixo dos xx .

46. Resolva o seguinte problema:

(a) Gerar 6 pontos nominais de contacto (PRB), uniformemente distribuídos, para medir um veio circular com 10 mm de raio e 20 mm de comprimento, cujo eixo está contido no plano coordenado Oxy e faz um ângulo de 15 graus com o eixo Ox , usando-se para isso um palpador esférico com 1 mm de raio. As coordenadas nominais do centro da base são $(-3.0000, 2.0000, 0.0000)$.

(b) Determine a intersecção entre o plano que contém a base do veio anterior e o plano

$$\pi = \{3.0000, 1.0000, 5.0000, 0.0000, -\cos 25^\circ, \sin 25^\circ\}.$$

47. Dadas as extremidades

$$A = (23.0000, -12.0000, 3.0000)$$

e

$$B = (-7.0000, 3.0000, -2.0000)$$

do segmento de recta $[AB]$, determine a projecção (ortogonal) desse segmento sobre o plano

$$\pi = \{-23.0000, 4.0000, 37.0000, 2.0000, 1.0000, 0.0000\}$$

48. Construa o referencial peça escolhendo o plano

$$\pi = \{22.0000, 4.0000, 7.0000, -1.0000, 2.0000, -1.0000\}$$

para plano Oyz , a recta

$$\rho = \{-3.0000, 4.0000, 3.0000, 2.0000, 1.0000, 0.0000\}$$

para eixo Oz e um ponto de π , diferente de $(22.0000, 4.0000, 7.0000)$, para a nova origem.

49. Gerar 6 pontos nominais de contacto (PRB), uniformemente distribuídos, para medir um furo cilíndrico com 60 mm de comprimento e 20 mm de raio, cujo eixo está contido no plano coordenado Oxz e faz um ângulo de 25 graus com o eixo Ox , usando-se para isso um palpador esférico com 4 mm de raio. As coordenadas do centro do círculo da base são $(6.0000, 5.0000, 2.0000)$.

50. Determine a intersecção entre os 3 planos

$$\pi_1 = \{7.0000, -22.0000, 1.0000, 3.0000, 6.0000, -2.0000\},$$

$$\pi_2 = \{3.0000, 4.0000, 22.0000, 1.0000, -2.0000, 4.0000\}$$

e

$$\pi_3 = \{5.0000, -12.0000, 7.0000, 1.5000, 3.0000, -1.0000\}.$$

51. Determine a projecção (ortogonal) do triângulo $[ABC]$ de vértices $A = (3.0000, -2.0000, 7.0000)$, $B = (-2.0000, 1.0000, 5.0000)$ e $C = (4.0000, 6.0000, -3.0000)$ sobre o plano

52. Defina desvio de forma cónica e desvio de forma cilíndrica segundo as Normas *ISO*.

53. Construa um referencial peça cujo plano Oyz seja paralelo ao plano

$$\pi = \{2.0000, -22.0000, 1.0000, 1.0000, 6.0000, -3.0000\},$$

o eixo Oy seja dado pela recta

$$r = \{0.0000, -34.0000, 2.0000, -2.0000, 1.0000, 0.0000\}$$

e a origem seja a intersecção entre o plano π e a recta r .

54. Gerar 4 pontos nominais de contacto (*PRB*), uniformemente distribuídos, para medir a superfície esférica de uma peça, cujo centro tem coordenadas nominais $(10.0000, 22.0000, -30.0000)$ e diâmetro 40 mm , usando-se para isso um palpador esférico paralelo ao eixo Ox da *CMM* e com 2 mm de raio.

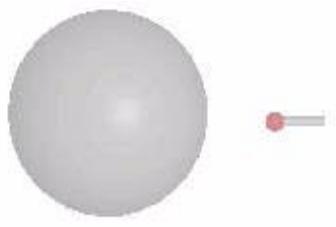


Figure 1:

55. Foram medidas as coordenadas de 3 pontos sobre a superfície esférica de uma peça:

i	x_i	y_i	z_i
1	-5.0000	3.0000	36.3000
2	7.0000	10.0000	-22.0000
3	14.8000	-19.5000	6.3000

Sabendo que o seu raio é de 19.0500 mm , determine o seu centro.

56. Determine as coordenadas do ponto médio do menor segmento de recta que une a esfera E com o plano π :

$$E = \{32.0000, -52.0000, -22.0000, 10.0000\}$$

$$\pi = \left\{ -5, 22, 3, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right\}.$$

57. Aplique a correcção de raio sobre a esfera $E = \{-5.0000, 2.0000, -1.0000, 25.5000\}$, que foi medida por um palpador com um raio de 2 mm e com um ponto livre (*CLP*) de coordenadas $(7.0000, -5.0000, -2.0000)$.

58. Construa um referencial peça cujo plano Oyz seja paralelo ao plano

$$\pi = \{-5, -2, 8, 2/3, 1/3, -2/3\}$$

e a origem seja o ponto da recta

$$\rho = \left\{ -8, -2, 22, -\frac{2}{\sqrt{33}}, \frac{5}{\sqrt{33}}, -\frac{2}{\sqrt{33}} \right\}$$

mais próximo da origem do referencial da *CMM*.

59. Gerar 4 pontos nominais de contacto (*PRB*), uniformemente distribuídos, para medir a superfície esférica de uma peça, cujo centro tem coordenadas nominais $(-21, 22, -23)$ e raio 40 mm , usando-se para isso um palpador esférico paralelo ao eixo Oy da *CMM* e com 2 mm de raio.

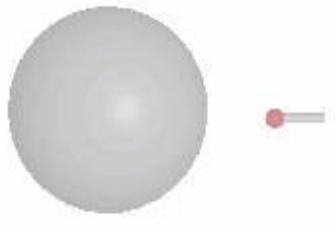


Figure 2:

60. Foram medidas as coordenadas de 2 pontos sobre a face plana de uma peça:

i	x_i	y_i	z_i
1	-5.0000	3.0000	36.3000
2	14.8000	-19.5000	6.3000

Sabendo que a face é paralela ao eixo Oz da CMM , determine o plano da face.

61. Determine as coordenadas do ponto médio do menor segmento de recta que une a esfera E com a recta r :

$$E = \{32, -52, -22, 20\};$$

$$r = \left\{ 5, -2, 4, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right\}.$$

62. Aplique a correcção de raio sobre o plano $\pi = \left\{ -5, 2, -1, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}} \right\}$, que foi medido por um palpador com um raio de 1 mm e com um ponto livre (CLP) de coordenadas $(7, -5, -2)$.

63. Construa um referencial peça cujo plano Oxz seja paralelo ao plano

$$\pi_1 = \left\{ -5, -2, 8, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\},$$

o plano Oxy seja perpendicular ao plano

$$\pi_2 = \left\{ 3, -4, 2, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$$

e a origem seja o ponto mais próximo da origem do referencial da CMM , em que são dados π_1 e π_2 , e que pertença simultaneamente aos 2 planos (π_1 e π_2).

64. Gerar 4 pontos nominais de contacto (PRB), uniformemente distribuídos, para medir a face plana rectangular representada na figura, cujo vector director nominal é paralelo ao plano coordenado Oxz e faz um ângulo de 40 graus com o eixo Ox , usando-se para isso um palpador esférico com 4 mm de raio.

65. Determine a intersecção entre o plano

$$\pi_1 = \{10, -5, 45, 3/7, 6/7, -2/7\}$$

e a esfera

$$E_1 = \{3, 4, 22, 30\}.$$

66. Determine a distância entre as rectas

$$r' = \{7, -5, 4, 3/7, 2/7, -6/7\}$$

e

$$r'' = \{10, -5, -2, 3/7, 6/7, -2/7\}.$$

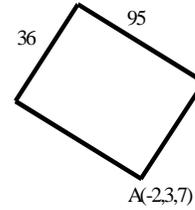


Figure 3:

67. Aplique a correcção de raio sobre o cilindro

$$C = \{2, 2, 1, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 15\},$$

que foi medido por um palpador com um raio de 5 mm e com um ponto livre (CLP) de coordenadas (3, 5, -6).

68. Construa um referencial peça cujo plano Oyz seja paralelo ao plano

$$\pi = \{2, -2, 1, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\},$$

o eixo Oy seja dado pela projecção da recta

$$r = \{0, -34, 2, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0\}$$

sobre π e a origem o ponto do plano π mais próximo da origem do referencial da CMM , em que são dados π e r .

69. Resolva o seguinte problema:

- Gerar 4 pontos nominais de contacto (PRB), uniformemente distribuídos, para medir um furo circular com 30 mm de raio, cujo eixo está contido no plano coordenado Oxy e faz um ângulo de 30 graus com o eixo Ox , usando-se para isso um palpador esférico com 2 mm de raio. As coordenadas nominais do centro são (3.0000, 1.0000, 0.0000).
- Supondo que os pontos nominais gerados atrás são pontos actuais, efectue a determinação dos parâmetros da circunferência que é materializada pelo furo. (Se não conseguiu resolver a alínea anterior, descreva em pormenor como faria tal determinação).

70. Determine as coordenadas do ponto médio do menor segmento de recta que une a esfera $E = \{32, -52, -22, 20\}$ com o plano $\pi = \{5, -2, 6, -3/7, 2/7, 6/7\}$.

71. Aplique a correcção de raio sobre o plano $\pi = \{-5, 2, 3, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\}$, que foi medido por um palpador com um diâmetro de 4 mm e com um ponto livre (CLP) de coordenadas (7, 8, -4).

72. Construa um referencial peça cujo plano Oxz seja paralelo ao plano $\pi_1 = \{7, -2, 8, 2/3, 1/3, -2/3\}$ e a origem seja o ponto da esfera $E_1 = \{12, -25, -22, 16\}$ que esteja mais próximo da origem do referencial da CMM , onde estão definidos os parâmetros de π_1 e E_1 .

73. Resolva o seguinte problema:

- Pretende determinar-se as coordenadas actuais do vértice A da peça cúbica da figura seguinte. Gere pontos nominais de contacto (PRB) para medir elementos da peça que permitam efectuar tal determinação. (Considere um palpador esférico, paralelo ao eixo Oz da CMM e com 2 mm de raio).
- Determine as coordenadas nominais do ponto médio duma diagonal do cubo da figura anterior.

74. Determine a intersecção entre as esferas $E = \{32, -52, -22, 20\}$ e $E' = \{22, -40, 0, 15\}$.

Figure 4:

75. Aplique a correcção de raio sobre o cone $Co = \{-5, 2, -10, 1/\sqrt{11}, -1/\sqrt{11}, -3/\sqrt{11}, 20\}$, que foi medido por um palpador com um raio de 1 mm e com um ponto livre (CLP) de coordenadas $(-7, 2, -12)$.
76. Construa um referencial peça cujo plano Oxz seja perpendicular à recta $r = \{-5, 14, 8, 2/3, -1/3, 2/3\}$, o plano Oyz seja perpendicular ao plano $\pi = \{3, -4, 2, -1/2, -5/6, \sqrt{2}/6\}$ e a origem seja o ponto de r mais próximo de π .
77. Pretende determinar-se as coordenadas actuais do centro de uma esfera de calibração. Gere o mínimo de pontos nominais de contacto (PRB) que permitam efectuar tal determinação. Considere um palpador esférico, paralelo ao eixo Oz da CMM e os parâmetros nominais da esfera $E = \{42, -19, 13, 25\}$.
78. Determine uma composição de rotações elementares que coloquem o ponto $A \equiv (7, -3, 4)$ sobre o eixo Ox .
79. Diga se os segmentos de recta \overline{AB} e \overline{CD} , definidos pelos pontos $A \equiv (-2, 7, 4.5)$, $B \equiv (-4, 7, 9)$, $C \equiv (-3, 7, 5)$ e $D \equiv (3, 7, 5)$ se intersectam. Justifique.
80. Aplique a correcção de raio sobre o plano $\pi = \{-5, 2, -10, 1/\sqrt{11}, -1/\sqrt{11}, -3/\sqrt{11}\}$, que foi medido por um palpador com um raio de 4 mm e com um ponto livre (CLP) de coordenadas $(-5, 2, 22)$.
81. Construa um referencial peça cujo plano Oxy seja perpendicular à recta $r = \{4, -9, 13, 1/3, -2/3, 2/3\}$, o eixo Oy faça um ângulo de 20 graus com o eixo Ox do referencial da máquina e a origem seja um ponto de r a 50 mm da origem do referencial da CMM.
82. Gere 7 pontos nominais de contacto (PRB) que permitam medir, da melhor forma, um veio cilíndrico de raio nominal de 10 mm e cujas coordenadas nominais dos centros do topo e da base são $(10, 10, 20)$ e $(10, 50, 20)$, usando um palpador esférico de raio 2 mm.
83. Determine uma transformação que coloque o triângulo $[ABC]$ numa posição paralela ao plano Oyz , com $A \equiv (-4, 7, 4.5)$, $B \equiv (-4, 7, 9)$ e $C \equiv (-3, 7, 5)$.
84. Diga se os cilindros C_1 e C_2 , dados respectivamente por $C_1 = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 20\}$ e $C_2 = \{50, 50, 50, 1/3, 2/3, -2/3, 30\}$, se intersectam. Justifique.
85. Aplique a correcção de raio sobre a esfera $E = \{-5, 2, -10, 26\}$, que foi medida por um palpador com um raio de 4 mm e com um ponto livre (CLP) de coordenadas $(-5, 2, 22)$.
86. Construa um referencial peça cujo plano Oyz seja perpendicular à recta $r = \{4, -9, 13, 1/3, -2/3, 2/3\}$ e a origem seja o ponto de r mais próximo da origem do referencial da CMM.