

Conteúdo

1	Esfera	2
1.1	Reconstituição da Esfera	2
2	Circunferência	3
2.1	Circunferência situada num Plano Coordenado Principal	3
2.2	Circunferência situada num Plano qualquer do Espaço	3
3	Conexões	4
3.1	Distâncias	4
3.2	Projecções	7
3.3	Intersecções	8
4	Bibliografia	15

Lista de Figuras

1	Intersecção de uma esfera com um plano.	9
2	Intersecção de uma esfera com uma recta.	11
3	Intersecção de duas esferas (primeiro caso).	13
4	Intersecção de duas esferas (segundo caso).	14

Elementos Geométricos: *Esfera e Circunferência*. Conexões.

Manuel António Facas Vicente

Setembro de 2000

1 Esfera

Considere-se o espaço ambiente, tridimensional, munido com um referencial ortogonal directo $Oxyz$, formado por três eixos ortogonais e que se intersectam no ponto O .

Uma esfera é o elemento geométrico constituído pelos pontos cuja distância a um ponto dado (a que chamamos o seu *centro*) é constante (a esse valor chamamos *raio* da esfera). Em consequência, uma esfera terá por equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

onde (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas do centro da esfera e r o comprimento do seu raio.

A esfera fica bem definida através da sequência

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

onde os parâmetros aí presentes têm o significado anteriormente referido.

1.1 Reconstituição da Esfera

Para reconstituir a esfera são necessários, no mínimo, 4 pontos da sua superfície:

$$(x_1, y_1, z_1); \quad (x_2, y_2, z_2); \quad (x_3, y_3, z_3); \quad (x_4, y_4, z_4)$$

com os quais formamos o sistema não-linear

$$\left\{ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 = r^2 \right.$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$.

Escrevendo

$$\alpha = -x_0,$$

$$\beta = -y_0,$$

$$\gamma = -z_0$$

e

$$D = r^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2,$$

este sistema transforma-se no sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1\alpha + 2y_1\beta + 2z_1\gamma - D = -(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \\ 2x_2\alpha + 2y_2\beta + 2z_2\gamma - D = -(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ 2x_3\alpha + 2y_3\beta + 2z_3\gamma - D = -(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) \\ 2x_4\alpha + 2y_4\beta + 2z_4\gamma - D = -(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2) \end{cases}$$

cujas incógnitas são α, β, γ, D . Resolvido o sistema, em ordem a estas incógnitas, aplicam-se as relações $\alpha = -x_0, \beta = -y_0, \gamma = -z_0$ e $D = r^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2$, que permitem calcular as coordenadas do centro e o raio

$$r = \sqrt{D + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

2 Circunferência

2.1 Circunferência situada num Plano Coordenado Principal

Considere-se, mais uma vez, um referencial ortogonal directo $Oxyz$.

Consideremos agora uma circunferência de raio r , situada no plano Oxy , com centro no ponto P_0 desse plano coordenado, cuja abcissa é x_0 e a ordenada é y_0 , ou seja, no ponto de coordenadas $(x_0, y_0, 0)$. A circunferência descrita é o lugar geométrico dos pontos desse plano equidistantes do centro P_0 , sendo essa distância o raio r da circunferência. Esta circunferência terá assim por equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

2.2 Circunferência situada num Plano qualquer do Espaço

No espaço tridimensional, uma circunferência fica bem determinada dados um ponto (o seu centro), o raio e os cossenos directores do eixo do plano que a contém. Em consequência, à imagem de outros elementos geométricos, a circunferência fica bem descrita através de uma sequência

$$\{x_0, y_0, z_0, A, B, C, r\}$$

em que (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas do centro da circunferência, r o comprimento do seu raio e A, B, C os cossenos directores de um eixo do plano onde ela está contida, que consideraremos normalizados

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Contrariamente ao caso bidimensional, não existe uma única equação que descreva os pontos da circunferência no espaço. No entanto, esta pode ser vista como o conjunto dos pontos do plano dado, situados à distância r (valor do raio) do seu centro, o que, no fundo, corresponde à intersecção da esfera de centro de coordenadas (x_0, y_0, z_0) e raio r com o plano que contém o mesmo ponto (x_0, y_0, z_0) e tem A , B e C por cossenos directores de um dos seus eixos.

Por outras palavras, a circunferência pretendida é a intersecção dos elementos geométricos:

- esfera

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

de equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2;$$

- plano

$$\{x_0, y_0, z_0, A, B, C\}$$

de equação

$$Ax + By + Cz = D,$$

com $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

Assim, descrevemos analiticamente a circunferência pretendida pelas equações

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \\ Ax + By + Cz = D \end{cases}.$$

No caso da circunferência no plano Oxy descrita na subsecção anterior, os seus parâmetros serão

$$\{x_0, y_0, 0, 0, 0, 1, r\}.$$

3 Conexões

3.1 Distâncias

- **Algoritmo 23 - Distância de um Ponto a uma Esfera.** Seja dada a esfera de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

e o ponto

$$(x_1, y_1, z_1)$$

A distância do ponto à esfera é igual à distância do ponto ao centro da esfera, subtraída do raio da esfera:

$$d = \text{dist}((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)) - r,$$

ou seja,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} - r.$$

Se o valor obtido for negativo, isso significa que o ponto está mais próximo do centro da esfera do que os pontos da sua superfície, ou seja, o ponto encontra-se *dentro* da superfície esférica.

- **Algoritmo 24 - Distância de uma Recta a uma Esfera.** Seja dada a esfera de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

e a recta

$$\{x_1, y_1, z_1, a, b, c\}.$$

A distância da recta à esfera calcula-se por meio do seguinte algoritmo:

1. projecta-se sobre a recta o centro da esfera (pelo algoritmo 16), obtendo-se o ponto de coordenadas

$$(x_2, y_2, z_2);$$

2. calcula-se a distância entre este ponto projectado e o centro da esfera, subtraindo-se, de seguida, o raio da esfera:

$$d = \text{dist}((x_0, y_0, z_0), (x_2, y_2, z_2)) - r,$$

isto é,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2} - r.$$

Mais uma vez, o valor obtido pode ser negativo, o que significa que a recta intersecta a esfera.

- **Algoritmo 25 - Distância de um Plano a uma Esfera.** Seja dada a esfera de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

e o plano

$$\{x_1, y_1, z_1, A, B, C\}.$$

A distância do plano à esfera calcula-se por meio do seguinte algoritmo:

1. projecta-se o centro da esfera sobre o plano (segundo o algoritmo 15), obtendo-se o ponto de coordenadas

$$(x_2, y_2, z_2);$$

2. calcula-se a distância entre este ponto projectado e o centro da esfera, subtraindo-se, de seguida, o raio da esfera:

$$d = \text{dist}((x_0, y_0, z_0), (x_2, y_2, z_2)) - r,$$

o que é equivalente a escrever

$$d = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2} - r.$$

Se o valor obtido for negativo, isso significa, neste caso, que o plano intersecta a esfera.

- **Algoritmo 26 - Distância entre duas Esferas.** Sejam dadas duas esferas S_1 e S_2 , de parâmetros

$$\{x_1, y_1, z_1, r_1\}$$

e

$$\{x_2, y_2, z_2, r_2\},$$

respectivamente.

A distância entre as duas esferas S_1 e S_2 obtém-se por meio do seguinte algoritmo:

1. calcula-se a distância d' entre os centros das duas esferas, através do algoritmo 3:

$$d' = \text{dist}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)),$$

ou,

$$d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

2. a distância d entre as duas esferas, ou seja, a distância entre as superfícies das duas esferas, pode obter-se subtraindo a d' os comprimentos dos raios das mesmas, isto é, é dada por meio de:

$$\begin{aligned} d &= \text{dist}(S_1, S_2) \\ &= d' - r_1 - r_2. \end{aligned}$$

Em relação ao valor de d podem ocorrer três situações:

- se $d > 0$ então as duas esferas são disjuntas¹;
- se $d = 0$, as duas esferas são tangentes num ponto;
- se $d < 0$ então, ou as duas esferas intersectam-se, ou a esfera de raio de menor comprimento está contida dentro da esfera de maior raio.

¹Com *disjuntas* queremos dizer que não se intersectam e que uma esfera não está totalmente contida dentro da outra.

3.2 Projecções

- **Algoritmo 27 - Projecção (ortogonal) de uma Esfera sobre um Plano.** Seja dada a esfera de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

e o plano

$$\{x_1, y_1, z_1, A, B, C\}.$$

A projecção (ortogonal) da esfera sobre o plano originará neste uma circunferência de centro na projecção do centro da esfera sobre o plano dado e de raio de comprimento igual ao comprimento do raio da esfera dada.

Assim, inicialmente projecta-se o centro da esfera sobre o plano dado, obtendo-se o ponto de coordenadas (x_2, y_2, z_2) , segundo o algoritmo 15. Como a circunferência resultante da intersecção está contida no plano dado, os cossenos directores do seu eixo poderão ser os cossenos directores do eixo do plano dado, ou seja A, B, C . Deste modo, uma vez que o raio da circunferência é igual ao raio da esfera, a circunferência resultante terá como parâmetros:

$$\{x_2, y_2, z_2, A, B, C, r\}$$

- **Algoritmo 28 - Projecção (ortogonal) de uma Esfera sobre uma Recta.** Seja dada a esfera S de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

e uma recta η de parâmetros

$$\{x_1, y_1, z_1, a, b, c\}.$$

A projecção de uma esfera sobre uma recta origina, sobre a recta, um segmento de recta, de comprimento igual ao diâmetro da esfera, ou seja $2r$, com extremos em dois pontos de coordenadas a determinar.

Como se pode verificar facilmente, o ponto médio desse segmento corresponde à projecção do centro da esfera S sobre a recta η dada. Assim, em primeiro lugar, calcula-se a projecção do centro (x_0, y_0, z_0) da esfera sobre η , segundo o algoritmo 16, obtendo-se o ponto de coordenadas

$$(x_2, y_2, z_2).$$

Finalmente, uma vez que o vector director da recta η , $[a, b, c]$, já se encontra normalizado², as coordenadas (x_3, y_3, z_3) e (x_4, y_4, z_4) , dos dois pontos extremos do segmento são dadas por

$$(x_3, y_3, z_3) = (x_2, y_2, z_2) + r(a, b, c)$$

² Ou seja, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

e

$$(x_4, y_4, z_4) = (x_2, y_2, z_2) - r(a, b, c),$$

ou ainda por,

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + ra \\ y_3 = y_2 + rb \\ z_3 = z_2 + rc \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x_4 = x_2 - ra \\ y_4 = y_2 - rb \\ z_4 = z_2 - rc \end{cases}.$$

3.3 Intersecções

- **Algoritmo 29 - Intersecção de uma Esfera com um Plano.** Seja dada a esfera de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

e o plano

$$\{x_1, y_1, z_1, A, B, C\}.$$

A intersecção da esfera com o plano pode ser vazia, um ponto ou uma circunferência, consoante a distância entre o plano e o centro da esfera.

Deste modo, em primeiro lugar, calcula-se a distância do centro da esfera ao plano dado, segundo o algoritmo 5.

A intersecção é:

- (i) vazia — se a distância entre o plano e o centro da esfera for superior ao raio desta.
- (ii) um ponto — se a distância entre o plano e o centro da esfera for igual ao raio desta. Nesse caso a esfera é tangente ao plano num ponto e as suas coordenadas podem ser calculadas através de:

1. considera-se o eixo do plano dado que passa pelo centro da esfera

$$\{x_0, y_0, z_0, A, B, C\};$$

2. o ponto de tangência da esfera com o plano é o ponto de intersecção daquele eixo do plano com o plano (ver algoritmo 13).

No fundo, todo este processo é equivalente a efectuar a projecção do centro da esfera sobre o plano dado (ver algoritmo 15).

- (iii) uma circunferência – caso a distância entre o plano e o centro da esfera seja inferior ao raio desta. Esta circunferência está situada no plano dado, isto é, o seu eixo pode ser o eixo do plano dado. O centro da circunferência resulta da intersecção do eixo do plano que passa pelo centro da esfera, de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, A, B, C\},$$

com o plano (segundo o algoritmo 13), ou seja, projectando o centro da esfera sobre o plano (algoritmo 15).

Finalmente, o raio da circunferência pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras (ver figura seguinte), considerando o triângulo rectângulo de lados de comprimentos r (raio da esfera), d (distância do centro da esfera ao centro da circunferência) e R (raio da circunferência pretendida).

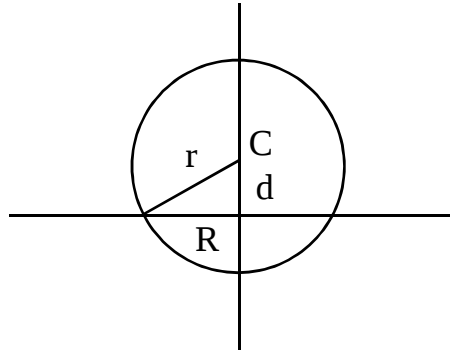


Figura 1: Intersecção de uma esfera com um plano.

Em resumo:

1. considera-se o eixo do plano dado que passa pelo centro da esfera

$$\{x_0, y_0, z_0, A, B, C\};$$

2. o centro da circunferência é o ponto de intersecção deste eixo do plano com o plano (segundo algoritmo 13), de coordenadas³ (x_2, y_2, z_2) ;
3. calcula-se a distância d entre o centro da circunferência e o centro da esfera

$$d = \text{dist}((x_0, y_0, z_0), (x_2, y_2, z_2)),$$

³Os passos 1 e 2 podem ser resumidos num só, obtendo-se as coordenadas (x_2, y_2, z_2) fazendo a projecção do centro (x_0, y_0, z_0) da esfera sobre o plano dado, utilizando-se para tal o algoritmo 15.

ou,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2},$$

segundo o algoritmo 3;

4. calcula-se o raio R da circunferência através de

$$R^2 = r^2 - d^2;$$

5. a circunferência tem parâmetros

$$\{x_2, y_2, z_2, A, B, C, R\}.$$

- **Algoritmo 30 - Intersecção de uma Esfera com uma Recta.** Seja dada a esfera de parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, r\}$$

e uma recta

$$\{x_1, y_1, z_1, a, b, c\}.$$

A intersecção da esfera com a recta pode ser vazia, um ponto ou dois pontos, consoante a distância entre a recta e o centro da esfera. Assim, em primeiro lugar, calcula-se a distância entre o centro da esfera e a recta, segundo o algoritmo 4.

A intersecção é:

- (i) vazia — se a distância entre a recta e o centro da esfera for superior ao raio desta.
- (ii) um ponto — se a distância entre a recta e o centro da esfera for igual ao raio desta. Nesse caso a esfera é tangente à recta num ponto e as suas coordenadas são as coordenadas do ponto da esfera correspondente à projecção do centro da esfera sobre a recta dada. Para a obtenção deste ponto, resolve-se, de seguida, pelo algoritmo 16.
- (iii) dois pontos — caso a distância entre a recta e o centro da esfera seja inferior ao raio desta. Neste caso pode resolver-se o problema pelo seguinte algoritmo (ver figura seguinte):
 1. projecta-se o centro $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ da esfera sobre a recta, segundo o algoritmo 15, obtendo-se o ponto P_2 de coordenadas (x_2, y_2, z_2) ;
 2. calcula-se a distância d entre o centro da esfera e aquele ponto:

$$d = \text{dist}(P_0, P_2),$$

ou seja,

$$d = \text{dist}((x_0, y_0, z_0), (x_2, y_2, z_2)),$$

segundo o algoritmo 3;

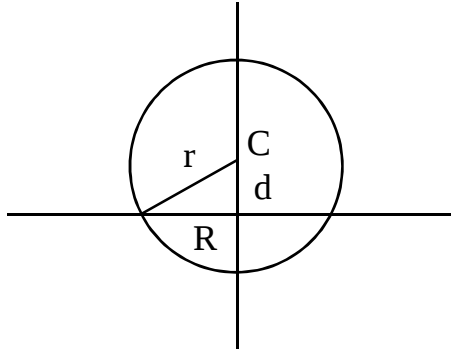


Figura 2: Intersecção de uma esfera com uma recta.

3. calcula-se a quantidade auxiliar designada por R , através de

$$R^2 = r^2 - d^2;$$

4. os pontos de intersecção resultam de⁴:

$$(x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) \pm R(a, b, c),$$

ou seja, têm coordenadas

$$\begin{cases} x = x_2 + Ra \\ y = y_2 + Rb \\ z = z_2 + Rc \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = x_2 - Ra \\ y = y_2 - Rb \\ z = z_2 - Rc \end{cases}.$$

- **Algoritmo 31 - Intersecção de duas Esferas.** Sejam dadas as esferas S_1 e S_2 de parâmetros

$$\{x_1, y_1, z_1, r_1\}$$

e

$$\{x_2, y_2, z_2, r_2\},$$

respectivamente.

A intersecção das duas esferas pode ser vazia, um ponto ou uma circunferência, consoante o valor da distância entre os centros das duas esferas.

⁴Note que, mais uma vez, é obrigatório que o vector director da recta esteja normalizado, isto é, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Assim, em primeiro lugar, calcula-se a distância d entre os centros das duas esferas, segundo o algoritmo 3:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

A intersecção é:

- (i) vazia – se $d > r_1 + r_2$.
- (ii) um ponto – se $d = r_1 + r_2$. Neste caso as duas esferas são tangentes num ponto. Esse ponto pertence à recta que contém os centros das duas esferas. A sua equação é

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

com

$$[a, b, c] = \text{nor}([x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]).$$

As coordenadas do ponto de tangência podem ser obtidas através de

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + r_1(a, b, c),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_1 + r_1 a \\ y = y_1 + r_1 b \\ z = z_1 + r_1 c \end{cases},$$

ou, através de

$$(x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) - r_2(a, b, c),$$

ou seja, ainda,

$$\begin{cases} x = x_2 - r_2 a \\ y = y_2 - r_2 b \\ z = z_2 - r_2 c \end{cases}.$$

- (iii) uma circunferência – caso $d < r_1 + r_2$ e $d > r_M - r_m$, onde r_M representa o maior dos raios r_1 e r_2 , $r_M = \max(r_1, r_2)$, e r_m o menor destes raios, $r_m = \min(r_1, r_2)$ ⁵. Um eixo do plano que contém a circunferência é a recta que une os centros das duas esferas, ou seja, os seus cossenos directores poderão ser obtidos por

$$[A, B, C] = \text{nor}([x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]).$$

A circunferência resultante da intersecção terá centro situado sobre este segmento. Para se determinarem as coordenadas do centro e o raio desta circunferência, atente-se às figuras seguintes.

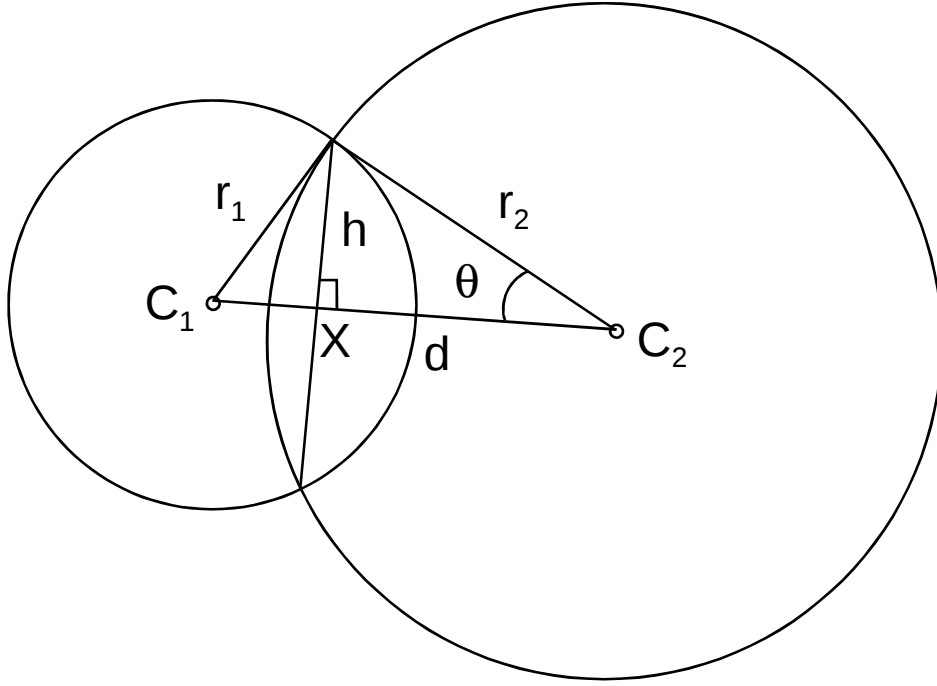


Figura 3: Intersecção de duas esferas (primeiro caso).

As coordenadas do centro e raio da circunferência obtêm-se através do seguinte algoritmo:

1. calcula-se a distância d entre os centros $C_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $C_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ das duas esferas, por meio do algoritmo 3,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2};$$

2. constrói-se o triângulo de lados de comprimentos r_1 , r_2 e d e, usando o teorema de Carnot, determina-se o ângulo interno do triângulo de vértice em C_2 , que designamos por θ , através de

$$\cos \theta = \frac{(r_2)^2 + d^2 - (r_1)^2}{2r_2 d};$$

3. de seguida, calcula-se a altura deste triângulo em relação ao lado d , designada por h nas figuras anteriores, cujo valor corresponde ao raio r da circunferência de intersecção:

$$r = h = r_2 \sin \theta;$$

⁵Caso $d < r_M - r_m$, uma esfera é interior à outra, não havendo intersecção. Se $d = r_M - r_m$, então as duas esferas são tangentes, estando uma esfera situada no interior da outra. Note-se que, em ambos os casos, isto só acontece se $d < r_m + r_M$.

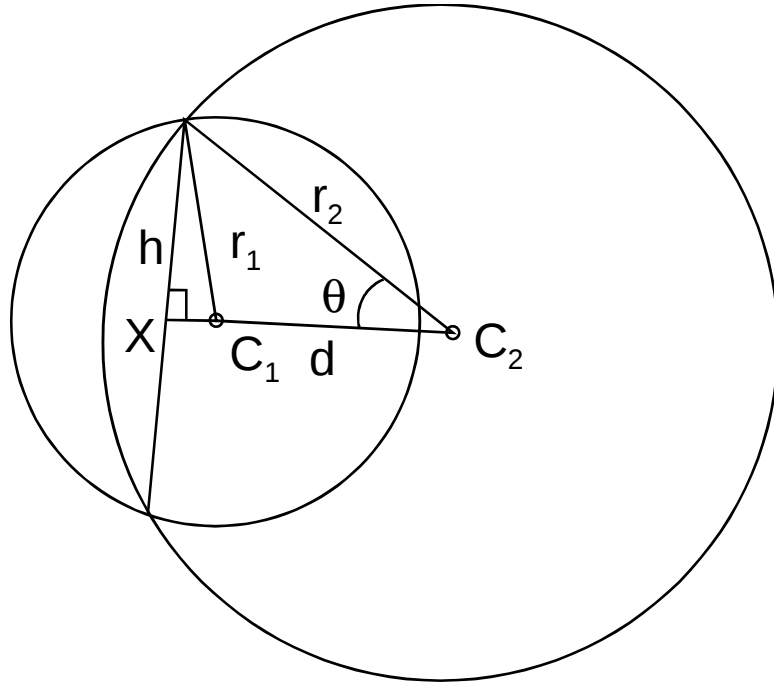


Figura 4: Intersecção de duas esferas (segundo caso).

4. finalmente, as coordenadas (x_0, y_0, z_0) do centro X da circunferência intersecção podem ser obtidas através de

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_2, y_2, z_2) + r_2 \cos \theta (A, B, C)$$

uma vez que todos estes pontos se encontram sobre a recta que une os centros C_1 e C_2 das duas esferas, podendo considerar-se como vector director desta recta o mesmo vector director do plano da circunferência, $[A, B, C]$, calculado acima⁶ e a distância do centro C_2 da esfera S_2 ao centro X da circunferência pode ser obtida pela projecção do lado de comprimento r_2 sobre o lado de comprimento d , ou seja, por meio de $r_2 \cos \theta$.

Assim, a circunferência pretendida tem parâmetros

$$\{x_0, y_0, z_0, A, B, C, r\}.$$

⁶Note-se que, devido à maneira como foi definido o vector de componentes $[A, B, C]$, este aponta no sentido do centro C_2 para o centro C_1 .

4 Bibliografia

Referências

- [1] Alves, A.S. - *Metrologia Geométrica* - Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1996;
- [2] Santos, Jorge M. F. dos - *Ajustamento de Quádricas* - Coimbra, 1995;
- [3] Santos, Jorge M. F. dos - *Textos de Apoio às Aulas de Metrologia Geométrica* - Coimbra, Ano Lectivo de 1998/1999.