Algumas Propriedades das Rotações no Espaço Tridimensional

Manuel António Facas Vicente

Setembro de 2000

No que segue consideraremos o espaço afim tridimensional E sobre o espaço vectorial dos vectores livres E e um referencial cartesiano rectangular directo $OXYZ$ associado ao ponto O e à base $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ de E, ortonormada directa.

Supomos conhecidas as noções de translação e rotação e consideramos que a rotação em torno de um eixo é positiva se se fizer no sentido directo para um observador colocado ao longo da parte positiva desse eixo a olhar a origem. Assim, as rotações em torno dos eixos OX, OY e OZ produzem no eixo seguinte um deslocamento no sentido daquele que se lhe segue pela ordem cíclica XYZ, YZX, ZXY (por exemplo, uma rotação positiva em torno do eixo OY faz com que a parte positiva do eixo OZ se aproxime da parte positiva do eixo OX).

Recordamos que a rotação em torno do eixo OZ segundo o ângulo κ, que vamos representar por $r_\kappa^{(3)}$,

- deixa fixos todos os pontos de OZ,
- transforma os vectores $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ e $\overrightarrow{e}_3$, respectivamente nos vectores $\overrightarrow{i}_k$, $\overrightarrow{j}_k$ e $\overrightarrow{k}_k$, assim definidos:

$$\overrightarrow{i}_k^{(3)} = \cos\kappa \overrightarrow{e}_1 + \sin\kappa \overrightarrow{e}_2,$$

$$\overrightarrow{j}_k^{(3)} = -\sin\kappa \overrightarrow{e}_1 + \cos\kappa \overrightarrow{e}_2$$

e

$$\overrightarrow{k}_k^{(3)} = \overrightarrow{e}_3,$$

pelo que a matriz desta rotação na base $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ será

$$R_\kappa^{(3)} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

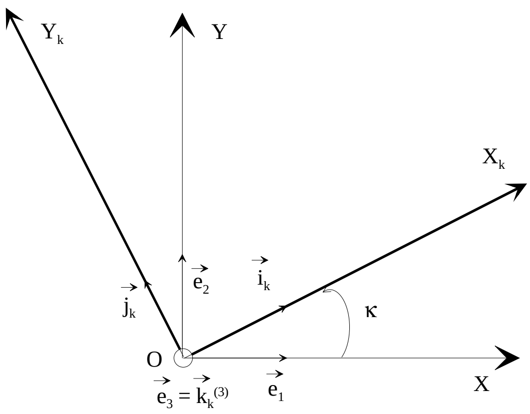

Figura 1: Rotação em torno de OZ.

Então qualquer ponto P de coordenadas (x, y, z) no referencial $OXYZ$ é transformado no ponto P', tal que

$$\overrightarrow{OP'} = r_\kappa^{(3)} \left(\overrightarrow{OP} \right)$$

cujas coordenadas (x', y', z') são obtidas a partir da igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Analogamente para as rotações $r_\omega^{(1)}$ e $r_\phi^{(2)}$, respectivamente em torno de OX segundo o ângulo ω e em torno de OY segundo o ângulo ϕ, vem

- para $r_\omega^{(1)}$:

$$\overrightarrow{i}_\omega^{(1)} = \overrightarrow{e}_1,$$

$$\overrightarrow{j}_\omega^{(1)} = \cos\omega \overrightarrow{e}_2 + \sin\omega \overrightarrow{e}_3$$

e

$$\overrightarrow{k}_\omega^{(1)} = -\sin\omega \overrightarrow{e}_2 + \cos\omega \overrightarrow{e}_3$$

e portanto a matriz desta transformação na base $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ é

$$R_\omega^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}.$$

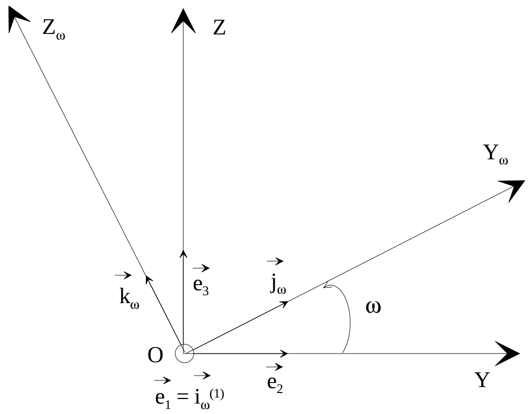

Figura 2: Rotação em torno de OX.

- para $r_\phi^{(2)}$:

$$\overrightarrow{i}_\phi^{(2)} = \cos\phi\,\overrightarrow{e}_1 - \sin\phi\,\overrightarrow{e}_3,$$

$$\overrightarrow{j}_\phi^{(2)} = \overrightarrow{e}_2$$

e

$$\overrightarrow{k}_\phi^{(2)} = \sin\phi\,\overrightarrow{e}_1 + \cos\phi\,\overrightarrow{e}_3$$

sendo a matriz desta transformação na base $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$

$$R_\phi^{(2)} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Referências

[1] Alves, A.S. - *Metrologia Geométrica* - Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1996.

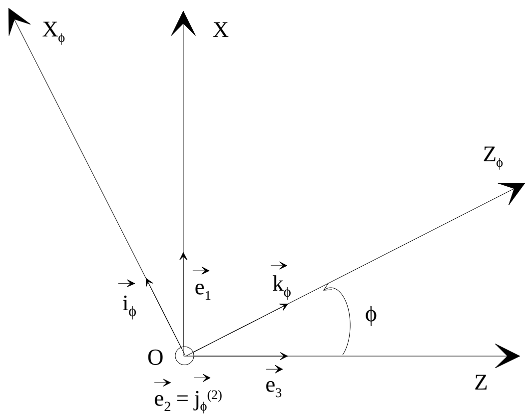

Figura 3: Rotação em torno de OY.