

Conteúdo

1	Introdução	2
2	A Aquisição de Coordenadas	3
3	Materialização Física do Sistema	6
4	Calibração do Sistema	7
5	A Aquisição de Coordenadas	8
5.1	Método Rigoroso	9
5.1.1	Caso $n_T = 2$	12
5.1.2	Caso Geral ($n_T \geq 2$)	13
6	Estudo do Problema Inverso	15
7	Bibliografia	17

Lista de Figuras

1	Sistema Móvel Tridimensional (SMT)	3
2	Sistema Móvel Tridimensional ideal (SMT)	4
3	Esquematização de um Sistema Móvel Tridimensional ideal . . .	5
4	Constituintes principais de um teodolito	7

Sistema Móvel de Medição Tridimensional - Problemas directo e inverso

Manuel António Facas Vicente

Janeiro de 1999

1 Introdução

A medição de distâncias tradicionalmente usada em Topografia, quer com métodos directos, quer com métodos indirectos, é inadequada para fins industriais, especialmente quando o objecto a medir tem dimensões apreciáveis e formas pouco regulares. O cálculo das coordenadas tridimensionais de pontos, num referencial local adaptado ao objecto em estudo, permite resolver, com facilidade e eficiência, o problema da determinação da distância entre pontos do referido objecto. Esta determinação, com uma precisão adequada à maioria dos casos, consegue-se com um sistema constituído, pelo menos, por dois teodolitos (de segundos), sistema esse que, devido à fácil mobilidade dos teodolitos, constitui um *Sistema Móvel de Medição Tridimensional*.

O princípio geométrico subjacente a este processo de medição é conhecido há muito tempo. A sua utilização, na prática, não era, no entanto, aconselhável devido aos complexos algoritmos de calibração do sistema e à complexidade do cálculo e da compensação de resultados. A introdução da electrónica nos instrumentos de Topografia e a possibilidade de efectuar a sua ligação a um computador, permite a obtenção dos valores desejados praticamente em tempo real, o que torna este processo uma alternativa muito válida em *Metrologia Geométrica*.

O *Sistema Móvel de Medição Tridimensional*, ou simplesmente *Sistema Móvel Tridimensional (SMT)*, tem como fim imediato a determinação das coordenadas cartesianas tridimensionais (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, de n pontos P_i , num referencial a definir. As componentes essenciais deste sistema são dois teodolitos (capazes de efectuar medições de ângulos ao segundo do grau, 1×10^{-4} g), que irão ser estacionados em redor do objecto a medir. As coordenadas de cada ponto são obtidas por intersecção das *linhas de visada*, quando se aponta a partir dos dois teodolitos para esse mesmo ponto (ver figura 1). Consequentemente, cada ponto P_i terá que ser visado simultaneamente pelos dois teodolitos.

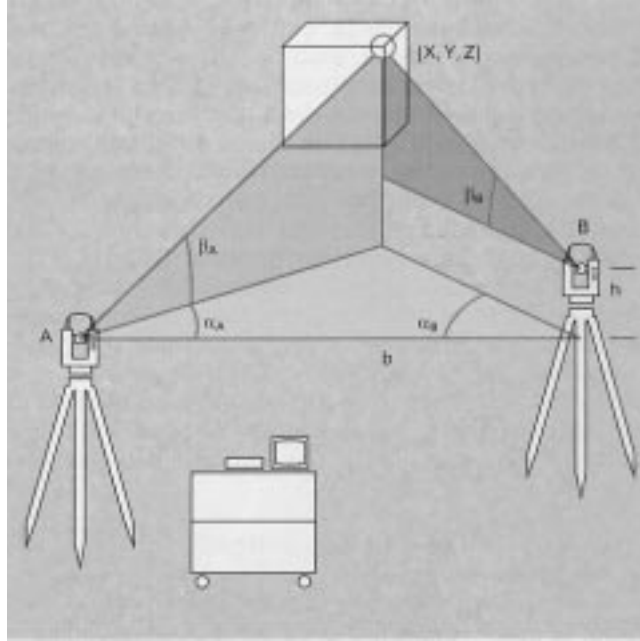


Figura 1: Sistema Móvel Tridimensional (SMT)

2 A Aquisição de Coordenadas

O princípio de medição com um *Sistema Móvel Tridimensional* está esquematizado na figura 2. Para efectuar a medição de coordenadas, estacionam-se livremente dois teodolitos e visam-se os pontos cujas coordenadas se pretendem determinar $P \equiv (x, y, z)$, medindo-se os ângulos azimutais H_A e H_B e os ângulos zenitais V_A e V_B , indicados na figura.

A base b (distância horizontal entre os pontos A e B , centros dos dois teodolitos) e a diferença de nível H entre esses centros, determinam-se previamente visando-se, com os dois teodolitos, pontos fixos distribuídos espacialmente, ou os extremos de uma base de comprimento conhecido. Ao conjunto de operações que conduzem à determinação de b e de H dá-se o nome de *Calibração do Sistema*.

Assim, a primeira coisa a fazer será definir o sistema de coordenadas ligado ao *SMT*. Para isso, consideremos a figura 2, na qual P é o ponto de coordenadas a determinar e os pontos A e B são os respectivos centros dos teodolitos.

De uma forma geral, as coordenadas de P são consideradas em relação ao sistema de referência directo $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Este referencial tem origem O coincidente com o ponto A (centro do primeiro teodolito), o plano $O\vec{i}\vec{k}$ é o plano vertical que contém os pontos A e B (centro do segundo teodolito), sendo

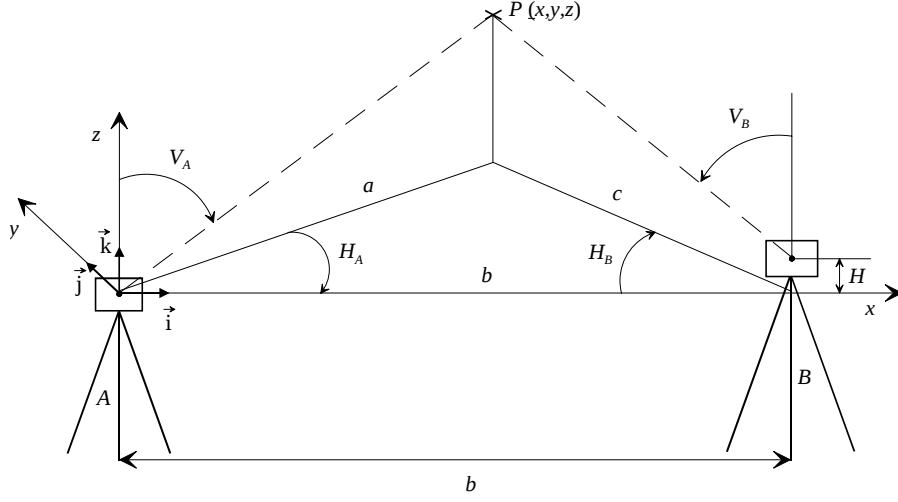


Figura 2: Sistema Móvel Tridimensional ideal (SMT)

$\vec{k}$ o vector director (unitário) da recta vertical que passa pelo ponto A (no sentido ascendente) e $\vec{i}$ o vector (unitário) horizontal que aponta de A para a recta vertical que passa pelo ponto B . O vector $\vec{j}$ será o vector unitário definido de tal forma que o referencial $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ seja ortogonal directo¹.

Relativamente a este referencial, teremos então

$$A \equiv (0, 0, 0)$$

e

$$B \equiv (b, 0, H),$$

representando b a distância entre os pontos A e B projectada no plano horizontal, e H a diferença de nível entre os pontos A e B .

Utilizando os ângulos H_A , H_B , V_A e V_B , medidos em cada um dos teodolitos quando visam os diferentes pontos $P \equiv (x, y, z)$ do objecto, o computador, graças à recepção em linha dos valores obtidos, pode calcular, em tempo real, as suas coordenadas (x, y, z) .

As coordenadas (x, y, z) de P podem assim obter-se a partir das relações:

$$\begin{cases} x = a \cos H_A \\ y = a \sin H_A \\ z = \frac{h_1 + (h_2 + H)}{2} \end{cases}, \quad (1)$$

¹ $\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$, onde " $\times$ " denota o produto vectorial.

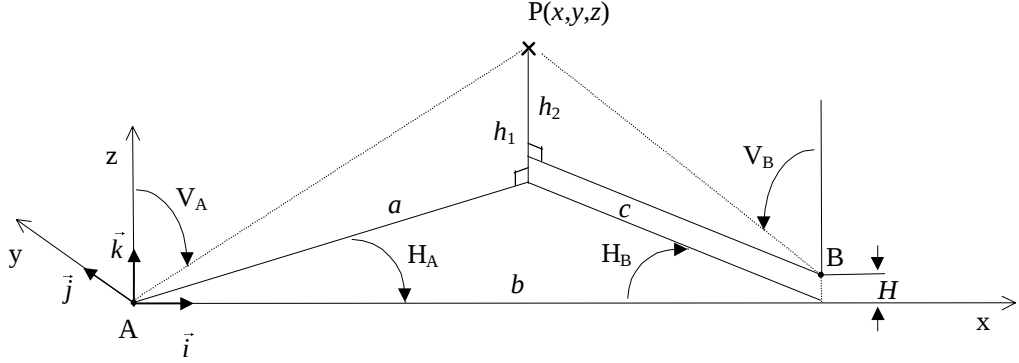


Figura 3: Esquemática de um Sistema Móvel Tridimensional ideal

com as quantidades auxiliares a , h_1 e h_2 dadas pelas relações:

$$a = b \frac{\sin H_B}{\sin (H_A + H_B)}, \quad (2)$$

$$c = b \frac{\sin H_A}{\sin (H_A + H_B)}, \quad (3)$$

$$h_1 = a \cotg V_A, \quad (4)$$

e

$$h_2 = c \cotg V_B, \quad (5)$$

onde H_A e H_B são os ângulos horizontais ou azimutais² e V_A e V_B os ângulos verticais ou zenitais³ medidos pelos dois teodolitos e representados nas figuras 2 e 3. Note-se que, tal como o valor de b , os valores de a e de c correspondem também a distâncias projectadas no plano horizontal (o triângulo de lados com comprimentos a , b e c é um triângulo horizontal). Os valores de b e de H são determinados durante a *calibração do sistema*, como veremos mais adiante.

Portanto, as coordenadas de P são obtidas através de ângulos horizontais e verticais medidos por teodolitos segundo o esquema das figuras 2 e 3.

²Os ângulos azimutais ou horizontais são determinados pelas diferenças entre as leituras azimutais efectuadas em cada um dos teodolitos para o outro teodolito e para o ponto de coordenadas a determinar.

³Ângulos, situados em planos verticais, contados desde a vertical que passa pelo centro do teodolito (no sentido ascendente) até à direcção da linha de visada.

A grande vantagem deste método de medição em aplicações industriais resulta da grande mobilidade dos elementos de medição - o que permite a medição directa de objectos de qualquer tamanho e em qualquer localização - e da rapidez na obtenção de resultados - estes são praticamente obtidos em tempo real. Além disso, é de referir a não necessidade de existir contacto com o objecto a medir.

3 Materialização Física do Sistema

Num teodolito podemos identificar essencialmente dois eixos de rotação (ver figura 4):

- o *eixo principal* ou *vertical* (e.p.) em torno do qual se medem os *ângulos horizontais* ou *azimutais* e que, portanto, deve ser perpendicular ao plano do *limbo* ou *círculo azimutal* (L.A.), que é o círculo graduado onde se fazem as leituras *azimutais*;
- o *eixo secundário* ou *horizontal* (e.s.) em torno do qual se medem os ângulos *verticais* ou *zenitais* e que, por conseguinte, deve ser perpendicular ao plano do *limbo* ou *círculo zenital* (L.Z.), que é o círculo graduado onde se fazem as leituras *zenitais*.

Se um teodolito estiver correctamente construído, ou seja, se as *condições de construção* se verificarem, para além dos eixos serem perpendiculares aos respectivos limbos, eles serão também ortogonais entre si e intersectar-se-ão num ponto, que é o denominado *centro do teodolito* ou *centro de perspectiva* (ponto C).

Além dos eixos já mencionados, existe ainda o designado por *eixo óptico* (e.o.), que é definido pela linha de pontaria, ou seja, é o eixo que une o centro do teodolito com o ponto visado e cuja projecção nos limbos vai determinar as respectivas leituras azimutais e zenitais a efectuar. Este eixo, por construção, deve ter movimentos num plano perpendicular ao eixo secundário.

No contexto dos sistemas móveis tridimensionais, para que os teodolitos estejam devidamente estacionados, é essencial que os seus eixos principais sejam paralelos entre si, para assegurar a correcta definição da direcção do eixo $O\vec{k}$ do referencial associado ao sistema. Na prática, o que se faz é verticalizar ambos os eixos, usando para isso as *nivelas* do aparelho.

No sentido de definir a direcção do eixo $O\vec{i}$ do sistema, vai ser necessário visar um ponto do eixo principal do teodolito B - P_B - a partir do teodolito A e um ponto do eixo principal do teodolito A - P_A - a partir do teodolito B. O problema reside agora na materialização dos referidos pontos P_A e P_B , por forma a ser possível apontar para eles.

Alguns teodolitos dispõem de dispositivos, designados de *autocolimação*, que permitem *visadas recíprocas*, isto é, permitem apontar directa e mutuamente para o centro de cada teodolito.

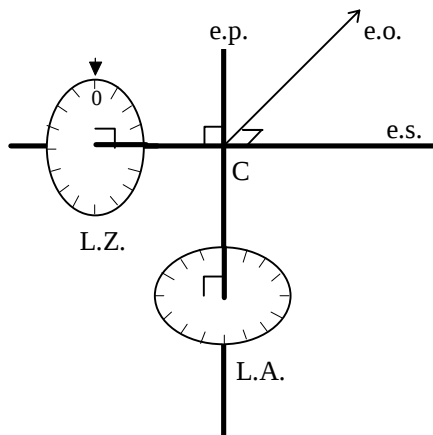


Figura 4: Constituintes principais de um teodolito

Na falta desse dispositivo, pode-se tentar apontar para os *pontos estação* (intersecção com o terreno do eixo principal de cada um dos teodolitos), se estes forem intervisíveis, ou então, pode-se usar o fio de prumo (supondo válida a hipótese de o eixo principal estar vertical).

Normalmente costumam fixar-se as leituras azimutais a zero quando se fazem as visadas recíprocas, por forma a que os ângulos horizontais sejam dados directamente pelas leituras nos respectivos limbos, bastando para isso que a graduação do limbo do teodolito *B* seja crescente no sentido dos ponteiros do relógio e a do limbo do teodolito *A* seja crescente no sentido contrário⁴.

Resumindo, a materialização da direcção do eixo $O\vec{k}$ será feita pela direcção dos eixos principais, enquanto que a do eixo $O\vec{i}$ será realizada à custa das visadas recíprocas *a zeros*.

4 Calibração do Sistema

Pretendemos neste momento efectuar a determinação das constantes do sistema anteriormente apresentado — os elementos *b* e *H* são os parâmetros fixos desse sistema. Ao conjunto de operações que conduzem à sua determinação damos o nome de *calibração do sistema*.

Para que a calibração seja realizada, um dos processos mais simples é baseado no conhecimento, com precisão, de uma distância *l*, que é, em geral, materializada fisicamente por uma chamada *base de ínvar*⁵.

⁴Embora estas condições não sejam obrigatórias.

⁵Uma base de ínvar é uma haste de um material muito estável, de difícil deformação, com

Costuma designar-se b por *base métrica* do sistema, já que é essa distância que vai fixar a escala em que se vai trabalhar.

Numa primeira aproximação, vai fixar-se arbitrariamente um valor para a escala, atribuindo a essa base um valor b' qualquer⁶. Em função desse valor pode calcular-se a diferença de nível H' à escala fixada, através da relação

$$H' = h'_1 - h'_2. \quad (6)$$

Para se obterem os valores de h'_1 e h'_2 , apontam-se ambos os teodolitos para um ponto qualquer (bem referenciado) e registam-se os respectivos ângulos azimutais e zenitais, aplicando-se depois as relações 2, 3, 4 e 5.

Para se determinar a escala verdadeira, fazem-se pontarias às extremidades da *base de invar*, no sentido de obter as coordenadas desses dois pontos à escala arbitrada. Usando essas coordenadas, podemos calcular a distância l' nessa escala fixada⁷. Como essa distância é conhecida à escala verdadeira⁸, pode assim obter-se o *factor de escala* s , que permite passar da escala inicial para a escala verdadeira, por meio de:

$$s = \frac{l}{l'}. \quad (7)$$

Os parâmetros de calibração na escala verdadeira são então dados por:

$$b = sb' \quad (8)$$

e

$$H = sH'. \quad (9)$$

5 A Aquisição de Coordenadas

Após a cuidadosa calibração do sistema, estamos em condições de iniciar a determinação das coordenadas necessárias à resolução do problema em causa.

Para obter as coordenadas de cada ponto P_i , basta então apontar os dois teodolitos para esse ponto, registar as respectivas leituras angulares e aplicar as relações 1, 2, 3, 4 e 5.

alvos nas extremidades e cuja distância entre esses alvos é conhecida com grande precisão (geralmente tem um comprimento de $l = 2.0000$ metros).

⁶Para evitar introduzir instabilidade numérica, convém dar a b' um valor da mesma ordem de grandeza de b (normalmente basta fazer $b' = 10$ metros).

⁷Se (x'_1, y'_1, z'_1) e (x'_2, y'_2, z'_2) forem as coordenadas dos dois pontos correspondentes às duas referências existentes nas extremidades da *base de invar*, coordenadas essas determinadas por meio do *SMT*, usando as relações 1, 2 e 3, nas quais se pode fazer, por exemplo, $b' = 10$, tem-se $l' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2}$.

⁸Uma vez que corresponde ao comprimento l da *base de invar* (valor conhecido).

As maiores dificuldades práticas de utilização deste sistema residem na necessidade de todos os pontos, cujas coordenadas se pretendem determinar, terem de ser visados a partir de ambos os teodolitos.

Por um lado, existe o problema da correcta identificação dos pontos, que pode ser ultrapassado se eles forem marcados com um alvo e uma etiqueta. Nos sistemas mais sofisticados, um dos teodolitos emite um raio luminoso para o ponto visado, o que permite apontar o outro teodolito para esse mesmo ponto.

Por outro lado, surge o problema da visibilidade dos pontos a partir dos dois teodolitos. Em objectos planos, como fachadas de edifícios ou secções de cascos de navios, por exemplo, esse problema pode ser normalmente ultrapassado por um correcto posicionamento dos teodolitos em relação ao objecto a medir. No entanto, quando o objecto tem várias faces a inspeccionar, torna-se necessário mudar a posição do sistema em relação a esse objecto e depois, caso haja necessidade disso, passar todas as coordenadas para um mesmo referencial, por meio de uma bem definida mudança de referencial.

Em alguns sistemas mais complexos utilizam-se vários teodolitos (mais de dois), que são estacionados em redor da peça a medir, por forma a fazerem uma cobertura integral de toda a superfície a inspeccionar. O princípio de funcionamento poderá ser o mesmo, só que agora irão coexistir vários sistemas de dois teodolitos, ligados entre si por transformações de coordenadas. Estas transformações podem ser definidas por meio de uma *translação* da origem do referencial e por uma *rotação* geral no espaço do sistema de eixos⁹.

Os parâmetros de transformação entre dois referenciais podem ser determinados à custa do conhecimento das coordenadas de pelo menos três pontos nos dois referenciais. Iremos designar este processo por *Método Expedito*. No entanto, podemos fazer uma abordagem diferente a este problema, através das chamadas *Equações de Colinearidade*, tal como veremos de seguida.

5.1 Método Rigoroso

Na abordagem anterior (*Método Expedito*), o problema é visto na perspectiva da Topografia. Vamos agora analisar a questão sob o ponto de vista da Fotogrametria, ou mais concretamente, seguindo o método usado na orientação relativa de fotografias com sobreposição (o chamado *modelo*), através das denominadas *Equações de Colinearidade* (ver [4]).

Começemos por definir um sistema de referência cartesiano ortogonal directo R_k associado a cada teodolito T_k , que designaremos por *referencial interno*, com $k = 1, 2, \dots, n_T$, em que n_T é o número de teodolitos usados.

As coordenadas cartesianas de cada ponto P_i no referencial R_k , (x_{ki}, y_{ki}, z_{ki}) , podem ser dadas por

⁹É de referir que, cumprindo o estipulado em relação à definição do referencial associado ao SMT, todos os referenciais têm eixos $O\vec{k}$ paralelos, o que simplifica a rotação requerida.

No entanto, devido à impossibilidade prática de verticalizar rigorosamente os eixos principais dos teodolitos, terão que ser considerados rotações gerais.

$$\begin{cases} x_{ki} = r_{ki} \sin H_{ki} \sin V_{ki} \\ y_{ki} = r_{ki} \cos H_{ki} \sin V_{ki} \\ z_{ki} = r_{ki} \cos V_{ki} \end{cases}, \quad (10)$$

em que H_{ki} e V_{ki} são, respectivamente, as leituras horizontais e verticais que se fazem quando se aponta a partir do teodolito T_k para o ponto P_i (supondo que os teodolitos se visam a zeros) e r_{ki} é a distância (desconhecida) de P_i à origem O_k do referencial associado ao teodolito T_k .

Deste modo, a relação 10 representa a conversão das coordenadas esféricas (r_{ki}, H_{ki}, V_{ki}) para as cartesianas (x_{ki}, y_{ki}, z_{ki}) . Conhecendo r_{ki} , seria possível determinar imediatamente as coordenadas de P_i em R_k . No entanto, os teodolitos actuais ainda não têm a capacidade de medir essa distância com suficiente precisão para estes casos.

Para simplificar, vamos fixar R_1 , o referencial associado ao primeiro teodolito, como sendo o referencial onde pretendemos determinar as coordenadas dos pontos P_i , referencial esse que será designado por *referencial externo* do *SMT*. Deste modo, o *referencial externo* do sistema coincide com o *referencial interno* do teodolito T_1 . Consequentemente, as coordenadas de cada ponto P_i , que vamos determinar através do *SMT*, vão ser (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) .

A relação entre as coordenadas de um mesmo ponto em R_1 e em R_k é dada matricialmente por

$$P_{ki} = M_k (P_{1i} - O_k), \quad (11)$$

na qual P_{1i} e P_{ki} são as matrizes-coluna que contêm as coordenadas do ponto P_i nos referenciais R_1 e R_k , respectivamente, e M_k e O_k definem a transformação de coordenadas entre R_1 e R_k do seguinte modo:

- O_k é a matriz-coluna que contém as coordenadas do centro do teodolito T_k no referencial R_1 . Esta matriz define a translação $O_k = [X_k \ Y_k \ Z_k]^T$;
- M_k é a matriz de rotação, que pode ser dada em função dos ângulos de rotação ω_k , ϕ_k e κ_k , em torno dos eixos coordenados de R_k : $O_k x_k$, $O_k y_k$ e $O_k z_k$, respectivamente:

$$M_k = \begin{bmatrix} \cos \phi_k \cos \kappa_k & -\cos \omega_k \sin \kappa_k + \sin \omega_k \sin \phi_k \cos \kappa_k \\ \cos \phi_k \sin \kappa_k & \cos \omega_k \cos \kappa_k + \sin \omega_k \sin \phi_k \sin \kappa_k \\ -\sin \phi_k & \sin \omega_k \cos \phi_k \\ \sin \omega_k \sin \kappa_k + \cos \omega_k \sin \phi_k \cos \kappa_k \\ -\sin \omega_k \cos \kappa_k + \cos \omega_k \sin \phi_k \sin \kappa_k \\ \cos \omega_k \cos \phi_k \end{bmatrix}.$$

Assim, os parâmetros de transformação que permitem passar de um referencial interno R_k para o referencial externo R_1 do sistema móvel são ω_k , ϕ_k , κ_k , X_k , Y_k e Z_k .

É de notar que, escolhendo R_1 para referencial externo do *SMT*, teremos sempre $\omega_1 = \phi_1 = \kappa_1 = 0$ e $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$.

Considerando as relações 10 e 11, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{1i} - X_k \\ y_{1i} - Y_k \\ z_{1i} - Z_k \end{bmatrix}$$

e, definindo

$$M_k = [m_{ij}^k]_{(i,j=1,2,3)}$$

e

$$\begin{cases} u_{ki} = m_{11}^k (x_{1i} - X_k) + m_{12}^k (y_{1i} - Y_k) + m_{13}^k (z_{1i} - Z_k) \\ v_{ki} = m_{21}^k (x_{1i} - X_k) + m_{22}^k (y_{1i} - Y_k) + m_{23}^k (z_{1i} - Z_k) \\ w_{ki} = m_{31}^k (x_{1i} - X_k) + m_{32}^k (y_{1i} - Y_k) + m_{33}^k (z_{1i} - Z_k) \end{cases},$$

vem

$$\begin{cases} x_{ki} = r_{ki} \sin H_{ki} \sin V_{ki} = u_{ki} \\ y_{ki} = r_{ki} \cos H_{ki} \sin V_{ki} = v_{ki} \\ z_{ki} = r_{ki} \cos V_{ki} = w_{ki} \end{cases} \quad (12)$$

A partir das equações anteriores podemos facilmente obter

$$r_{ki} = \sqrt{u_{ki}^2 + v_{ki}^2 + w_{ki}^2},$$

onde r_{ki} representa a distância entre o ponto P_i , de coordenadas (x_{ki}, y_{ki}, z_{ki}) no referencial R_k , e a origem do referencial R_k , que neste referencial tem, obviamente, coordenadas $(0, 0, 0)$.

Como r_{ki} não depende do referencial escolhido (r_{ki} representa uma distância, logo é um *invariante*), considerando no referencial externo a mesma distância, que designamos agora por R_{ki} , entre o ponto P_i e o centro do teodolito T_k , cujas coordenadas estão agora obviamente referidas ao referencial do primeiro teodolito, R_1 , e que são (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) e (X_k, Y_k, Z_k) , respectivamente, temos ainda que

$$R_{ki} := \sqrt{(x_{1i} - X_k)^2 + (y_{1i} - Y_k)^2 + (z_{1i} - Z_k)^2} = r_{ki}.$$

Substituindo agora, por exemplo, nas duas primeiras relações da expressão 12, ficamos assim com duas equações independentes:

$$\begin{cases} R_{ki} \sin H_{ki} \sin V_{ki} - u_{ki} = 0 \\ R_{ki} \cos H_{ki} \sin V_{ki} - v_{ki} = 0 \end{cases}.$$

Obtêm-se assim as equações não lineares:

$$\begin{cases} F_{ki}^x(\omega_k, \phi_k, \kappa_k, X_k, Y_k, Z_k, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{ki} \sin H_{ki} \sin V_{ki} - u_{ki} = 0 \\ F_{ki}^y(\omega_k, \phi_k, \kappa_k, X_k, Y_k, Z_k, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{ki} \cos H_{ki} \sin V_{ki} - v_{ki} = 0 \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n_T, \quad i = 1, 2, \dots, n_P \quad (13)$$

5.1.1 Caso $n_T = 2$

No caso de termos $n_T = 2$, ou seja, o sistema móvel de medição tridimensional ser constituído por dois teodolitos, iremos ter $4 \times n_P$ equações da forma¹⁰:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1i}^x(0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{1i} \sin H_{1i} \sin V_{1i} - u_{1i} = 0 \\ F_{1i}^y(0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{1i} \cos H_{1i} \sin V_{1i} - v_{1i} = 0 \end{array} \right., \quad k = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{2i}^x(\omega_2, \phi_2, \kappa_2, X_2, Y_2, Z_2, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{2i} \sin H_{2i} \sin V_{2i} - u_{2i} = 0 \\ F_{2i}^y(\omega_2, \phi_2, \kappa_2, X_2, Y_2, Z_2, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{2i} \cos H_{2i} \sin V_{2i} - v_{2i} = 0 \end{array} \right. . \quad k = 2, \quad i = 1, 2, \dots, n_P$$

Os 6 parâmetros ω_2 , ϕ_2 , κ_2 , X_2 , Y_2 e Z_2 podem ser reduzidos a 5 se, por exemplo, dermos a X_2 um valor b , fixando assim inicialmente a escala de R_1 num valor arbitrário¹¹, tal como fizemos no método anterior (*Método Expedito*). Assim, virá:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1i}^x(0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{1i} \sin H_{1i} \sin V_{1i} - u_{1i} = 0 \\ F_{1i}^y(0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{1i} \cos H_{1i} \sin V_{1i} - v_{1i} = 0 \end{array} \right. \quad k = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_P$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{2i}^x(\omega_2, \phi_2, \kappa_2, b, Y_2, Z_2, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{2i} \sin H_{2i} \sin V_{2i} - u_{2i} = 0 \\ F_{2i}^y(\omega_2, \phi_2, \kappa_2, b, Y_2, Z_2, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{2i} \cos H_{2i} \sin V_{2i} - v_{2i} = 0 \end{array} \right. \quad k = 2, \quad i = 1, 2, \dots, n_P$$

Deste modo, iremos então ter $3 \times n_P + 5$ incógnitas, que vão ser x_{1i} , y_{1i} , z_{1i} , para $i = 1, 2, \dots, n_P$ e ω_2 , ϕ_2 , κ_2 , Y_2 e Z_2 , o que nos vai obrigar a visar, pelo menos, 5 pontos a partir dos teodolitos T_1 e T_2 , de forma que o sistema seja possível¹². Portanto, cada ponto P_i visado introduz mais 4 equações do tipo 13 e 3 incógnitas (x_{1i} , y_{1i} , z_{1i}).

No caso de serem visados mais do que 5 pontos (o que é aconselhável¹³), resolve-se o sistema recorrendo a um processo de ajustamento, que pode ser, por exemplo, o *Método dos Mínimos Quadrados* (ver [3]).

¹⁰Note-se que se considera que o *referencial externo* do sistema coincide com o *referencial interno* do primeiro teodolito, R_1 , ou seja, $\omega_1 = \phi_1 = \kappa_1 = 0$ e $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$.

¹¹A coordenada X_2 do centro do segundo teodolito, no referencial R_1 associado ao primeiro teodolito, corresponde ao valor da *base métrica* do sistema móvel, anteriormente designada por b .

¹²Se visarmos 5 pontos, ou seja, $n_P = 5$, teremos $4 \times n_P = 20$ equações e $3 \times n_P + 5 = 20$ incógnitas.

¹³Para $n_P \geq 5$, a redundância tomará o valor de $(4 \times n_P) - (3 \times n_P + 5) = n_P - 5$.

Ficaremos assim com um sistema de $4 \times n_P$ equações não lineares a $3 \times n_P + 5$ incógnitas ($n_P \geq 5$), que poderá ser resolvido por um dos vários métodos iterativos conhecidos para o efeito (ver, por exemplo, [3]). Para aproximações iniciais poderemos usar os valores dados pelo *Método Expedito* anterior, em que $\omega_2^{(0)} = 0$, $\phi_2^{(0)} = 0$, $\kappa_2^{(0)} = 0$, $X_2^{(0)} = b$, $Y_2^{(0)} = 0$ e $Z_2^{(0)} = H$, desde que se aponte de T_1 para T_2 com leitura azimutal de 100 graus e de T_2 para T_1 com leitura azimutal de 300 graus.

Neste caso, a fase da calibração do sistema consiste na determinação dos 5 parâmetros de transformação. Para tal, visam-se 5 ou mais pontos, suficientes para permitirem resolver o sistema de equações não lineares referido.

Após a calibração, as incógnitas do problema reduzem-se apenas às coordenadas, em R_1 , de cada ponto visado, isto é, para cada ponto P_i teremos que resolver um sistema de 4 equações não lineares da forma 13, em relação às 3 incógnitas (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) .

5.1.2 Caso Geral ($n_T \geq 2$)

Quando o número de teodolitos é superior a dois, o método aplica-se resolvendo agora um sistema de $2 \times n_T \times n_P$ equações não lineares da forma 13:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} F_{1i}^x(0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{1i} \sin H_{1i} \sin V_{1i} - u_{1i} = 0 \\ F_{1i}^y(0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{1i} \cos H_{1i} \sin V_{1i} - v_{1i} = 0 \\ k = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_P \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} F_{2i}^x(\omega_2, \phi_2, \kappa_2, b, Y_2, Z_2, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{2i} \sin H_{2i} \sin V_{2i} - u_{2i} = 0 \\ F_{2i}^y(\omega_2, \phi_2, \kappa_2, b, Y_2, Z_2, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{2i} \cos H_{2i} \sin V_{2i} - v_{2i} = 0 \\ k = 2, \quad i = 1, 2, \dots, n_P \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} F_{3i}^x(\omega_3, \phi_3, \kappa_3, X_3, Y_3, Z_3, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{3i} \sin H_{3i} \sin V_{3i} - u_{3i} = 0 \\ F_{3i}^y(\omega_3, \phi_3, \kappa_3, X_3, Y_3, Z_3, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{3i} \cos H_{3i} \sin V_{3i} - v_{3i} = 0 \\ k = 3, \quad i = 1, 2, \dots, n_P \end{array} \right. \\ & \vdots \\ & \left\{ \begin{array}{l} F_{n_T i}^x(\omega_{n_T}, \phi_{n_T}, \kappa_{n_T}, X_{n_T}, Y_{n_T}, Z_{n_T}, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{n_T i} \sin H_{n_T i} \sin V_{n_T i} - u_{n_T i} = 0 \\ F_{n_T i}^y(\omega_{n_T}, \phi_{n_T}, \kappa_{n_T}, X_{n_T}, Y_{n_T}, Z_{n_T}, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) := R_{n_T i} \cos H_{n_T i} \sin V_{n_T i} - v_{n_T i} = 0 \\ k = n_T, \quad i = 1, 2, \dots, n_P \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Nestas equações constam

$$3 \times n_P + 5 + 6 \times (n_T - 2)$$

incógnitas, que correspondem a

$$3 \times n_P$$

coordenadas e a

$$5 + 6 \times (n_T - 2)$$

parâmetros de transformação entre referenciais associados a cada um dos teodolitos¹⁴.

Portanto, cada teodolito T_k introduzido, para além de T_1 e T_2 ($k > 2$), vai aumentar em 6 o número de incógnitas ($\omega_k, \phi_k, \kappa_k, X_k, Y_k, Z_k$) e em $2 \times n_P$ o número de equações (do tipo 13).

Em contrapartida, cada ponto visado P_i vai agora dar origem a mais $2 \times n_T$ equações (do tipo 13) e a 3 incógnitas (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}).

A redundância do processo será igual a

$$(2 \times n_T \times n_P) - [3 \times n_P + 5 + 6 \times (n_T - 2)].$$

Durante o *processo de calibração*, e supondo que os pontos podem ser visados por todos os n_T teodolitos, vamos ter de usar um número de pontos maior que¹⁵

$$\frac{6 \times n_T - 7}{2 \times n_T - 3},$$

para que se possam determinar os

$$5 + 6 \times (n_T - 2)$$

parâmetros de transformação e, conjuntamente, as

$$3 \times n_P$$

coordenadas dos n_P pontos visados.

Para aproximações iniciais, para o teodolito T_2 , poderemos também usar os valores dados pelo *Método Expedito* anterior, fazendo $\omega_2^{(0)} = 0$, $\phi_2^{(0)} = 0$, $\kappa_2^{(0)} = 0$, $X_2^{(0)} = b$, $Y_2^{(0)} = 0$ e $Z_2^{(0)} = H$.

Para os restantes teodolitos T_k do sistema, $k = 3, 4, \dots, n_T$, supondo que eles estão verticalizados, podemos considerar as aproximações $\omega_k^{(0)} = 0$ e $\phi_k^{(0)} = 0$ e, supondo que a leitura azimutal de T_k para T_{k-1} , que designamos por $L_{k,k-1}$,

¹⁴Para o primeiro teodolito não há parâmetros de orientação desconhecidos, para o segundo teodolito há cinco ($\omega_2, \phi_2, \kappa_2, Y_2$ e Z_2) e para os $n_T - 2$ restantes há 6 parâmetros por cada um ($\omega_k, \phi_k, \kappa_k, X_k, Y_k$ e Z_k , para $k = 3, 4, \dots, n_T$).

¹⁵Para que seja possível a determinação dos parâmetros e das coordenadas, é necessário que o número de equações disponíveis, $2 \times n_T \times n_P$, seja superior ao número de incógnitas, $3 \times n_P + 5 + 6 \times (n_T - 2)$:

$$\begin{aligned} 2 \times n_T \times n_P &> 3 \times n_P + 5 + 6 \times (n_T - 2) \Leftrightarrow \\ n_P &> \frac{6 \times n_T - 7}{2 \times n_T - 3}. \end{aligned}$$

é de 300 grados, usamos $\kappa_k^{(0)} = 100 - L_{k-1,k} + \kappa_{k-1}^{(0)}$, para $k = 3, 4, \dots, n_T$, em que $L_{k-1,k}$ é a leitura horizontal do teodolito T_{k-1} para o teodolito T_k e se considera que a graduação de todos os limbos azimutais cresce no sentido dos ponteiros do relógio e κ cresce no sentido oposto a esse.

As aproximações iniciais para as coordenadas (X_k, Y_k, Z_k) dos centros dos teodolitos T_k , $k = 3, 4, \dots, n_T$, no referencial associado ao primeiro teodolito, podem ser obtidas pela resolução dos $n_T - 2$ triângulos de vértices nos teodolitos¹⁶ T_1 , T_2 e T_k .

Após a calibração, para determinar as coordenadas de qualquer ponto P_i do objecto, basta apontar, pelo menos, dois dos teodolitos para esse ponto, registar as leituras e aplicar o método anterior, de forma a calcular os valores das suas coordenadas (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) .

A determinação do factor escala, que permitirá passar o referencial R_1 da escala arbitrária para a escala real, é feita da mesma forma que para o *Método Expedido*, utilizando, por exemplo, uma base de invar.

6 Estudo do Problema Inverso

Este problema pode apresentar-se do seguinte modo:

Definido um sistema móvel de medição tridimensional, calibrado, com estações nos pontos $A \equiv (0, 0, 0)$ e $B \equiv (b, 0, H)$, pretendem conhecer-se os valores angulares a introduzir em cada um dos teodolitos para, por intersecção de visadas, se definir um ponto $P \equiv (x, y, z)$.

Para isso, além de se orientarem os dois teodolitos, é necessário conhecer os ângulos azimutais e zenitais¹⁷ H_A , H_B , V_A e V_B . Temos assim:

$$\operatorname{tg} H_A = \frac{y}{x}, \quad (14)$$

onde y tem o sinal de $\sin H_A$ e x tem o sinal de $\cos H_A$ (e deste modo é possível determinar sem ambiguidade o valor do ângulo azimutal H_A);

$$\operatorname{tg} H_B = \frac{y}{b - x}, \quad (15)$$

onde, da mesma forma, y tem o sinal de $\sin H_B$ e $b - x$ tem o sinal de $\cos H_B$;

$$\operatorname{tg} V_A = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (16)$$

¹⁶ Usando, por exemplo, um reflector que é visado pelos três teodolitos que formam o triângulo, e cujas coordenadas são medidas por eles, nos referenciais associados a cada um dos três teodolitos. Note-se que os teodolitos electrónicos têm a possibilidade de medir directamente as coordenadas dos pontos visados, num referencial interno com origem O no centro do teodolito e cujo eixo Ox é o eixo horizontal com a direcção da linha de visada de leitura azimutal nula, Oz tem a direcção da vertical que passa pelo centro do teodolito (no sentido ascendente) e Oy é o eixo perpendicular aos outros dois de modo que o referencial construído seja ortogonal directo.

¹⁷ Note-se que, teoricamente, as leituras azimutais H_A e H_B podem variar entre 0 e 400 grados e as leituras zenitais V_A e V_B podem variar entre 0 e 200 grados.

e

$$\operatorname{tg} V_B = \frac{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}}{z-H}, \quad (17)$$

relações que permitem determinar, sem ambiguidade, os valores dos ângulos V_A e V_B .

7 Bibliografia

Referências

- [1] Alves, A.S. - *Metrologia Geométrica* - Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1996;
- [2] Antunes, A. L. P. - *Sistemas Móveis de Medição Tridimensional* - Apontamentos das aulas de Topografia Aplicada, Coimbra, 1995;
- [3] Forbes, A.B. - *Least-squares best-fit geometric elements*, NPL report DICT 140/89, edição revista, National Physical Laboratory, Teddington, 1991;
- [4] Gonçalves, G.R. - *Orientação Relativa de Dois Teodolitos*, Coimbra, 1994;
- [5] Santos, J.M.F. - *Sistemas Móveis de Medição Tridimensional*, Coimbra, 1995.