Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Matemática IV

Engenharia Civil

Duração: 2h 30m | 18-06-2004

I

1. Seja $P(D)y = y'' - 6y' + 9y$.
   (a) Determine a solução geral da equação diferencial $P(D)y = 1$.
   (b) Mostre que $P(D)[-e^{3t}\ln t] = \frac{e^{3t}}{t^2}$.
   (c) Escreva a solução geral da equação $P(D)y = 1 - 2\frac{e^{3t}}{t^2}$.

2. Prove por indução que, em determinadas condições,
   $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$,
   onde F(s) é a transformada de Laplace de $f(t)$.

3. Seja $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ \\ \sin t & \text{se } t \geq \pi \end{cases}$.
   (a) Escreva f à custa da função de Heaviside $u_\pi(t)$.
   (b) Calcule a transformada de Laplace de f.

II

1. Considere a região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por $x^2 + 2xy + 5y^2 \leq 4$.
   (a) Usando a mudança de variável $\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,
   calcule $\iint_R x + y \; dxdy$.
   (b) Enuncie o Teorema de Green.
   (c) Seja C a curva que admite a parametrização $\begin{cases} x = 2\cos t - \sin t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   Indique o valor de $\int_C (e^{\sqrt{x+10}} - y^2)\, dx + x^2\, dy$.

2. Considere em $\mathbb{R}^3$ o sólido
$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (z + \frac{1}{2})^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, \ z \geq 0\}.$$

   (a) Descreva o conjunto Q em coordenadas cilíndricas.

   (b) Calcule o volume de Q.

3. Seja $G : V \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em que V é um conjunto limitado, fechado, simplesmente conexo, cuja fronteira S admite plano tangente em todos os pontos.

   (a) Exponha o conceito de integral triplo de G em V.

   (b) Seja $G = divF$. Exprima o integral triplo de (a) em função de um integral em S.

   (c) Seja $F = (2xy, 0, 2z(-y + 1))$. Prove que
$$\text{volume de } V = \frac{1}{2} \iint_S F.\hat{n} \ dS$$

   (d) Represente a massa de um corpo de densidade constante ρ através de um integral de superfície.

4. Seja S a parte do parabolóide $z = 2(x^2 + y^2)$ interior ao elipsóide $\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{z^2}{8} = 1$.

   (a) Calcule $\iint_S F.\hat{n} \ dS$ para $F(x, y, z) = (-x, y, -8x^2)$ e S orientada com a normal dirigida para cima.

   (b) Considere a curva L definida por $\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{z^2}{8} = 1 \\ z = 2(x^2 + y^2) \end{cases}$ orientada no sentido positivo e a função vectorial $G(x, y, z) = (e^x, -\frac{8}{3}x^3, -xy + z^3)$.

      i. Calcule o rotacional de G.

      ii. Determine o valor de $\int_L G.dr$.

COTAÇÂO

I

1. 3,5 valores
2. 2,0 valores
3. 1,5 valores

II

1. 3,5 valores
2. 2,5 valores
3. 4,0 valores
4. 3,0 valores