Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

# Exame de Análise Matemática IV

Licenciatura em Engenharia Civil

Duração: 2 horas e 30 minutos 13-6-2005

1. Usando transformadas de Laplace, resolva a equação diferencial

$$y''' + 4y' = 4, \text{ com } y(0) = -1, \ y'(0) = 1 \text{ e } y''(0) = 4.$$

2. Considere uma função $Q$ e um conjunto $D$ nas condições do Teorema de Riemann-Green.

   (a) Mostre que $\displaystyle\iint_D Q_x \, dx \, dy = \int_{fr(D)} Q \, dy.$

   (b) Escreva a área de $D$ em função de um integral curvilíneo em $fr(D)$.

3. Sejam $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x \geq 1\}$ e $C$ a sua fronteira orientada no sentido directo.

   (a) Calcule $K = \displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, usando coordenadas polares e exibindo detalhadamente todos os cálculos.

   (b) Mostre que $\displaystyle\int_C \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dy = K.$

4. Considere o sólido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } x + z \leq 0\}.$$

   Seja $T$ a superfície plana que delimita $E$, orientada com a normal $\hat{n}_1$ exterior a $E$ e $F(x, y, z) = (2y - z, x^3, z)$.

   (a) Calcule $\displaystyle\iint_T F.\hat{n}_1 \, dS.$

   (b) Usando o Teorema da Divergência, calcule $\displaystyle\iint_S F.\hat{n}_2 \, dS$, sendo $S$ a superfície curva que delimita $E$, orientada com a normal $\hat{n}_2$ exterior a $E$.

5. (a) Apresente o conceito de integral de superfície e estabeleça a partir dele o significado geométrico de $\iint_S dS$.

   (b) Considere um pavimento $D \subseteq \mathbb{R}^2$, de área $\alpha$, sobre o qual existe uma cobertura plana e inclinada $S$, com normal dada pelo vector $(a, b, c)$. Relacione a área de $S$ com $\alpha$, utilizando a fórmula de cálculo do integral de superfície.

   (c) Considere agora um pavimento de espessura variável representado pelo subconjunto $E$ de $\mathbb{R}^3$,
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq g(x, y)\}.$$
   Sabendo que o pavimento tem uma densidade definida por $\rho(x, y)$, deduza uma expressão para a sua massa.

6. Sejam
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ e } z \geq 0\},$$
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z \geq 0\},$$
duas superfícies com orientação canónica.

   (a) Faça um esboço da região sólida $Q$, que está situada acima do plano $XOY$ e abaixo, simultaneamente, das superfícies $T$ e $U$.

   (b) Usando coordenadas cilíndricas, apresente uma expressão que permita determinar o volume de $Q$.

   (c) Sendo $F(x, y, z) = (y, -x, \sin z)$, calcule $\iint_T rotF.\, dS$, usando um integral curvilíneo.