

1^a Frequência de Análise Matemática IV

Engenharia Civil

Duração: 2 horas

21-04-2004

I

1. (a) Considere a equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, $a \neq 0$, e suponha que $b^2 - 4ac = 0$. Prove que uma solução da equação é da forma $y_1 = e^{mx}$ e descreva como procederia para construir a partir de y_1 um sistema fundamental de soluções.
(b) Escreva uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes e de ordem mínima que admite x e e^x por soluções particulares.
(c) Determine uma solução particular da equação diferencial $y''' - y'' = 1$.
2. Considere a equação diferencial

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1.$$

- (a) Mostre que $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{x-1}$ são soluções da equação dada.
- (b) Determine um sistema fundamental de soluções para esta equação.
- (c) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2, & x > 1 \\ y(2) = y'(2) = 0. \end{cases}$$

3. Usando transformadas de Laplace resolva a equação diferencial

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ e^t & \text{se } t \geq 1, \end{cases}$$

com condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$.

II

1. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $D = [a, b] \times [c, d]$.

- (a) Construa a definição de

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

- (b) Seja $f \geq 0$. Apresente uma interpretação geométrica do integral duplo definido em (a).

- (c) Suponha que $m \leq f(x, y) \leq M$, para qualquer $(x, y) \in D$. Enquadre o valor de $\iint_D f(x, y) dx dy$.
- (d) Suponha que conhece $f(P_i)$, $i = 1, \dots, n$, com $P_i \in D$. Deduza uma fórmula aproximada para $\iint_D f(x, y) dx dy$.

2. Considere o integral duplo $I = \iint_R f(x, y) dx dy$ escrito na forma

$$I = \int_0^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}y}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_2^{2\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}y}^2 f(x, y) dx dy.$$

- (a) Faça um esboço de R e inverta a ordem de integração.
- (b) Calcule a área de R .

COTAÇÃO

I

1. 5,5 valores
2. 5,5 valores
3. 3,0 valores

II

1. 3,0 valores
2. 3,0 valores