Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

$1^{\underline{a}}$ Frequência de Análise Matemática IV

Licenciatura em Engenharia Civil

PARTE I

Duração: 50 minutos 6-4-2005

Não é permitida a utilização de calculadora.

1. Considere a função de Heaviside

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < a \\ \\ 1\,, & t \ge a \end{cases}.$$

(a) Utilizando a definição de transformada de Laplace, prove que

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s),$$

onde F(s) designa a transformada de Laplace da função $f(t)$.

(b) Considere as funções g e h definidas por

$$g(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le t < 2\pi \\ \\ 0\,, & t \ge 2\pi \end{cases}; \qquad h(t) = \begin{cases} \sin t\,, & 0 \le t < 2\pi \\ \\ 0\,, & t \ge 2\pi \end{cases}.$$

i. Represente g utilizando a função de Heaviside.

ii. Represente h utilizando g.

(c) i. Um corpo de massa M move-se por acção da força $h(t)$ definida na alínea (b) e ocupa no instante t a posição $y(t)$. Sabendo que o corpo partiu no instante $t = 0$ da origem, e que estava parado, prove que $y(t)$ é a solução de

$$\begin{cases} M\frac{d^2y}{dt^2} = (1 - u(t-2\pi))\sin(t-2\pi) \\ \\ y(0) = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}.$$

Observação: Recorde a lei fundamental da Dinâmica $F = Ma$, onde a representa a aceleração.

ii. Integre a equação anterior utilizando transformada de Laplace.

Observação: Note que $\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$

2. (a) Seja $f : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ em que $K = [a,b] \times [c,d]$. Defina $\iint_K f(x,y)dx\,dy$ e interprete geometricamente no caso $f \ge 0$.

(b) Considere $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \le x \le b \;\text{ e }\; \varphi(x) \le y \le \psi(x)\,\}$, onde φ e ψ são funções contínuas.

Utilizando o Teorema de Fubini num rectângulo deduza uma fórmula para calcular $\iint_D f(x,y)dx\,dy$.