Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Matemática IV

Engenharia Civil

Duração: 2h 30m 12-07-2004

I

1. Considere a equação deferencial homogénea de coeficientes constantes $ay''+by'+cy=0$, $a\neq 0$, tal que $b^2-4ac=0$.

   (a) Defina Sistema Fundamental de Soluções.

   (b) Construa um Sistema Fundamental de Soluções da equação dada, justificando a sua resposta.

2. Considere o operador diferencial $P(D)=D^2+\alpha D+\beta$, com α e β pertencentes a $\mathbb{R}$.

   (a) Determine α e β, sabendo que $\cos x$ é uma solução da equação diferencial $P(D)y=0$.

   (b) Nas condições da alínea anterior e sabendo que $\frac{1}{x}$ é solução da equação $P(D)y=f(x)$, determine a solução geral da equação $P(D)y=\sec x-\frac{f(x)}{3}$.

3. Determine as funções reais $x(t)$ e $y(t)$, definidas em $[0,+\infty[$, que satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{cases} x'(t)-y(t)=1 \\ x(t)+y'(t)=0 \\ x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases} .$$

II

1. Seja $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\leq 1,\ y+z\leq 3,\ z-y\leq 3,\ z\geq 0\}$.

   (a) Calcule o volume de E usando integrais duplos.

   (b) Sejam T_1 e T_2 as porções da fronteira de E definidas respectivamente por:

$$T_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=1,\ y+z\leq 3\ z-y\leq 3,\ z\geq 0\}$$

$$T_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z+|y|=3,\ x^2+y^2\leq 1,\ z\geq 0\},$$

   ambas orientadas com normal exterior a E.
   Determine o valor de $\iint_{T_1} F.\hat{n}\ dS+\iint_{T_2} F.\hat{n}\ dS$, onde
   $F(x,y,z)=(\arctan(yz),y^2,z(1-2y))$.

2. Seja C uma curva de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ com origem em $(0,1)$. Numa parametrização de C tem-se $y(t) = \cos t$, com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   Calcule $\displaystyle\int_C y^2\, dx + 2xy\, dy$.

3. Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em que S é uma superfície que admite plano tangente em todos os pontos e que é definido por

$$S = \{(x, y, z) \, : \, (x, y) \in D, \; z = u(x, y)\}.$$

   (a) Exponha o conceito de integral de superfície de f em S.

   (b) A partir da alínea (a) prove que

$$\text{área de } S = \iint_S dS.$$

   (c) Considere um campo de velocidades v contínuo e seja n a normal a S superior e unitária. Interprete fisicamente o fluxo de v através de S, i.e. $\displaystyle\iint_S (v|n)\, dS$.

   (d) Suponha que $v = rotF$. Exprima o fluxo da alínea (c) em função de um integral curvilíneo calculado no bordo de S e relacione-o com o fluxo de v através de uma outra superfície S_1 com o mesmo bordo e orientação contrária à de S.

4. Seja U a porção de superfície de equação $z = y^2$ que está situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e L a sua fronteira orientada no sentido positivo.

   (a) Determine o valor de $\displaystyle\int_L G.dr$, para $G(x, y, z) = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xy\hat{k}$.

   (b) Considere agora $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 1, \; 0 \leq z \leq y^2\}$.
   Escreva um integral duplo iterado que lhe permita calcular a área de U_1.

COTAÇÂO

I

1. 2,0 valores
2. 3,0 valores
3. 2,0 valores

II

1. 3,5 valores
2. 2,0 valores
3. 4,0 valores
4. 3,5 valores