Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

$2^{\underline{a}}$ Frequência de Análise Matemática IV

Engenharia Civil

Duração: 2 horas 02-06-2004

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o sólido

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{3x^2+3y^2} \ \text{ e } \ x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

   (a) Defina Q em coordenadas esféricas.

   (b) Calcule $\iiint_Q z^2 \, dx \, dy \, dz$.

2. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $F = (P, Q, R)$ um campo vectorial de classe C^1 e $\widehat{AB}$ um arco de curva.

   (a) Exponha o conceito de integral curvilíneo de F em $\widehat{AB}$, $\int_{\widehat{AB}} F.dr$.

   (b) Suponha que $\widehat{AB}$ admite tangente em todos os pontos. A partir da fórmula do cálculo do integral curvilíneo mostre que

$$\int_{\widehat{AB}} F.dr = \int_{\widehat{AB}} (F|\tau) \, ds$$

   em que τ é o vector tangente unitário a $\widehat{AB}$.

   (c) Suponha que F é um campo conservativo que representa uma força que actua sobre uma partícula que se desloca em $\widehat{AB}$. Prove que o trabalho realizado por F ao levar a partícula de A para B não depende do caminho percorrido.

3. Seja C a curva simples e fechada que admite a parametrização:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos t - \sin t \\ \\ y = 2\cos t + \sin t \end{cases} , \ t \in [0, 2\pi].$$

   (a) Calcule o integral curvilíneo $\int_C 2y \, dx$.

   (b) Determine a área da região interior à curva C.

4. Sejam $F(x,y,z) = (x^2z, xy^2, 0)$ um campo de vectores em $\mathbb{R}^3$ e L a curva definida por: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ e orientada no sentido positivo.

   (a) Estabeleça o integral simples que lhe permite calcular $\int_L F.dr$.

   (b) Calcule esse integral usando o Teorema de Stokes.

5. Seja $V \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto.

   (a) Utilizando o conceito de integral triplo prove que

$$\text{volume de } V = \iiint_V dxdydz\,.$$

   (b) A partir do Teorema de Gauss deduza uma fórmula para o cálculo do volume em função de um integral na fronteira de V.

6. Seja $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq z \leq 4x\}$.

   (a) Calcule o volume V de E.

   (b) A fronteira de E é composta pela superfície plana T e pela superfície S.
   Supondo a fronteira de E orientada com a normal exterior e
   $F(x,y,z) = (z, 2+4z, 3z+e^{xy})$, prove que

$$\iint_S F.\hat{n}\; dS = 3V - \iint_T F.\hat{n}\; dS \quad .$$

COTAÇÃO

1. 3,5 valores
2. 4,0 valores
3. 3,5 valores
4. 3,5 valores
5. 2,0 valores
6. 3,5 valores