

2^a Frequência de Análise Matemática IV
Licenciatura em Engenharia Civil

PARTE I

Duração: 50 minutos

1-6-2005

Não é permitida a utilização de calculadora.

1. Seja $F : \widehat{AB} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função contínua que representa uma força aplicada no arco de curva \widehat{AB} .

- (a) Mostre que o trabalho W realizado por F ao deslocar uma partícula de A para B se pode representar por $\int_{\widehat{AB}} F \cdot dr$.
- (b) Mostre que $\int_{\widehat{AB}} F \cdot dr = \int_{\widehat{AB}} (F|\hat{t}) ds$, em que \hat{t} representa a tangente unitária à curva.
- (c) Suponha que F é um campo conservativo de potencial f . Mostre que $W = f(B) - f(A)$.
- (d) Considere a lei de Newton que estabelece que a força de atracção entre dois corpos de massa M e m , situados respectivamente na origem e num ponto (x, y, z) , é definida por

$$F(x, y, z) = -\frac{M \cdot m \cdot g}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z), \text{ sendo } g \text{ a constante gravitacional.}$$

Prove que F é um campo conservativo de potencial f com $f(x, y, z) = \frac{M \cdot m \cdot g}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ e estabeleça o valor do trabalho realizado por F ao deslocar uma partícula de $A = (a_1, a_2, a_3)$ para $B = (b_1, b_2, b_3)$.

2. Seja $G : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função contínua em que S representa uma superfície definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = \varphi(x, y)\}.$$

- (a) Suponha que G representa a velocidade de um escoamento. Interprete fisicamente o fluxo de G através de S , $\iint_S (G|\hat{n}) dS$, em que \hat{n} representa a normal a S superior e unitária.
- (b) Seja $G = \text{rot}F$. Exprima o fluxo de G a partir de um integral curvilíneo de F no bordo de S .
- (c) Considere uma superfície T com o mesmo bordo que S mas orientada com a normal inferior.

Relacione o fluxo de G através de S com o fluxo de G através de T .