Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática IV

Engenharia de Materiais e Engenharia Química

Duração: 2 horas e 30 minutos 9-7-2007

1. Consideremos a função vectorial $\vec{r} : [0,2] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com $\vec{r}(u,v) = (2u, u^2 + v, u - v)$.

   (a) Calcule a matriz Jacobiana de $\vec{r}$ no ponto (u,v) e os vectores $\frac{\partial r}{\partial u}(1,1)$ e $\frac{\partial r}{\partial v}(1,1)$.

   (b) Seja S a superfície definida parametricamente por $(x,y,z) = \vec{r}(u,v)$. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano tangente à superfície S no ponto $(2,2,0)$.

   (c) Calcule $\displaystyle\iint_S 4x + 4\, dS$.

2. Considere a região plana $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 \geq y^2 \text{ e } x \leq 3\}$.

   (a) Calcule a área de D.

   (b) Sendo C a curva com orientação *negativa*, que é fronteira da região D, calcule $\displaystyle\int_C < (x, xy) \mid \vec{dr} >$.

3. Considere a função vectorial $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $F(x,y) = (y \cos x + 1, \sin x)$

   (a) Mostre que F é conservativo em $\mathbb{R}^2$, calculando uma função potencial.

   (b) Seja C uma curva de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ que une os pontos $(\frac{\pi}{2}, 3)$ e $(0, y)$.
   Calcule $\displaystyle\int_C < \vec{F} \mid \vec{dr} >$.

4. Calcule o volume do sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\, ,\ z^2 \leq 3(x^2 + y^2) \text{ e } y \geq 0\}$.

5. Seja $\vec{F}(x,y,z) = (x-1)\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$ e T a superfície definida por $z = 4 - y^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

   (a) Calcule $\displaystyle\iint_T \vec{F} \cdot \vec{dS}$, supondo T com orientação canónica.

   (b) Use a alínea anterior para calcular $\displaystyle\int_\gamma < (x^2, z, xy) \mid \vec{dr} >$, sendo γ a curva definida por $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 4 - y^2$, para as duas orientações possíveis de γ.

6. Considere $v(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0)$ a velocidade de escoamento de um fluido em m/s .

   (a) Diga qual a quantidade de líquido que atravessa a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $z \geq 0$, durante um minuto.

   (b) Seja $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\}$. Mostre que $\displaystyle\iint_U < \vec{v} \mid \vec{dS} >= 0$.

Cotações: 1. 5,0 2. 3,5 3. 3,0 4. 2,5 5. 3,5 6. 2,5 .