Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática IV

Engenharia de Materiais e Engenharia Química

Duração: 2 horas e 30 minutos 11-6-2007

1. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com as primeiras derivadas parciais definidas em todo o domínio. Para $z = f(x^2 + y^2, x + y)$, com $x = 2y$, calcule $\dfrac{dz}{dy}(y)$.

2. Considere a região plana $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - 1) \geq 2y^2,\ y \geq 0 \text{ e } x \leq 3\}$ e $K = \displaystyle\iint_D x^2\, dx\, dy$.
   (a) Determine o valor de K.
   (b) Calcule a área de $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^5 - x^4 \geq 2y^2,\ y \geq 0 \text{ e } 1 \leq x \leq 3\}$, fazendo a mudança de variável $\begin{cases} x = u \\ y = u^2 v \end{cases}$.

3. Calcule o volume do sólido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \text{ e } y \geq x\}$.

4. Seja C a curva fechada representada parametricamente por $r(t) = (1 + 2\cos t - \sin t, 2\cos t + \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.
   (a) Determine a recta tangente à curva no ponto $(0, 1)$.
   (b) Calcule o integral curvilíneo $\displaystyle\int_C 2y\, dx$.
   (c) Determine a área da região interior à curva C.

5. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \leq 0\}$
   (a) Determine um vector normal e a recta normal à superfície no ponto $(\sqrt{2}, 1, -1) \in S$.
   (b) Considere a função vectorial $G(x, y, z) = (yz, -xz, 2)$ e a superfície S orientada com normal que aponta no sentido negativo do eixo dos ZZ .
   Transforme o integral $\displaystyle\iint_S < \vec{G} \,|\, d\vec{S} >$ num integral de superfície de uma função escalar.
   (c) Calcule $\displaystyle\iint_S < \vec{G} \,|\, d\vec{S} >$.

6. Sejam $F(x, y, z) = (x^2 z, xy^2, 0)$ uma função vectorial em $\mathbb{R}^3$ e L a curva definida por:
   $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ e orientada no sentido positivo.
   (a) Estabeleça o integral simples que lhe permite calcular $\displaystyle\int_L < \vec{F} \,|\, d\vec{r} >$.
   (b) Calcule esse integral usando o Teorema de Stokes.

Cotações: 1. 2,0 2. 3,0 3. 2,5 4. 4,5 5. 4,5 6. 3,5 .