Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Matemática IV

Engenharia de Materiais e Engenharia Química

Duração: 1 hora e 15 minutos 30-5-2007

1. Considere a região plana $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x \text{ e } x^2+y^2 \leq 2x\}$. Sendo C a curva com orientação *positiva*, que é fronteira da região D, calcule $\int_C x\,dx + (xy)\,dy$:
   (a) através da definição;
   (b) utilizando o Teorema de Green.

2. Considere a superfície $S = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = y^2,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y\}$.
   Calcule a área de S:
   (a) através de um integral curvilíneo;
   (b) através de um integral de superfície;

3. Considere $v(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$ a velocidade de escoamento de um fluido em m/s .
   (a) Diga qual a quantidade de água que atravessa a semi-esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, com $z \geq 0$, durante um minuto. Indique a orientação da superfície que considerar.
   (b) Seja agora $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$. Determine $\iiint_E \operatorname{div} \vec{v}\, dV$:
      i. calculando o integral triplo directamente;
      ii. utilizando o Teorema da Divergência.
      (Se não fez a alínea (a), considere o seu resultado igual a k.)

Cotações: 1. 3 valores; 2. 2,5 valores; 3. 4,5 valores.