

Introdução à Topologia e Espaços quociente

Gonçalo Gutierrez - FCTUC

maio de 2025

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Propriedades de funções e conjuntos	4
3	Classes de equivalência	5
4	Espaços topológicos e funções contínuas	6
5	Espaço topológico quociente	15
6	Cell-complex ou CW-complexo	18
7	Grupos Topológicos e Ações de Grupo	20
8	Homotopia	25
9	Coberturas	28
	Referências	31

1 Introdução

Elaborei este texto para apoiar as aulas de Topologia Algébrica (2023–2025) na UC e os módulos da disciplina com o mesmo nome que lecionei no Mestrado em Matemática Pura na UCV. O objetivo central foi suprir lacunas em Topologia Geral, comuns em turmas de origens académicas variadas.

O conteúdo divide-se na revisão de noções essenciais e no estudo detalhado de espaços quociente, com forte ênfase em exemplos geométricos. Um dos objetivos principais foi o de colocar no texto alguns exemplos ilustrativos, muitos deles geométricos. Adicionalmente, incluíram-se tópicos complementares ao programa, como a introdução aos grupos topológicos.. Trata-se de um texto focado, essencialmente, na componente topológica do curso.

2 Propriedades de funções e conjuntos

Nesta secção vamos rever algumas das principais propriedades de conjuntos e funções que nos são úteis para a formalização de espaço topológico e, principalmente, de espaço topológico quociente, uma das ferramentas principais da Topologia Algébrica.

Começamos por definir imagem e imagem-inversa de conjuntos.

Imagem e Imagem-inversa

Sejam X, Y conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ uma função.

Se $A \subseteq X$, define-se a *imagem* de A por

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A, f(x) = y\} = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\}.$$

Se $B \subseteq Y$, define-se a *imagem-inversa* de B por

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Para $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$ é uma *fibra* de f .

Mais geralmente, temos a decomposição

$$X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y).$$

(Nota: as fibras não precisam de ser conjuntos singulares e, em geral, há fibras vazias.)

Exemplo

Seja $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{x, y, z\}$ tal que $f(a) = f(b) = x$ e $f(c) = y$. Neste caso, as fibras são:

$$f^{-1}(x) = \{a, b\}, \quad f^{-1}(y) = \{c\} \quad f^{-1}(z) = \emptyset.$$

Injetividade e sobrejetividade

- f é *sobrejetiva* se $f(X) = Y$, i.e., se e só se $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.
- f é *injetiva* se $\forall y \in Y$, a fibra $f^{-1}(\{y\})$ é um conjunto singular ou vazio.

Propriedades (esta lista não é extensiva)

1. Se $A \subseteq A'$, então $f(A) \subseteq f(A')$.
2. Se $B \subseteq B'$, então $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$.
3. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
4. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
5. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.
6. $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.
7. $f\left(\bigcup_j A_j\right) = \bigcup_j f(A_j)$.

8. $f\left(\bigcap_j A_j\right) \subseteq \bigcap_j f(A_j)$.
9. $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.
10. $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$.

Exercícios

1. Mostrar as propriedades 5 e 10.
2. Dar contra-exemplos para 3, 4, 6, 8 e indicar condições que substituam a inclusão pela igualdade.
3. Explicar porque é que, em 6, não se pode substituir $f(X)$ por Y .

3 Classes de equivalência

De um modo geral todas as funções podem ser vistas como funções sobrejetivas (substituindo o conjunto de chegada pelo contra-domínio), nesta secção vamos ver que as funções sobrejetivas de domínio X definem todas as classes de equivalências e o contrário é também essencialmente verdade.

Definição 3.1. Uma *relação de equivalência* num conjunto X é um subconjunto $R \subseteq X \times X$ que verifica três propriedades. Quando $(x, y) \in R$, vamos escrever $x \sim y$.

1. $x \sim x$ (reflexiva);
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (simétrica);
3. $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitiva).

Uma *classe de equivalência* é um subconjunto de X que contém todos os pontos equivalentes a um dado $x \in X$:

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\},$$

a classe de equivalência de x .

Proposição 3.2. Se $x \sim y$, então $[x] = [y]$ e vice-versa.

Observação 3.3. As classes de equivalência associadas a uma relação de equivalência formam uma partição de X .

Definição 3.4. Dada uma relação de equivalência $\sim$ em X , ao conjunto de todas as classes de equivalência chama-se *conjunto quociente* e denota-se por

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}.$$

A aplicação $p: X \rightarrow X/\sim$, $p(x) = [x]$, chama-se *projeção*. Esta função é sobrejetiva.

Proposição 3.5. Toda a função sobrejetiva define uma partição e, consequentemente, uma relação de equivalência. Se $f: X \rightarrow Y$ é sobrejetiva, define-se $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. As classes de equivalência são as fibras: $[x] = f^{-1}(\{f(x)\})$.

Observação 3.6. Existe uma identificação entre classes de equivalência e funções sobrejetivas.

Exemplos

1. Em $X \times Y$, a relação $(x, y) \sim (x', y') \iff y = y'$.

As classes de equivalência são os conjuntos $X \times \{y\}$ e o conjunto quociente é o conjunto $X \times Y / \sim \cong Y$ é isomorfo a Y , uma vez que cada classe de equivalência corresponde a um elemento de Y .

$$p : X \times Y \rightarrow X \times Y / \sim \cong Y, \quad p(x, y) = y.$$

Neste caso a projeção corresponde ao que estamos habituados usualmente.

2. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, defini-se $x \sim y$ se $\exists t > 0$ tal que $x = ty$.

As classes de equivalência são as semi-retas abertas com início na origem.

o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim \cong \mathbb{S}^1$. O conjunto $\mathbb{S}^1$ é o que costumamos designar por círculo trigonométrico, ou seja o conjunto de todos os pontos do plano com norma igual a 1. (De modo idêntico vamos definir os conjunto $\mathbb{S}^n$ como subconjuntos de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$p : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim \cong \mathbb{S}^1, \quad p(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Neste caso a projeção corresponde à projeção sobre o círculo trigonométrico.

3. Em $\mathbb{R}^2$, defini-se $x \sim y \iff \|x\| = \|y\|$. O quociente identifica-se com $\mathbb{R}_{\geq 0}$ via $x \mapsto \|x\|$.

De certo modo esta relação de equivalência pode ser vista como uma contra-parte da relação do exemplo anterior.

4. Dados dois conjuntos $A \subseteq X$, podemos definir uma relação de equivalência que identifica todos os pontos de A e deixa os outros inalterados, ou seja:

$$R = A \times A \cup \{(x, x) : x \in X \setminus A\}.$$

Este conjunto quociente designa-se por X/A .

4 Espaços topológicos e funções contínuas

Para chegarmos à noção fundamental de espaços quocientes, vamos recordar a definição de espaço topológico.

Topologia

Definição 4.1. Dado um conjunto X , $\mathcal{T}$ um subconjunto das partes de X é uma *topologia* em X se:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
2. se $A, B \in \mathcal{T}$, então $A \cap B \in \mathcal{T}$ (interseção finita);
3. se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de elementos de $\mathcal{T}$, então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$. (união arbitrária)

Os elementos de $\mathcal{T}$ chamam-se *abertos*. Um subconjunto $A \subseteq X$ diz-se *fechado* se o seu complementar é aberto, isto é, se $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Exemplos

1. $\mathbb{R}^n$ com a topologia euclidiana.

2. Qualquer espaço métrico.

Diz-se que A é aberto se $\forall a \in A \exists \delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$.

3. Espaço vetorial normado, com

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

4. $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. (Em particular: $\mathbb{S}^1$ circunferência, $\mathbb{S}^2$ esfera.)

5. $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. (Em particular: $\mathbb{D}^2$ disco, $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$, que se transforma em $\mathbb{S}^1$ “juntando” os pontos -1 e 1 .)

6. Espaço discreto: $(X, \mathcal{P}(X))$ (isto é, todo o subconjunto é aberto).

Topologia relativa

Definição 4.2. Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e $A \subseteq X$, diz-se que A é um *subespaço* de X com a *topologia relativa*

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}.$$

A esta topologia também se chama topologia de subespaço.

Exemplo

$X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$.

O conjunto $[0, \frac{1}{2}] \subseteq A$ é aberto em A .

Função contínua

Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dois espaços topológicos. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é *contínua* se

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y, \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Igualmente a imagem inversa de um fechado é um fechado.

Exemplo (grosseiro)

Se Y é um conjunto qualquer e $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y\}$, então toda a função

$$f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \{\emptyset, Y\})$$

é contínua, pois $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X$ e $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}_X$.

Homeomorfismo

Uma função $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ é um *homeomorfismo* se é bijetiva, contínua, e a sua inversa é contínua.

Dois espaços topológicos são *homeomorfos* se existe um homeomorfismo entre eles. Dois espaços homeomorfos são, do ponto de vista topológico, a mesma “coisa”. Por exemplo, qualquer segmento de reta (com as extremidades) no plano ou no espaço é homeomorfo a um intervalo fechado em $\mathbb{R}$.

A partir deste ponto sempre que nos referirmos a um espaço topológico genérico X está subentendido que existe uma topologia $\mathcal{T}_X$ sem necessidade de o explicitar.

Funções abertas e fechadas

Definição 4.3. Seja $f: X \rightarrow Y$.

1. Diz-se que f é *aberta* se $\forall A \in \mathcal{T}_X, f(A) \in \mathcal{T}_Y$.
2. Diz-se que f é *fechada* se $\forall A \subseteq X$ fechado, $f(A)$ é fechado.

Proposição 4.4. Se f é um homeomorfismo, então f é aberta.

Exercício

Considere $\mathbb{R}$ munido com a topologia

$$\mathcal{T} = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \} \cup \{ \emptyset, \mathbb{R} \}.$$

1. (a) Dê um exemplo de uma função $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua para esta topologia, mas não contínua com a topologia usual. Será o contrário verdadeiro?
(b) Mostre que a topologia relativa $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \neq \{]q, +\infty[: q \in \mathbb{Q} \} \cup \{ \emptyset, \{\mathbb{Q}\} \}$ e que este conjunto não é uma topologia.
2. Indique explicitamente um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e um qualquer intervalo aberto $]a, b[$. Explique como construir um homeomorfismo, no plano, entre um triângulo e uma circunferência.
3. Mostre que $\mathbb{R}^2$ e uma esfera sem um ponto $\mathbb{S}^2 \setminus \{0, 0, 1\}$ são homeomorfos.
4. Considere $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $p_1(x, y) = x$. Mostre que p_1 é aberta (basta verificar para as bolas abertas) mas não é fechada.

Vizinhança (neighborhood)

Em Topologia Algébrica, a noção de vizinhança e, em especial, de vizinhança aberta é de grande utilidade e é usada frequentemente na demonstração de resultados.

Seja $(X, \mathcal{T}_X)$ um espaço topológico. Diz-se que $V \subseteq X$ é uma *vizinhança* de $x \in X$ se

$$\exists A \in \mathcal{T}_X \text{ tal que } x \in A \subseteq V.$$

Neste caso A é uma vizinhança aberta de x .

Exemplos

1. Em $[0, 1]$, V é uma vizinhança de 0 se $\exists \varepsilon > 0$ tal que $[0, \varepsilon] \subseteq V$. (Por exemplo, $[0, \frac{1}{10}] \cup \{\frac{1}{2}\}$ é uma vizinhança de 0.)
2. Se $\mathcal{T}_X$ é induzida por uma norma, então V é vizinhança de x se e só se $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) = \{y : \|x - y\| < \varepsilon\} \subseteq V.$$

Este é o caso quando estamos no espaço euclidiano de dimensão n , $\mathbb{R}^n$.

Homeomorfismo local

De seguida vamos ver o que são espaços localmente homeomorfos. São espaços, que embora diferentes, quando vistos de “perto” ou localmente parecem iguais. Segue uma definição mais formal.

Definição 4.5. Um *homeomorfismo local* é uma função $f: X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos tal que:

1. $\forall x \in X \exists U \in \mathcal{T}_X$ com $x \in U$ e $f(U) \in \mathcal{T}_Y$;
2. a restrição $f|_U: U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo.

Exemplos

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Basta verificar que qualquer intervalo aberto (de pequena amplitude que contém t) é homeomorfo a um arco de $\mathbb{S}^1$ que contém o ponto $(\cos t, \sin t)$.
2. $\mathbb{R}^2$ é localmente homeomorfo a $\mathbb{S}^2$ e, em geral, $\mathbb{R}^n$ é localmente homeomorfo a $\mathbb{S}^n$.

Observação 4.6. Não existe nenhum homeomorfismo local $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Observação 4.7. A garrafa de Klein $\mathbb{K}$ é localmente homeomorfa (vamos ver o que é mais à frente) a um subespaço de $\mathbb{R}^3$, mas não homeomorfa. A fita de Möbius é homeomorfa a um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Proposição 4.8. *Todo o homeomorfismo é um homeomorfismo local.*

Proposição 4.9. *Um homeomorfismo local é um homeomorfismo se for bijetivo.*

Fecho e fronteira

No nosso contexto, o fecho e a fronteira são de particular importância porque em certas circunstâncias vai ser possível estender funções definidas num conjunto ao seu fecho ou fronteira.

Definição 4.10. 1. O *fecho* de um subconjunto A de X é o menor fechado que contém A e denota-se por $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \bigcap \{ F : A \subseteq F \text{ e } F \text{ é fechado} \}.$$

Além disso,

$$x \in \overline{A} \iff \text{para toda a vizinhança } V \text{ de } x, V \cap A \neq \emptyset.$$

2. Seja $A \subseteq X$. A *fronteira* de A em X define-se por

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \{ x \in X : \forall V \text{ vizinhança de } x, V \cap A \neq \emptyset \text{ e } V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \}.$$

Observação 4.11. A noção de fronteira é relativa ao espaço onde está inserido. Nesse caso escreve $\partial_A X$ para denotar a fronteira de A como subconjunto de X .

Como exemplo disto, vamos considerar os seguintes três espaços

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Então $\partial_{\mathbb{R}^2} A = \emptyset$; $\partial_A A = A$ e $\partial_{\mathbb{S}^1} A = \{(-1, 0), (1, 0)\}$.

Exemplo

Mais à frente vamos considerar que a fronteira tem dimensão menor em uma unidade do que a “superfície” considerada. Por exemplo,

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \quad \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Em particular,

$$\mathbb{D}^1 = [-1, 1], \quad \partial\mathbb{D}^1 = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{D}^2 \text{ (disco)}, \quad \partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1 \text{ (circunferência)}.$$

Espaços de Hausdorff

Em topologia existem várias noções de separação. A mais usualmente usada, e mais “importante”, é a noção de espaço de Hausdorff. De um modo feral os espaços topológicos que vamos usar daqui em diante são espaços topológicos de Hausdorff.

Definição 4.12. Um espaço topológico X é *de Hausdorff* (ou *separado*) se, para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem vizinhanças abertas U de x e V de y tais que

$$U \cap V = \emptyset.$$

Observação 4.13.

1. Todo o espaço métrico é de Hausdorff.
2. Todo o espaço discreto é de Hausdorff.
3. Num espaço de Hausdorff, os conjuntos singulares são conjuntos fechados.
4. Imagens contínuas de espaços de Hausdorff podem não ser de Hausdorff.

Como exemplo desta última observação, podemos considerar os espaços $I = [0, 1]$, $X = \{0, a, 1\}$ com $\mathcal{T}_X = \{X, \emptyset, \{0, a\}, \{1, a\}\}$ e $f: I \rightarrow X$ com $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(x) = a$ para os restantes valores de x .

Espaço conexo

A noção de espaço conexo e, em particular, a noção mais restrita de espaço conexo por caminhos tem um papel central em todo o desenvolvimento da Topologia Algébrica.

Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é *conexo* se não for a reunião de dois abertos disjuntos não vazios.

Um subconjunto $A \subseteq X$ é *conexo* se, sempre que $A \subseteq U \cup V$ com U, V abertos disjuntos, então $A \cap U = \emptyset$ ou $A \cap V = \emptyset$.

Proposição 4.14. Se $A \subseteq X$ é conexo, então $\overline{A}$ é conexo.

Proposição 4.15. Se $f: X \rightarrow Y$ é contínua e $A \subseteq X$ é conexo, então $f(A)$ é conexo.

Definição 4.16. Seja X um espaço topológico. A componente conexa de $x \in X$, C_x é o maior conexo a que x . $C_x := \bigcup\{C : C \text{ é conexo e } x \in C\}$.

A componente conexa pode igualmente definir-se por $C_x := \bigcup\{C : C \text{ é conexo e } x \in C\}$ (prova: exercício).

Exercício 4.17. Define-se uma relação em X do seguinte modo: $x \sim y$ se e só se $y \in C_x$. Mostre que é uma relação de equivalência.

Vamos começar por mostrar que $x \sim y \iff C_x = C_y$.

($\Rightarrow$) $x \sim y \iff y \in C_x$.

Como C_y é o menor conexo que contém y , logo é maior do que C_x , ou seja, $C_x \subseteq C_y$. Mas $x \in C_x \subseteq C_y$ e C_x é o menor conexo que contém x , logo $C_y \subseteq C_x$. Donde concluímos que

$$C_x = C_y.$$

($\Leftarrow$) Se $C_x = C_y$, então por definição $y \in C_y = C_x$, isto significa que $x \sim y$ [$y \in C_x$]. Agora é fácil provar que $\sim$ é uma relação de equivalência:

- **Reflexiva:** $x \sim x \iff C_x = C_x$.
- **Simétrica:** $x \sim y \iff C_x = C_y \iff C_y = C_x \iff y \sim x$.
- **Transitiva:** $x \sim y \wedge y \sim z \iff C_x = C_y \wedge C_y = C_z \Rightarrow C_x = C_z \iff x \sim z$.

Conexo por caminhos

Definição 4.18. Um *caminho* (path) em X é uma função contínua $f: [0, 1] \rightarrow X$. Diz-se que f é um caminho de $x = f(0)$ para $y = f(1)$.

Definição 4.19. Um espaço X é *conexo por caminhos* se

$$\forall x, y \in X \exists f: [0, 1] \rightarrow X \text{ contínua, caminho entre } x \text{ e } y.$$

Exemplos

1. $\mathbb{Q}$ não é conexo; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ não é conexo.
2. O subespaço de $\mathbb{R}^2$,

$$A = \{(0, y) : y \in [0, 1]\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}.$$

é conexo, mas não é conexo por caminhos. Este espaço tem duas componentes conexas.

Observação 4.20.

1. Na maior parte dos exemplos não precisamos distinguir entre as duas noções, conexo e conexo por caminhos. A principal razão para isso acontecer é o seguinte facto: Todo o subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos.
2. Tal como a conexidade (4.15), a conexidade por caminhos também é preservada por funções contínuas.
3. Também se pode definir a componente *conexa por caminhos* de modo semelhante à componente conexa. Neste caso, dois pontos estão na mesma componente se existe um caminho entre eles. A componente conexa por caminhos também define uma relação de equivalência.

Compacidade

Outra das definições mais importantes em Topologia é a de espaço compacto. De certo modo, podemos dizer que a compacidade pretende estender a “conjuntos” infinitas propriedades dos conjuntos finitos. Claro que esta observação é muito pouco rigorosa e serve apenas para dar alguma intuição para a definição de espaço compacto.

Definição 4.21. Um subconjunto $A \subseteq X$ é *compacto* se, para toda a cobertura aberta $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ com $U_i \in \mathcal{T}$, existe um subconjunto finito $F \subseteq I$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in F} U_i.$$

(Toda a cobertura tem uma subcobertura finita.)

Proposição 4.22. Se $A \subseteq X$ é compacto e $f: X \rightarrow Y$ é contínua, então $f(A)$ é compacto.

Teorema 4.23.

1. Todo o subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.
2. Todo o subespaço fechado de um compacto é compacto.

Teorema de Heine–Borel

Em $\mathbb{R}^n$ (com a topologia usual),

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ é compacto} \iff A \text{ é fechado e limitado.}$$

Este resultado é um dos mais importantes da topologia em $\mathbb{R}^n$. A prova de que se um subespaço de $\mathbb{R}^n$ é compacto, então é fechado resulta do teorema anterior; e a prova que é também limitado é relativamente simples. A implicação contrária é mais técnica, mas tendo em conta o número 2 do teorema anterior, é suficiente provar que uma bola fechada (qualquer uma porque são todas isomorfas) é compacta.

Aplicação: imagem de compacto de Hausdorff

Proposição 4.24. Seja $f: X \rightarrow Y$ sobrejetiva, contínua e fechada. Se X é compacto e de Hausdorff, então Y é compacto e de Hausdorff.

Como exemplo das provas que usam a compacidade e as coberturas finitas, vamos ver a prova de que Y é de Hausdorff.

Demonstração. Sejam $y_1 \neq y_2$ em Y . Escolham-se $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Definem-se os conjuntos

$$F_1 = f^{-1}(\{y_1\}) = f^{-1}f(x_1) \quad \text{e} \quad F_2 = f^{-1}(\{y_2\}) = f^{-1}f(x_2).$$

Estes conjuntos são fechados porque f é contínua e fechada, e os conjuntos $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$ são fechados por X ser de Hausdorff.

Como X é compacto (e F_1, F_2 são fechados), F_1 e F_2 são compactos.

Seja $w \in F_1$. Como X é de Hausdorff, para cada $z \in F_2$ existem abertos U_{wz} e V_{wz} tais que

$$w \in U_{wz}, \quad z \in V_{wz}, \quad U_{wz} \cap V_{wz} = \emptyset.$$

Logo, para todo o w

$$F_2 \subseteq \bigcup_{z \in F_2} V_{wz}.$$

Mas F_2 é compacto, pelo que existe uma subcobertura finita:

$$\exists z_1, \dots, z_m \in F_2 \text{ tal que } F_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{wz_i}.$$

Defina-se

$$U_w = \bigcap_{i=1}^m U_{wz_i}, \quad V_w = \bigcup_{i=1}^m V_{wz_i}.$$

Então

$$U_w \cap V_w = \emptyset, \quad F_2 \subseteq V_w.$$

Deste modo, $F_1 \subseteq \bigcup_{w \in F_1} U_w$, logo existe subcobertura finita

$$F_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{w_j}.$$

Defina-se

$$U = \bigcup_{j=1}^n U_{w_j}, \quad V = \bigcap_{j=1}^n V_{w_j}.$$

Então

$$U \cap V = \emptyset, \quad F_1 \subseteq U, \quad F_2 \subseteq V.$$

Seja

$$A = Y \setminus f(X \setminus U), \quad B = Y \setminus f(X \setminus V).$$

Então A e B são abertos (porque f é fechada) e

$$y_1 \in A, \quad y_2 \in B.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A \cap B &= (Y \setminus f(X \setminus U)) \cap (Y \setminus f(X \setminus V)) \\ &= Y \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)) \\ &= Y \setminus f((X \setminus U) \cup (X \setminus V)) \\ &= Y \setminus f(X \setminus (U \cap V)). \end{aligned}$$

Como $U \cap V = \emptyset$, fica

$$A \cap B = Y \setminus f(X) = \emptyset$$

(pois f é sobrejectiva). Logo Y é de Hausdorff.

Por fim, como f é contínua e sobrejectiva e X é compacto, conclui-se que Y é compacto. $\square$

Base

Um subconjunto $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{T}_X$ é uma *base* para a topologia $\mathcal{T}_X$ se todo o elemento de $\mathcal{T}_X$ se pode escrever como união de abertos de $\mathcal{B}_X$. (O conjunto vazio é a união da família vazia por isso não precisa de estar na base.)

Exemplos

1. Na topologia usual de $\mathbb{R}$, uma base é

$$\mathcal{B} = \{]a, b[: a < b, a, b \in \mathbb{R} \} \quad (\text{intervalos abertos}).$$

2. Num espaço métrico, as bolas abertas formam uma base.

De seguida vamos ver algumas técnicas para formar espaços topológicos a partir de espaços existentes. A mais importante para nós vai ser a de espaço quociente (próxima secção), mas quase de tanta importância é a formação de espaços produto.

Topologia produto

Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. À topologia gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{ A \times B : A \in \mathcal{T}_X, B \in \mathcal{T}_Y \}$$

chama-se *topologia produto*.

É suficiente considerar os produtos cartesianos de elementos de uma base de X por uma base de Y .

Exemplo 4.25. Em $\mathbb{R}^2$, uma base é constituída por produtos de intervalos abertos $]a, b[\times]c, d[$. Existem outras bases que geram a mesma topologia. Neste caso a topologia induzida pela métrica, que tem por base as bolas abertas, e a topologia produto, que tem por base os retângulos, são a mesma topologia.

Proposição 4.26. *Seja $\mathcal{T}$ a topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$ em $X \times Y$. Então:*

1. *As projeções $p_X : X \times Y \rightarrow X$ e $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ são contínuas.*
2. *$\mathcal{T}$ é a menor topologia que torna as projeções p_X e p_Y contínuas. [Se $\mathcal{T}'$ é uma topologia em $X \times Y$ tal que $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y : (X \times Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas, então $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.]*

A demonstração desta proposição é um bom exercício para treinar a “manipulação” das propriedades dos conjuntos abertos.

Observação 4.27. A uma topologia com esta característica chama-se *topologia inicial*.

Topologia da união

Sejam X e Y conjuntos disjuntos e $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$ topologias em X e Y . A topologia gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{ A : A \in \mathcal{T}_X \} \cup \{ B : B \in \mathcal{T}_Y \}$$

é uma base para uma topologia $\mathcal{T}$ na união disjunta $X \sqcup Y$. Equivalentemente,

$$\mathcal{T} = \{ A \cup B : A \in \mathcal{T}_X, B \in \mathcal{T}_Y \}.$$

Proposição 4.28.

1. *As inclusões $i_X : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (X \sqcup Y, \mathcal{T})$ e $i_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X \sqcup Y, \mathcal{T})$ são contínuas.*
2. *Se $\mathcal{T}'$ é uma topologia em $X \sqcup Y$ tal que i_X e i_Y são contínuas, então $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, ou seja $\mathcal{T}$ é a maior topologia que torna as duas inclusões contínuas.*

Observação 4.29. A uma topologia com esta propriedade chama-se *topologia final*.

A topologia produto e a topologia da união, embora muito diferentes, podem ser vistas como contra-partes. O mesmo acontece com as topologias inicial e final que vamos definir de seguida.

Topologias inicial e final

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação.

1. Se Y é um espaço topológico, então a menor topologia que torna f contínua chama-se *topologia inicial* e é dada por

$$\mathcal{T}_X = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{T}_Y \}.$$

2. Se X é um espaço topológico, então a maior topologia em Y que torna f contínua chama-se *topologia final*.

$$\mathcal{T}_Y = \{ B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \}.$$

Imersões (embeddings)

Definição 4.30. Se $i: X \rightarrow Y$ é uma função injetiva tal que X tem a topologia inicial (induzida por i), diz-se que i é uma *imersão* (*embedding*).

Observação 4.31. Se i é uma imersão, então X e $i(X)$ são homeomorfos.

Observação 4.32. Se $A \subseteq X$ tem a topologia de subespaço, então a inclusão $i: A \hookrightarrow X$ é uma imersão.

5 Espaço topológico quociente

Tal como entre a topologia produto e a topologia da união, as imersões e os quocientes podem também ser vistas como contra-partes. Ambas têm um papel central na Topologia e na Topologia Algébrica, embora os espaços quocientes tenham um grau de *complexidade* superior.

Definição 5.1. Seja $\sim$ uma relação de equivalência num espaço topológico X . O *espaço topológico quociente* é o conjunto quociente $X/\sim$ munido da topologia final para a projecção

$$p: X \rightarrow X/\sim, \quad p(x) = [x].$$

Observação 5.2. Toda a função sobrejetiva $f: X \rightarrow Y$, munindo Y com a topologia final, define um quociente (no sentido topológico). Diz-se então que f é uma *aplicação quociente*.

Na topologia quociente, um subconjunto $U \subseteq X/\sim$ é aberto se e só se $p^{-1}(U)$ é aberto em X (o mesmo é válido para os conjuntos fechados). Equivalentemente, os abertos de $X/\sim$ são os conjuntos de classes cuja união é um aberto de X .

Exemplo

Sejam $X = \{0, 1, 2, 3\}$ e $\mathcal{T}_X = \{\{0\}, \{2\}, \{0, 2\}, \emptyset, X\}$. Defina-se $x \sim y \iff x$ e y têm a mesma paridade. Então $X/\sim = \{[\text{par}], [\text{ímpar}]\}$ e a topologia induzida é

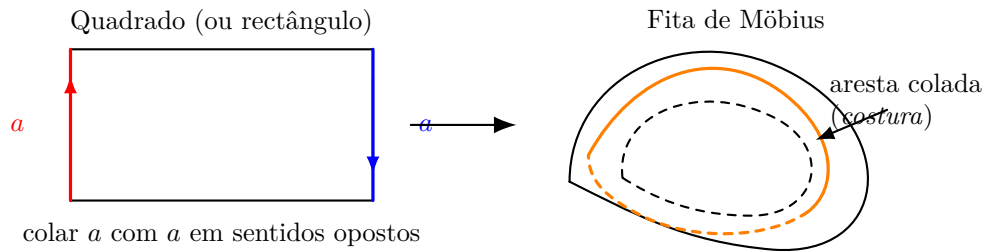
$$\mathcal{T}_{X/\sim} = \{\emptyset, X/\sim, \{[\text{par}]\}\}.$$

Exemplos geométricos (identificações)

Alguns destes exemplos são exemplos fundamentais e que nos vos vão acompanhar ao longo do curso. A formação de espaços quociente é de uma das técnicas principais de formar novos espaços topológicos a partir de subespaços de $\mathbb{R}^n$. Nos exemplos que vamos ver a seguir $I = [0, 1]$.

1. A fita de Möbius $\mathbb{M}$ é o espaço $I \times I / \sim$ com identificação invertida de dois dos lados opostos:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ ou } (x, 0) \sim (1 - x, 1), x \in [0, 1].$$



2. O toro $\mathbb{T}^2$ é $I \times I / \sim$ com a identificação dos lados opostos:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_1 - x_2) \in \mathbb{Z} \text{ e } (y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}.$$

3. A garrafa de Klein $\mathbb{K}$ pode obter-se como quociente de $I \times I$ por identificação de um par de lados opostos com orientação invertida e do outro par com orientação preservada.

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ e } (y_1 - y_2) \in \mathbb{Z} \text{ ou } |x_1 - x_2| = 1 \text{ e } |y_1 + y_2| = 1 \in \mathbb{Z}.$$

4. Espaço projetivo:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \sim, \quad x \sim y \iff x = \pm y.$$

Note-se que $\mathbb{P}^1$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, mas que isso não acontece para o espaço projetivo de dimensões superiores.

O espaço $\mathbb{P}^2$ não pode ser imerso em $\mathbb{R}^3$, apenas em $\mathbb{R}^4$.

Observação 5.3. Não existe nenhuma imersão (embedding) da garrafa de Klein em $\mathbb{R}^3$ (apenas um homeomorfismo local), mas ela pode ser imersa em $\mathbb{R}^4$.

Exercício 5.4. Consideremos o espaço topológico $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, com $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, e a relação de equivalência definida por $(x, t) \sim (y, s)$ se e só se $tx = sy$. Determine $X / \sim$, identificando-o com uma “superfície” conhecida se possível.

Seja

$$X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1].$$

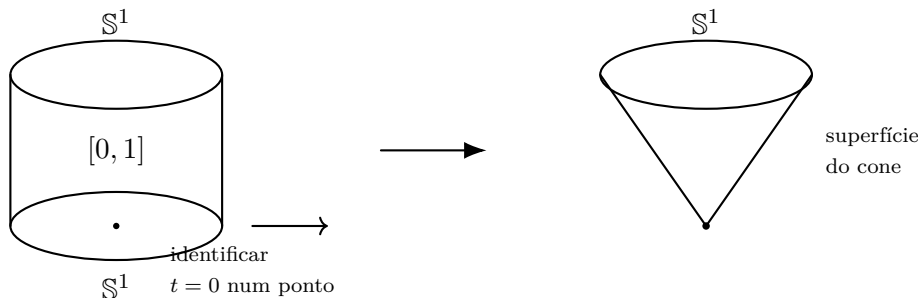
Definimos a relação

$$(x, t) \sim (y, s) \iff tx = sy.$$

Em particular, obtemos

$$(x, t) \sim (y, s) \iff (x, t) = (y, s) \text{ ou } t = s = 0.$$

Interpretação geométrica. O espaço $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ é a superfície lateral de um cilindro. Ao formar o quociente por $\sim$, identificamos todos os pontos do círculo da base correspondente a $t = 0$ num único ponto, obtendo a superfície de um cone.



Uma aplicação natural para visualizar o quociente é

$$F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, t) = tx,$$

onde identificamos $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. A imagem é o disco

$$F(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) = \{tx : t \in [0, 1], x \in \mathbb{S}^1\} = D^2.$$

Além disso, F é constante em cada classe de equivalência de $\sim$, e induz um homeomorfismo

$$(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) / \sim \cong D^2.$$

Proposição 5.5. *Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua e sobrejetiva.*

1. *Se f é aberta, então f é uma aplicação quociente.*
2. *Se f é fechada, então f é uma aplicação quociente.*

Demonstração. É preciso provar que $B \subseteq Y$ é aberto se e só se $f^{-1}(B)$ é aberto.

(i) Suponha que f é aberta e que $f^{-1}(B)$ é aberto. Então

$$B = f(f^{-1}(B)),$$

e como f é aberta, segue que B é aberto.

(ii) Suponha que f é fechada e que $f^{-1}(B)$ é aberto. Então $X \setminus f^{-1}(B)$ é fechado, logo $f(X \setminus f^{-1}(B))$ é fechado.

Finalmente, usando a sobrejetividade de f , tem-se que

$$f(X \setminus f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Portanto $Y \setminus B$ é fechado e consequentemente B é aberto. □

Proposição 5.6. *Se X é compacto, Y é Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ é contínua e sobrejetiva, então f é uma aplicação quociente.*

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ fechado. Como X é compacto, A é compacto, logo $f(A)$ é compacto. Como Y é Hausdorff, conjuntos compactos são fechados; portanto $f(A)$ é fechado. Assim, f é fechada e, pela Proposição 5.5, f é quociente. □

Recordemos o conjunto quociente X/A definido no Exemplo 4 da página 3, em que $A \subseteq X$ e

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x, y \in A.$$

Corolário 5.7. *Se X é compacto e de Hausdorff e $A \subseteq X$ é fechado, então X/A é compacto e de Hausdorff.*

Demonstração. Seja $\pi: X \rightarrow X/A$ a projeção. Ela é contínua e sobrejetiva. Como X é compacto, X/A é compacto.

Resta ver que X/A é Hausdorff. Pela Proposição 4.24 basta mostrar que π é fechada. Se $F \subseteq X$ é fechado, então $\pi(F)$ é fechado se $\pi^{-1}\pi(F)$ é fechado (por definição de quociente).

$$\pi^{-1}\pi(F) = \begin{cases} F, & \text{se } F \cap A = \emptyset, \\ F \cup A, & \text{se } F \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Tanto F como $F \cup A$ são conjuntos fechados em X . □

Ver Exercícios que aqui estão

6 Cell-complex ou CW-complexo

Uma maneira muito eficaz de produzir espaços topológicos a partir de discos de dimensão n é feita através de uniões disjuntas e quocientes feitos de forma sucessiva. Nos exemplos que vamos considerar, a dimensão de um CW-complexo vai ser sempre finita, ainda que o processo de “produzir” CW-complexos possa ser executado para dimensão infinita,

Definição 6.1. Um *CW-complexo* é um espaço topológico formado da seguinte forma:

1. X^0 é um espaço topológico discreto (pontos). (X^0 é o 0-esqueleto; $x \in X^0$ é uma 0-célula.)
2. X^n (o n -esqueleto) obtém-se de X^{n-1} através da colagem de n -células (discos de dimensão n) por aplicações características

$$\varphi_\alpha: \mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{D}^n \longrightarrow X^{n-1}.$$

Escreve-se

$$X^n = X^{n-1} \cup_\alpha \mathbb{D}_\alpha^n,$$

onde na identificação se impõe $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial \mathbb{D}_\alpha^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Donde resulta $X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha e_\alpha^n$, onde e_α^n é um disco aberto de dimensão n .

Exemplos

1. Um espaço discreto é um CW-complexo de dimensão 0. Neste caso X^0 é apenas um conjunto de pontos.
2. Qualquer grafo é um CW-complexo de dimensão 1. Os vertices são o 0-esqueleto, as arestas (eventualmente com *loops*) são o 1-esqueleto.
3. De modo semelhante um poliedro, vértices, arestas e faces, é um CW-complexo de dimensão 2.

4. Uma circunferência pode ser definida identificando as duas extremidades de um segmento de reta ($= \mathbb{D}^1$). Neste caso $\mathbb{S}^1$ é um CW-complexo com uma célula de dimensão 0 (um ponto) a que se uniu uma célula de dimensão 1.

5. De uma modo mais geral, S^n é um CW-complexo que tem 2 células: uma 0-célula e uma n -célula.

Neste caso $X^0 = X^1 = \dots = X^{n-1} = \{*\}$.

A colagem faz-se por uma aplicação $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n \rightarrow X^{n-1} = \{*\}$.)

Ou seja para formar S^n , vamos juntar um ponto ao disco aberto, identificando a fronteira de $\mathbb{D}^n$: $S^n \simeq \mathbb{D}^n / \partial\mathbb{D}^n$.

6. A garrafa de Klein pode ser formada (um Toro também) por 1 vértice, 2 arestas e 1 face.

7. O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ é um CW-complexo que tem 1 célula de cada dimensão.

Observação 6.2. O mesmo espaço topológico pode ter diversas estruturas de CW-complexos.

A característica de Euler está historicamente ligada aos poliedros convexos, onde $V - A + F = 2$. No nosso contexto, Vértices, Arestas e Faces são células de dimensão 0, 1 e 2 e é fácil perceber que este resultado se pode generalizar para células de dimensão n criando um invariante topológico (o que não vamos justificar). Um invariante topológico é uma propriedade que todos os espaços homeomorfos têm, ou não têm, em simultâneo. Neste caso vamos definir a característica de Euler de um espaço topológico CW-complexo e todos os espaços topológicos homeomorfos têm a mesma característica, mas não necessariamente o contrário.

Definição 6.3. A característica de Euler de um CW-complexo X é a diferença entre o número de células de dimensão par e o número de células de dimensão ímpar, $\chi(X)$.

Exemplos

$$\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$$\chi(\mathbb{P}^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$$\chi(\mathbb{K}) = 0, \quad \chi(\mathbb{T}) = 0,$$

onde $\mathbb{K}$ é a garrafa de Klein e $\mathbb{T}$ é o Toro.

Como já vimos, em ambos os casos, eles podem ser definidos com um vértice, duas arestas e uma face.

A fita de Möbius $\mathbb{M}$ tem estrutura de CW-complexo com uma face, três arestas e dois vértices: identificando duas arestas opostas de um quadrado, e portanto os quatro vértices dois a dois. Temos então que $\chi(\mathbb{M}) = 2 - 3 + 1 = 0$. Um cilindro, sem tampas, pode ser construído com a mesma estrutura de CW-complexo (identificações diferentes) e portanto a sua característica de Euler é igual a 0. Se juntarmos as duas tampas (faces), então a característica passa a ser dois. Isto não é surpresa, uma vez que um cilindro (com as tampas) é homeomorfo a qualquer poliedro convexo e a uma superfície esférica e já vimos em ambos os casos que a característica de Euler é 2.

Uma última observação curiosa é que $\chi(\mathbb{D}^n) = 1$, uma célula de dimensão n , uma célula de dimensão $n - 1$ e uma célula de dimensão 1.

7 Grupos Topológicos e Ações de Grupo

Os Grupos Topológicos nem sempre fazem parte de um curso inicial de Topologia Algébrica. Os Grupos Topológicos, ou mais geralmente as Álgebras Topológicas, são uma maneira diferente de olhar para as relações entre uma estrutura algébrica e uma estrutura topológica da que vai ser feita ao longo. Além da complementaridade, a sua introdução nesta secção é também justificada pelo facto de algumas propriedades das ações de grupo ficarem simplificadas se o grupo considerado tiver uma estrutura de grupo topológico compatível com a ação de grupo.

Grupos

Um grupo é um conjunto G equipado com uma operação $+$

$$+ : G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

e um elemento $0 \in G$, tais que:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade)
- $\forall a \in G \exists (-a) \in G : a + (-a) = 0$ (simétrico)
- $\forall a \in G : a + 0 = 0 + a = a$ (neutro)

Exemplos

$(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$.

Grupo topológico

Um grupo topológico é um grupo e um espaço topológico no mesmo conjunto, tal que as aplicações

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(x, y) = x + y, \quad \text{e} \quad i : G \rightarrow G, \quad i(x) = -x$$

são contínuas.

Exemplos

1. $\mathbb{R}$ com a topologia usual e a adição e $\mathbb{R}^+$ a topologia usual e a multiplicação usual são o “mesmo” exemplo. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $f(x) = e^x$ é tanto um isomorfismo de grupos como um homeomorfismo, ou seja estes dois grupos topológicos são isomorfos.
2. $\mathbb{S}^1$ (topologia usual) com o produto complexo:

$$z \cdot w = e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (\text{soma de ângulos}).$$

3. Qualquer grupo com a topologia discreta.
4. O toro com a topologia produto (subespaço de $\mathbb{R}^3$) e produto de grupos:

$$\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

5. O grupo das matrizes invertíveis de ordem n , $GL_n(\mathbb{R})$, com a operação multiplicação de matrizes, e

$$GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2} = \{(a_{11}, a_{12}, \dots)\}.$$

(Exercício difícil.)

Proposição 7.1. *Seja $(G, +)$ um grupo. Então G é grupo topológico se e só se a aplicação*

$$f : G \times G \rightarrow G, \quad f(x, y) = x - y$$

é contínua.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Vamos provar que $i : G \rightarrow G$, $i(x) = -x$, é contínua.

Seja V um aberto tal que $-x \in V$. Então $f^{-1}(V)$ é aberto em $G \times G$ e $(0, x) \in f^{-1}(V)$. Pela definição de topologia produto, existem abertos U_1, U_2 em G tais que $0 \in U_1$, $x \in U_2$ e $U_1 \times U_2 \subseteq f^{-1}(V)$. Mas isso significa que $x \in U_2 \subseteq i^{-1}(V)$ (verificar!). Logo i é contínua.

Como i é contínua, a aplicação

$$h : G \times G \rightarrow G \times G, \quad h(x, y) = (x, -y)$$

é contínua e

$$h^{-1}(U \times V) = U \times i^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

Concluimos assim que $+ = f \circ h$, isto é

$$G \times G \xrightarrow{h} G \times G \xrightarrow{f} G, \quad (x, y) \mapsto (x, -y) \mapsto x - (-y) = x + y,$$

é contínua.

Para provar a outra implicação basta verificar que $f = + \circ h$ e usar um argumento semelhante à segunda parte da outra implicação. $\square$

Observação 7.2. Por vezes, na definição considera-se apenas o caso Hausdorff. Se G não é de Hausdorff, o grupo quociente $G/\{0\}$ é de Hausdorff.

Também podemos considerar a relação de equivalência

$$x \sim y \iff \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}.$$

Exercício

Mostrar que esta duas relação de equivalência são a mesma e que portanto originam tanto um grupo como um espaço quociente, e portanto um grupo topológico quociente. (É preciso verifíco que estas equivalências são verdadeiras – ver o próximo teorema.)

$$\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \iff x + \overline{\{0\}} = y + \overline{\{0\}} \iff x - y \in \overline{\{0\}}.$$

Teorema 7.3. *As funções*

$$L_x : G \rightarrow G, \quad g \mapsto x + g, \quad R_x : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g + x,$$

são homeomorfismos.

Corolário 7.4. $\forall x, y \in G \exists h : G \rightarrow G$ homeomorfismo : $h(x) = y$.

Teorema 7.5. *Seja G um grupo topológico e K a componente conexa de $0 \in G$, ou seja o maior subespaço conexo de G a 0 pertence. Então K é um subgrupo normal de G .*

Demonstração. K é fechado (o fecho de um conexo ainda é conexo). Como K é conexo, para todo $x \in K$, o conjunto $K - x$ é conexo e $0 \in K - x$, logo $K - x \subseteq K$ (maximalidade da componente conexa). Isto implica que $\forall x, y \in K$, $y - x \in K$, ou seja, K é um subgrupo. De modo semelhante, $x + K - x \subseteq K$, e portanto K é normal. $\square$

Definição 7.6. Seja X um espaço topológico e

$$\text{Homeo}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ é um homeomorfismo}\}.$$

Com a composição de funções, $\text{Homeo}(X)$ é um grupo.

Exemplos

Se G é um grupo topológico, então $R_x, L_x \in \text{Homeo}(G)$.

Definição 7.7. Uma ação de grupo num espaço topológico X é um homomorfismo

$$\Phi : G \rightarrow \text{Homeo}(X),$$

e denota-se $\Phi(g)(x)$ por $g \cdot x$, tal que:

1. $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$,
2. $e \cdot x = x$ (e é o elemento neutro de G .)

Quando G é grupo topológico, exige-se ainda que

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

seja contínua.

Proposição 7.8. *Defina-se, para $x, y \in X$,*

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y.$$

Então $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. Reflexiva: $e \cdot x = x$.

Simétrica: se $g \cdot x = y$, então $g^{-1} \cdot y = x$.

Transitiva: se $g \cdot x = y$ e $h \cdot y = z$, então $(hg) \cdot x = z$. $\square$

Definição 7.9. A órbita de x ,

$$O(x) = \{y \in X : x \sim y\} = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

é a classe de equivalência de x .

O espaço das órbitas denota-se por

$$X/G.$$

Observação 7.10. É preciso ter cuidado com a notação porque X/G pode ter significados diferentes, e é preciso ter atenção ao contexto em que a notação é usada.

Por exemplo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pode significar o grupo quociente (onde ambos são vistos como grupos) ou o espaço das órbitas onde $\mathbb{R}$ é um espaço topológico e $\mathbb{Z}$ um grupo que define uma ação. Finalmente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pode simplesmente designar o espaço quociente onde apenas os pontos de $\mathbb{Z}$ são identificados, como vimos num exemplo da página 3.

Proposição 7.11. *A aplicação quociente $p: X \rightarrow X/G$ é aberta.*

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ aberto. Então

$$p^{-1}(p(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A.$$

Como cada aplicação $x \mapsto g \cdot x$ é um homeomorfismo, $g \cdot A$ é aberto, logo a união é aberta. Pela definição de topologia quociente, conclui-se que $p(A)$ é aberto. $\square$

Exemplos

1. Ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ por translações:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + n.$$

A órbita é $O(x) = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$ e

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1.$$

2. Ação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por

$$(n, m) \cdot (x, y) = (x + n, y + m).$$

Então

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2.$$

3. Ação de $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ em $\mathbb{S}^n$ dada por $(k, z) \mapsto kz$. As órbitas têm 2 elementos e

$$\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{P}^n.$$

4. Seja G um grupo topológico e $H \leq G$ um subgrupo. A ação por multiplicação à esquerda $H \times G \rightarrow G$, $(h, g) \mapsto hg$, tem órbitas

$$O(g) = Hg.$$

O espaço das órbitas $G/H = \{Hg : g \in G\}$ é o conjunto das classes laterais. Se H não for um subgrupo normal de G , as ações à esquerda e à direita originam órbitas diferentes.

Exercício

Consideremos $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ e o toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ formado pela rotação do círculo

$$(x - 3)^2 + z^2 = 1$$

no plano XOZ em torno do eixo dos ZZ .

Uma descrição possível de T é:

$$T = \left\{ (x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Vamos definir três ações de $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ em $\mathbb{T}^2$. Em qualquer caso, $1 \cdot (x, y, z) = (x, y, z)$. Para -1 , define-se:

- (a) $(-1) \cdot (x, y, z) = (x, -y, -z)$ (rotação sobre XX);
(b) $(-1) \cdot (x, y, z) = (-x, -y, z)$ (rotação sobre ZZ);
(c) $(-1) \cdot (x, y, z) = (-x, -y, -z)$ (reflexão pela origem).

Mostrar que os espaços quocientes são homeomorfos a $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{T}^2$ e $\mathbb{K}$, respetivamente.

Definição 7.12. Seja G a actuar em X e $x \in X$. O *estabilizador* (ou *grupo de isotropia*) de x é o subgrupo de G

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Define-se ainda o conjunto dos pontos com estabilizador não trivial:

$$\Sigma_G = \{x \in X : G_x \text{ não é trivial}\}.$$

Os pontos com estabilizador não trivial são os pontos singulares da acção.

Proposição 7.13. *Pontos na mesma órbita têm estabilizadores conjugados. Mais precisamente, se $y = g \cdot x$, então*

$$G_y = g G_x g^{-1}.$$

Demonstração. Seja $y = g \cdot x$. Então, para $h \in G$,

$$h \in G_y \iff h \cdot y = y \iff h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \iff (g^{-1}hg) \cdot x = x \iff g^{-1}hg \in G_x \iff h \in g G_x g^{-1}.$$

Logo $G_y = g G_x g^{-1}$. □

Definição 7.14. Uma acção $\Phi: G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ diz-se:

1. *livre* se $\Sigma_G = \emptyset$ (isto é, se não há estabilizadores não triviais);
2. *fiel* (ou *efectiva*) se Φ é injetiva;
3. *propriamente descontínua* se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que

$$g \neq e \implies U_x \cap g \cdot U_x = \emptyset.$$

Exemplo

A acção de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (n, x) \mapsto x + n,$$

é livre, fiel e propriamente descontínua. (Pode tomar-se, por exemplo, $U_x =]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}[$.)

Exemplo 7.15. Considere

$$\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Há uma acção de $\mathbb{Z}_p$ em $\mathbb{S}^3$ dada por

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3, \quad (n, (z, w)) \longmapsto (e^{\frac{2\pi i n}{p}} z, e^{\frac{2\pi i n q}{p}} w),$$

onde p e q são primos entre si..

Ao espaço quociente

$$\mathbb{S}^3 / \mathbb{Z}_p = L(p, q)$$

chama-se *espaço lenticular* do tipo (p, q) .

Esta acção é propriamente descontínua. Para pontos com $z \neq 0$ e $w \neq 0$, podem escolher-se vizinhanças do tipo $B_{\varepsilon_1}(z) \times B_{\varepsilon_2}(w)$ (com $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ suficientemente pequenos) de modo a ficarem disjuntas das suas translações não triviais. Se $z = 0$ pode-se escolher uma vizinhança qualquer de z .

Proposição 7.16. *Seja $\Phi: G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ uma acção e defina-se*

$$N = \{g \in G : \Phi(g) = \text{id}_X\} = \{g \in G : \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

Então existe uma acção efectiva de G/N em X com o mesmo quociente (isto é, $X/G \simeq X/(G/N)$).

Demonstração. Define-se $\tilde{\Phi}: G/N \rightarrow \text{Homeo}(X)$ por

$$\tilde{\Phi}([g]) = \Phi(g).$$

Isto está bem definido porque, se $[g] = [g']$, então $g'^{-1}g \in N$ e $\Phi(g) = \Phi(g')$. É claramente um homomorfismo e é injectivo, logo a acção é efectiva.

Como as órbitas para G e para G/N coincidem, os quocientes também coincidem. $\square$

Proposição 7.17. *Se G é finito e actua livremente sobre um espaço de Hausdorff X , então a acção é propriamente descontínua.*

Demonstração. Como X é de Hausdorff e $G = \{e, g_1, \dots, g_n\}$ é finito, para cada i existe um aberto V_i tal que $x \in V_i$ e $g_i \cdot x \notin V_i$ (e podemos ainda separar x e $g_i \cdot x$ por abertos disjuntos). Escolhendo abertos U_i e W_i com

$$x \in U_i, \quad g_i \cdot x \in W_i, \quad U_i \cap W_i = \emptyset,$$

defina-se

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(W_i).$$

Então U é um aberto contendo x e, para $g \neq e$, tem-se $U \cap g \cdot U = \emptyset$. Logo a acção é propriamente descontínua. $\square$

8 Homotopia

Definição 8.1. Duas aplicações contínuas $f, g: X \rightarrow Y$ são *homotópicas* (denota-se $f \sim g$) se existir uma aplicação contínua

$$H: X \times I \rightarrow Y, \quad (x, t) \mapsto H_t(x),$$

tal que $H_0 = f$ e $H_1 = g$. À função H chama-se *homotopia* (ou *deformação*).

Se $A \subseteq X$ é tal que $H_t|_A$ não depende de t , então f e g são homotópicas *relativamente a* A .

Exemplos

1. $[0, \pi] \times I \rightarrow D^2$, $(x, t) \mapsto (\cos x, (1 - 2t) \sin x)$,

As funções $H_0(x) = (\cos x, \sin x)$ e $H_1(x) = (\cos x, -\sin x)$ são homotópicas relativamente a $\{0, \pi\}$.

2. $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, t) \mapsto H_t(x)$, com

$$H_t(x) = (x, x^{1/t}), \quad t \in (0, 1], \quad \text{e} \quad H_0(x) = \begin{cases} (2x, 0), & x \in [0, 1/2], \\ (1, 2x - 1), & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

As imagens de H_t são o gráfico da função $x^{1/t}$, com exceção de H_0 que é a união de dois segmentos de reta perpendiculares.

3. $\alpha : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$, $\alpha(x) = x$, e $\beta : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$, $\beta(x) = (0, 0)$. Defina-se

$$H : \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2, \quad (x, t) \mapsto (1 - t)x.$$

Então $H_0 = \alpha$ e $H_1 = \beta$. Isto significa que transformámos continuamente um círculo num ponto.

4. $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $\alpha(x) = x$, e $\beta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$,

$$\beta(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

Uma homotopia é

$$H_t(x) = \frac{1}{t} \frac{x}{1 + x}, \quad H_0(x) = \alpha.$$

Transformação contínua do intervalo $[0, +\infty)$ no intervalo $[0, 1]$.

Lema 8.2. *Seja $X = A \cup B$, com A e B fechados em X . Se $f_1 : A \rightarrow Y$ e $f_2 : B \rightarrow Y$ são contínuas e $f_1|_{A \cap B} = f_2|_{A \cap B}$, então a aplicação $f : X \rightarrow Y$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A, \\ f_2(x), & x \in B, \end{cases}$$

é contínua.

Proposição 8.3. *A relação $f \sim g$ define uma relação de equivalência.*

Demonstração.

1. (Reflexiva) $H : X \times I \rightarrow Y$, $H(x, t) = f(x)$ é uma homotopia entre f e f .
2. (Simétrica) Se $f \sim g$ via H , então

$$H'(x, t) = H(x, 1 - t)$$

é uma homotopia entre g e f .

3. (Transitiva) Se $f \sim g$ via H e $g \sim h$ via H' , define-se

$$\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y, \quad \tilde{H}(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H'(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Então $\tilde{H}$ é uma homotopia entre f e h .

□

Proposição 8.4. Se $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas e h é contínua, então

$$f \circ h \sim g \circ h \quad e \quad h \circ f \sim h \circ g$$

(considerando as composições quando fizer sentido).

Definição 8.5. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma *equivalência homotópica* se existir $g : Y \rightarrow X$ tal que

$$f \circ g \sim \text{id}_Y \quad e \quad g \circ f \sim \text{id}_X.$$

Neste caso diz-se que X e Y são *homotopicamente equivalentes* (escreve-se $X \simeq Y$) ou que têm o mesmo *tipo homotópico*.

Observação 8.6. Se X e Y são homeomorfos, então são homotopicamente equivalentes (basta escolher $g = f^{-1}$).

Definição 8.7. Seja $A \subseteq X$. Diz-se que A é um *retrato* (*retraction*) de X se existir uma aplicação

$$r : X \rightarrow A$$

tal que

$$r \circ i = \text{id}_A,$$

isto é, $\forall a \in A, r(a) = a$, onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão.

Se, além disso, $i \circ r \sim \text{id}_X$, então A é um *retrato por deformação* de X .

Um exemplo curioso é o retrato da fita de Möbius $\mathbb{M}$ na circunferência $\mathbb{S}^1$. A fronteira de $\mathbb{M}$ é uma circunferência e deforma-se (achatando) continuamente a fita até ficar apenas um fio.

Como $\mathbb{M}$ é homeomorfo a $\mathbb{P}^2 \setminus \{\star\}$ e $\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{P}^1$, esta construção pode-se generalizar para mostrar que $\mathbb{P}^n \setminus \{\star\}$ tem o mesmo tipo homotópico que $\mathbb{P}^{n-1}$.

Um espaço singular é um retrato de qualquer espaço topológico X . Se além disso for um retrato por deformação, esse espaço diz-se *contrátil*.

Definição 8.8. Um espaço topológico X é *contrátil* se id_X é homotópica a uma aplicação constante, $X \simeq \{\star\}$.

$$\text{id}_X \sim c \quad (\text{com } c(x) = x_0 \text{ para algum } x_0 \in X).$$

Um espaço X é *contrátil* se um ponto é um seu .

Exemplos

Já vimos que existe uma homotopia entre $\text{id}_{\mathbb{D}^2}$ e uma aplicação constante, e portanto $\mathbb{D}^2$ é *contrátil*. Em geral $\mathbb{D}^n$ é *contrátil* e todos os espaços homeomorfos a este. Por exemplo, $\mathbb{S}^n \setminus \{\star\}$ é homeomorfo a $\mathbb{D}^n$. Intuitivamente podemos dizer que um espaço é *contrátil* se não tem “buracos” em nenhuma dimensão. No entanto, o espaço projetivo $\mathbb{P}^n \setminus \{\star\}$ não é *contrátil* porque é homotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-1}$.

9 Coberturas

Definição 9.1. Uma *cobertura* de um espaço topológico X é uma aplicação contínua e sobrejetiva $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que, para cada $x \in X$, existe um aberto U_x (vizinhança elementar) para o qual

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_i \tilde{U}_x^i$$

é uma união disjunta e, para cada i , a restrição

$$p|_{\tilde{U}_x^i} : \tilde{U}_x^i \longrightarrow U_x$$

é um homeomorfismo.

Proposição 9.2. *Uma cobertura é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Sejam $A \subseteq \tilde{X}$ aberto e $x \in p(A)$. Seja ainda U_x a vizinhança elementar de x . Então

$$U_x \cap p(A) = p(p^{-1}(U_x) \cap A) = p\left(\left(\bigsqcup_i \tilde{U}_x^i\right) \cap A\right) = \bigcup_i p(\tilde{U}_x^i \cap A).$$

Como $p|_{\tilde{U}_x^i}$ é um homeomorfismo, $p(\tilde{U}_x^i \cap A)$ é aberto em U_x , logo $U_x \cap p(A)$ é aberto em X . Portanto $p(A)$ é aberto. $\square$

Corolário 9.3. *Uma cobertura é uma aplicação quociente.*

Exemplos

1. $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ é um levantamento.

Basta reparar que para cada t , $p :]t - \pi, t + \pi[\rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-\cos t, -\sin t\}$ é um homeomorfismo.

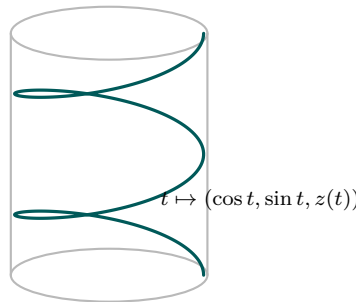
2. Hélice cilíndrica

$$A = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Então $A \rightarrow \mathbb{S}^1$, $(\cos t, \sin t, t) \mapsto (\cos t, \sin t)$ é uma cobertura.

Não é difícil verificar que A é homeomorfo a $\mathbb{R}$ e portanto este exemplo é, essencialmente, igual ao anterior. No entanto, visualmente dá melhor a ideia de cobertura e projeção, uma vez que p é a projeção no plano XOY .

Hélice cilíndrica



3. $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad x \mapsto [x].$

As vizinhanças elementares são qualquer aberto que esteja apenas num hemisfério de $\mathbb{S}^2$. O mesmo é válido para $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{P}^n$.

Um levantamento é maneira de estender uma função contínua a uma, qualquer, cobertura do seu conjunto de chegada.

Definição 9.4. Seja $f : Y \rightarrow X$ contínua. Um *levantamento* de f é uma aplicação contínua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que

$$p \circ \tilde{f} = f.$$

Exemplo

Se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ é dada por

$$t \mapsto (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t) \quad (2 \text{ voltas}),$$

então um levantamento é $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 4\pi t$, considerando a cobertura definida no exemplo anterior.

Proposição 9.5. *Seja Y conexo e sejam $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ dois levantamentos de $f : Y \rightarrow X$ tais que existe $y_0 \in Y$ com $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$. Então $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Demonstração. Defina-se

$$A = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}.$$

Por hipótese, $y_0 \in A$, logo $A \neq \emptyset$.

Mostra-se que A é aberto. Seja $y \in A$ e seja $U_{f(y)}$ uma vizinhança elementar de $f(y)$ tal que

$$p^{-1}(U_{f(y)}) = \bigsqcup_i \tilde{U}_{f(y)}^i.$$

Como $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, existe i tal que $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) \in \tilde{U}_{f(y)}^i$. Para z em

$$\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{U}_{f(y)}^i) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\tilde{U}_{f(y)}^i),$$

temos $p(\tilde{f}_1(z)) = f(z) = p(\tilde{f}_2(z))$ e, como $p|_{\tilde{U}_{f(y)}^i}$ é injetiva (homeomorfismo), conclui-se $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$. Isto mostra que para todo o $y \in A$, existe $\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{U}_{f(y)}^i) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\tilde{U}_{f(y)}^i)$ aberto, a que y pertence e que está contido em A . Logo A é aberto.

De modo análogo, mostra-se que $Y \setminus A$ é aberto: se $y \notin A$, então $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{f}_2(y)$ pertencem a componentes distintas $\tilde{U}_{f(y)}^{i_1}$ e $\tilde{U}_{f(y)}^{i_2}$ (disjuntas), e numa vizinhança de y as imagens por $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ permanecem disjuntas, pelo que $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)$.

Assim, A e $Y \setminus A$ são abertos e disjuntos. Como Y é conexo e $A \neq \emptyset$, temos $A = Y$. Portanto $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. $\square$

Proposição 9.6. *Seja $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho que começa em x_0 e seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma cobertura. Então, para qualquer $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, existe um único levantamento $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ de α que começa em $\tilde{x}_0$.*

Demonstração. A unicidade segue de 9.5 (pois I é conexo).

Vamos agora provar a existência. Para cada $t \in I$, escolhe-se uma vizinhança elementar $U_{\alpha(t)}$ de $\alpha(t)$. Então $\{\alpha^{-1}(U_{\alpha(t)})\}_{t \in I}$ é uma cobertura aberta de I .

Como I é compacto, existe uma subcobertura finita; equivalentemente, existem

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

tais que, para cada j , existe uma vizinhança elementar U_j com

$$\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_j.$$

Em cada intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, escolhe-se o levantamento usando o homeomorfismo local $p|_{\tilde{U}_j^i} : \tilde{U}_j^i \rightarrow U_j$, começando em $\tilde{x}_0$ e colando os levantamentos sucessivos; a unicidade garante que a colagem está bem definida. $\square$

Proposição 9.7. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma cobertura e X conexo por caminhos. Então, para quaisquer $x, y \in X$, existe uma bijeção entre $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$.*

Demonstração. Seja α um caminho de x para y . Para cada $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x)$, seja $\tilde{\alpha}_i$ o levantamento de α que começa em $\tilde{x}_i$ e defina-se

$$\Phi : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y), \quad \Phi(\tilde{x}_i) = \tilde{\alpha}_i(1).$$

Analogamente, usando α^{-1} obtém-se

$$\Psi : p^{-1}(y) \rightarrow p^{-1}(x), \quad \Psi(\tilde{y}_j) = \widetilde{\alpha^{-1}}_j(1).$$

Pela unicidade do levantamento de caminhos, tem-se $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ e $\Phi \circ \Psi = \text{id}$, logo Φ é uma bijeção.

(Aqui α^{-1} representa o caminho oposto, e não a função inversa.) $\square$

Exemplo

Se, em particular, as fibras duma cobertura forem finitas, então este resultado diz que elas têm todas o mesmo número de elementos.

Para a cobertura $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, cada um dos conjuntos $p^{-1}(x)$ tem 2 elementos, que estão nos antípodas de $\mathbb{S}^n$.

Observação 9.8. Deste modo podemos observar que a relação de equivalência definida, no domínio, por uma cobertura define classes de equivalência com o mesmo número de elementos ao contrário do que acontece em geral. Assim recuperamos um resultado que acontece para os grupos quociente, ou outras classes algébricas.

Referências

- [1] . Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002. <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
- [2] .A. Armstrong, *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1983.
- [3] J. Munkres, *Topology*, Pearson New International Edition, 2014.
- [4] . Salgueiro, *Topologia Algébrica*, Departamento de Matemática da FCTUC, 2018.