Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Topologia e Análise Linear

Duração: 2 horas e 30 minutos 6-7-2006

1. Considere a família de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{[0, a[\, : \, a \in \mathbb{R}, a > 0\} \cup \{\emptyset, [0, +\infty[, \mathbb{R}\}$.
   (a) Verifique que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.
   (b) Determine a fronteira e o fecho do conjunto $A = \{-1, 1\}$.
   (c) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço conexo.
   (d) Será que a topologia $\mathcal{T}$ é induzida por uma métrica?

2. (a) Defina espaço topológico compacto.
   (b) Prove que todo o subespaço fechado de um espaço topológico compacto é compacto.
   (c) Mostre que todo o subespaço compacto de um espaço topológico separado (=Hausdorff) é fechado.
   (d) Prove que se (X, d) é um espaço métrico ilimitado, então não é compacto.
   (e) Seja $[a, b]$ um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Construa um homeomorfismos entre $[0, 1]$ e $[a, b]$, considerados como subespaços de $\mathbb{R}$ com a topologia usual.
   (f) Sabendo que $[0, 1]$ é compacto, conclua das alíneas anteriores que $A \subseteq \mathbb{R}$ é compacto se e só se é fechado e limitado.

3. O espaço vectorial real $\mathcal{L}([-1, 1])$ das funções limitadas de $[-1, 1]$ em $\mathbb{R}$ é um espaço normado com a norma definida por $\|f\| = |f(0)| + \sup\{|f(t)| \, : \, t \in [-1, 1]\}$.
   (a) Prove que a norma $\|.\|$ é equivalente à norma do supremo em $\mathcal{L}([-1, 1])$.
   (b) Averigúe se a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é absolutamente convergente no espaço normado $(\mathcal{L}([-1, 1]), \|.\|)$, com $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{se } x \notin]1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \end{cases}$.
   (c) Explique porque é que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ não é convergente.

4. Consideremos o espaço vectorial real l_2 e o operador linear $T : l_2 \to \mathbb{R}$, para o qual se define $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2^n}}\, x_n$.
   (a) Enuncie o Teorema de Representação de Riesz.
   (b) Verifique se T é um operador limitado, e em caso afirmativo calcule a sua norma.
   (c) Mostre que $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l_2 \, : \, x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2^n}} x_n\}$ é um subespaço fechado de l_2.

Cotação: **1.** − 5,0 ; **2.** − 6,0 ; **3.** − 4,5 ; **4.** − 4,5 .