Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
TPC de Topologia e Análise Linear
3º ano da Licenciatura em Matemática
Entregar até dia 5 de Abril de 2006

Definição Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dois espaços topológicos. Uma função $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ é *sequencialmente contínua* se sempre que uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x em $(X, \mathcal{T}_X)$, então $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(x)$ em $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

1. Considere a função $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ entre espaços topológicos. Mostre que se $(X, \mathcal{T}_X)$ é um espaço de Fréchet e f é sequencialmente contínua, então f é contínua.

   [Recorde que f é contínua sse para todo o $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.]

   Nota: A implicação contrária verifica-se sempre.

2. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia co-numerável

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus A \text{ é numerável ou } A = \emptyset\}$$

   (a) i. Mostre que se $(x_n)_n \to x$, então $\exists p \, \forall n \geq p \; x_n = x$.

   ii. Verifique que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é de Fréchet.

   iii. Dê um exemplo de uma função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ sequencialmente contínua, mas não contínua.

   (b) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é um espaço separado, apesar de cada sucessão ter no máximo um limite.

   Nota: A implicação contrária é verdadeira.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
TPC de Topologia e Análise Linear
$3^{\underline{o}}$ ano da Licenciatura em Matemática
Entregar até ao dia 9 de Maio

Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos não vazios. Consideremos em $X \times Y$ a métrica

$$\begin{array}{rcl} d : (X \times Y) \times (X \times Y) & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & \max\{d_1(x, x'), d_2(y, y')\} \end{array}$$

1. Prove que $p_X : (X \times Y, d) \to (X, d_1)$ é uma aplicação uniformemente contínua.

2. Mostre que a topologia induzida em $X \times Y$ por d é a topologia produto.

3. Mostre que uma sucessão $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em $X \times Y$ converge para (x, y) se e só se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x em (X, d_1) e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y em (Y, d_2).

4. Prove que o espaço métrico $(X \times Y, d)$ é completo se e só se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços completos.

5. Mostre que se as métricas d_1 e d_2 são induzidas por normas, então d também é induzida por uma norma.

Nota: O Exercício 2 não é obrigatório, desde que o seu resultado não seja utilizado nos outros exercícios, nomeadamente no Exercício 3.

[Os restantes trabalhos de casa foram retirados das folhas de exercícios.]

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Sugestão de resolução do 3º trabalho de Topologia e Análise Linear

1. Uma função $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ é contínua se e só se para todo o subconjunto A de X se tem $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

   Seja $y \in f(\overline{A})$. Isto significa que existe $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = y$. Como X é um espaço de Fréchet, existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Por hipótese f é sequencialmente contínua, e portanto $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x) = y$. Ou seja y é o limite de uma sucessão em $f(A)$, o que implica que $y \in \overline{f(A)}$.

2. (a) i. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para x em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Consideremos o conjunto $A := \{x_n : n \in \mathbb{N} \text{ e } x_n \neq x\}$. Como A é numerável, $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto e portanto é uma vizinhança de x, uma vez que $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Da definição de convergência, vem que

$$\exists p \forall n \geq p \; x_n \in \mathbb{R} \setminus A \;\Leftrightarrow\; \exists p \forall n \geq p \; x_n \notin A \;\Leftrightarrow\; \exists p \forall n \geq p \; x_n = x.$$

   ii. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em A. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, então, pela alínea anterior, x é um elemento da sucessão e portanto $x \in A$. Se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ for um espaço de Fréchet, então $\overline{A} = A$. Mas em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, se A é um conjunto não numerável de $\mathbb{R}$, $\overline{A} = \mathbb{R}$. Temos assim que por exemplo para $A = [0, 1]$, $\overline{A} = \mathbb{R}$, mas não existe nenhuma sucessão em A que converge para $x \notin A$.

   iii. Sejam $(Y, \mathcal{T}_Y)$ um espaço topológico qualquer, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para x. Tem-se então que

$$\exists p \forall n \geq p \; x_n = x \;\Rightarrow\; \exists p \forall n \geq p \; f(x_n) = f(x).$$

   É assim claro que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$. Ou seja qualquer função de domínio $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é sequencialmente contínua.
   Basta encontrar uma função f de domínio $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ que não seja contínua. Por exemplo para $(Y, \mathcal{T}_Y) := (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ [topologia discreta] a função identidade, $f(x) = x$, de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ não é contínua, mas é sequencialmente contínua.

   (b) Queremos mostrar que

$$(\exists x, y \in \mathbb{R},\, x \neq y)\,(\forall A, B \in \mathcal{T})[x \in A, y \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset].$$

   De facto se A e B são abertos diferentes do vazio, então $A = \mathbb{R} \setminus N$ e $B = \mathbb{R} \setminus P$, com N e P conjuntos numeráveis. É assim imediato que $A \cap B = \mathbb{R} \setminus (N \cup P)$ é o complementar de um conjunto numerável e portanto é diferente do vazio.