

# Notas de Teoria da Votação

Gonçalo Gutierres da Conceição

Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade de Coimbra  
2006



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Sistemas de representação proporcional</b>	<b>1</b>
1.1	Método da média mais alta ou Método d'Hondt . . . . .	3
1.2	Método do número uniforme . . . . .	7
1.3	Métodos não proporcionais . . . . .	8
1.4	Exercícios . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Medição de Poder (Sistemas de votação ponderada)</b>	<b>11</b>
2.1	Índice de poder . . . . .	12
2.2	O Conselho de Segurança da ONU . . . . .	13
2.3	Exercícios . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Procedimentos eleitorais</b>	<b>17</b>
3.1	Métodos majoritários . . . . .	18
3.2	Métodos posicionais . . . . .	18
3.3	Exercícios . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Geometria Eleitoral</b>	<b>23</b>
4.1	Representação Triangular . . . . .	23
4.2	Quatro candidatos . . . . .	26
4.3	Exercícios . . . . .	27
4.4	Métodos posicionais . . . . .	29
4.5	O segmento dos resultados . . . . .	30
4.6	Exercícios . . . . .	32
<b>5</b>	<b>O problema inverso</b>	<b>36</b>
5.1	Incongruências . . . . .	38
5.2	Exercícios . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Paradoxos eleitorais</b>	<b>40</b>
6.1	Teorema de Arrow . . . . .	40
6.2	Contagem de Borda . . . . .	42
6.3	Exercícios . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Estratégias</b>	<b>44</b>
7.1	Voto estratégico . . . . .	45
7.2	Eleições Presidenciais . . . . .	46
7.3	Exercícios . . . . .	48
	<b>Referências</b>	<b>49</b>



# 1 Sistemas de representação proporcional

Os sistemas de representação proporcional foram criados como oposição aos sistemas maioritários. Nos sistemas maioritários só interessa quem é o vencedor das eleições e os votos obtidos pelos outros concorrentes são ignorados. Mas será isso justo? Em alguns casos, é evidente que sim. Por exemplo, não nos passa pela cabeça ter mais do que um Presidente da República. Noutros casos, como na eleição do parlamento, parece razoável ter um sistema que não ignore a opinião dos partidos minoritários.

Os sistemas de representação proporcional são sistemas usados para distribuir *proporcionalmente* um certo número de mandatos por diversas listas. Mais geralmente, o mesmo tipo de métodos pode ser usado em outras situações, que não eleições, onde seja preciso distribuir uma quantidade de unidades por vários grupos respeitando uma determinada proporcionalidade.

Existem vários métodos de fazer essa distribuição, no entanto nas eleições políticas no nosso país e na generalidade das democracias ocidentais o método usado é o método da média mais alta ou método d'Hondt, que deve o seu nome ao jurista Belga Victor D'Hondt(1841-1901), que foi Professor de Direito na Universidade de Gent.

Como exemplo, vejamos algumas das situações em que este método se usa.

- Eleição dos deputados à Assembleia da República, Assembleias Regionais dos Açores e da Madeira, Vereadores Municipais, ...
- Cálculo do número de deputados eleito em cada círculo eleitoral, de acordo com o número de eleitores inscritos no respectivo círculo.
- Eleição dos membros do Conselho Fiscal da Associação Académica de Coimbra e, em geral, de vários tipos de associações.

Antes de se começar a utilizar o método d'Hondt, outros métodos foram usados para distribuir *quantidades* proporcionalmente.

O mais natural dos métodos consiste em determinar o número de eleitores por mandato ( $U$ ), dividindo o número total de votos pelo número de mandatos. Depois divide-se os votos de cada lista por  $U$  e atribui-se a cada partido a parte inteira deste valor. Se não forem distribuídos todos os lugares, então os restantes lugares são atribuídos às listas que tiverem uma parte decimal mais alta.

Para perceber melhor como funciona este método, vejamos um exemplo. Consideremos a seguinte eleição com três listas concorrentes, 100 eleitores e onde existem 10 mandatos por distribuir. Neste caso é imediato concluir que cada 10 eleitores têm direito a eleger 1

mandato ( $U = 10$ ). O problema consiste em saber o que fazer no caso em que as listas não têm resultados múltiplos de 10, o que é o mais normal.

	votos	votos/10	p.inteira	p.decimal	mandatos
A	43	4,3	4	0,3	4
B	43	4,3	4	0,3	4
C	14	1,4	1	0,4	2
Total	100	10	9	1	10

Resulta assim que as listas A e B elegeriam 4 mandatos cada uma e a lista C elegeria 2. Este método parece em geral bom, pois é fácil e a lista menos votada foi favorecida na atribuição do último mandato, o que normalmente é considerado positivo<sup>1</sup>.

No entanto este método falha numa regra básica: se o número total de mandatos aumentar, então o número de mandatos de cada uma das listas não pode diminuir.

Voltemos ao mesmo exemplo e consideremos agora que o número de mandatos a eleger é 11. Sendo assim, o número de eleitores por mandato é  $U = 100/11 \simeq 9,09$ .

	votos	votos/ $U$	p.inteira	p.decimal	mandatos
A	43	4,73	4	0,73	5
B	43	4,73	4	0,73	5
C	14	1,54	1	0,54	1
Total	100	11	49	1	11

O ponto a salientar é que com a mesma votação e aumentado o número de mandatos de 10 para 11, a lista C perdeu um lugar. Este argumento foi aliás decisivo para que este procedimento deixasse de ser usado nos Estados Unidos para a distribuição do número de lugares no congresso pelos diversos Estados. O Paradoxo que acabámos de descrever foi baptizado de Paradoxo do Alabama porque em 1881 um aumento de um lugar no congresso dos EUA teria significado a perda de um lugar para o estado de Alabama. A partir dessa data passou a ser usado o método d'Hondt, como é conhecido na Europa, ou método de Jefferson, pois foi de facto Thomas Jefferson o primeiro a sugeri-lo. Na lei eleitoral Portuguesa este método é referido como sendo o método d'Hondt, e por isso é essa a designação usada neste texto.

<sup>1</sup>Outros factores, como a existência de vários círculos eleitorais, têm tendência a prejudicar os pequenos partidos.

## 1.1 Método da média mais alta ou Método d'Hondt

Como já foi dito anteriormente, o método d'Hondt é o método que é usado nas eleições de representação proporcional em Portugal. No Artigo 16<sup>o</sup>, a Lei Eleitoral explica qual é o procedimento.

Excerto da Lei Eleitoral para a eleição da Assembleia da República.

Artigo 16<sup>o</sup>

### Critério de eleição

A conversão dos votos em mandatos faz-se de acordo com o método de representação proporcional de Hondt, obedecendo às seguintes regras:

- a) Apura-se em separado o número de votos recebidos por cada lista no círculo eleitoral respectivo;
- b) O número de votos apurado por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo;
- c) Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os termos da série;
- d) No caso de restar um só mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

A lei eleitoral fornece uma boa descrição do que é o Método d'Hondt, mas não especifica a melhor maneira de o aplicar. De seguida vão ser explicados dois algoritmos para calcular o número de mandatos eleitos por cada lista segundo o método d'Hondt. O primeiro segue os passos que são descritos na Lei Eleitoral.

#### Algoritmo A

Depois de apurados os resultados de uma eleição, procede-se do seguinte modo para os mandatos por diferentes listas: (ver exemplo em baixo)

1. Constrói-se uma tabela em que cada linha corresponde a uma lista e cada coluna aos números inteiros 1, 2, 3, ... ;
2. Na primeira coluna escreve-se o número de votos de cada uma das listas, o primeiro mandato é atribuído à lista mais votada;

3. Na segunda coluna da linha correspondente a essa lista, escreve-se o quociente entre o número de votos dessa lista e 2.
4. O próximo mandato é atribuído à lista com maior valor na última coluna preenchida;
5. Acrescenta-se mais um valor a essa linha, sendo esse valor o quociente entre o número de votos dessa lista e número da coluna a ser preenchida.
6. Repetem-se os passos 4 e 5 até distribuir todos os mandatos.

**Exemplo**

Consideremos uma eleição para atribuir 6 mandatos e a que concorreram três listas, a lista A que teve 542 votos, a lista B 458 votos e a lista C 171 votos.

listas	1	2	...
A	542		
B	458		
C	171		

1. A
- 2.
- 3.
- ...

listas	1	2	...
A	542	$542/2=271$	
B	458		
C	171		

1. A
2. B
- 3.
- ...

- O primeiro mandato pertence à lista mais votada (2.).
- À linha da lista A acrescenta-se o valor  $542/2$  (3.), que é inferior a 458, e portanto o segundo mandato pertence a B (4.).

listas	1	2	3	4
A	542	271	$180,6(6)$	$542/4=135,5$
B	458	229	$229/3=76,3(3)$	
C	171			

1. A
2. B
3. A
4. B
5. A
6. C

O último mandato pertence à lista C.

Em resumo, a lista A obteve três mandatos, a lista B dois mandatos e a lista C apenas um.

**Algoritmo B**

Este segundo algoritmo é muito mais eficiente quando o número de mandatos a eleger é elevado. É de facto, um algoritmo deste tipo que é utilizado para fazer os programas que calculam os deputados eleitos por cada partido nas eleições legislativas, por exemplo. Nos dias de eleições, todos nós nos lembramos de saber em *tempo real* o número de deputados que corresponde a cada partido, o que só pode ser feito com o auxílio de computadores.



O algoritmo anterior é, por outro lado, mais fácil de compreender por pessoas com poucos conhecimentos matemáticos, e por isso usado mais usualmente.

Se voltarmos ao exemplo anterior, vemos que o número de votos necessário para eleger um mandato foi de 171, que correspondeu ao sexto mandato eleito. Se pudermos *adivinhar* esse número, bastar-nos-à dividir o número de votos por esse número para ficar a saber o número de mandatos da cada lista. Como não é fácil determinar à partida esse número, o que fazemos é calcular uma aproximação.

Sejam  $M$ ,  $T$ ,  $U$  e  $V$  os seguintes números:

- $M$  -  $n^{\circ}$  de mandatos a eleger;
- $T$  -  $n^{\circ}$  total de votos (se os resultados estiverem em %, considera-se  $T = 100\%$ );
- $U = \lfloor \frac{T}{M+1} + 1 \rfloor$ , i.e.  $U$  é parte inteira do número  $\frac{T}{M+1} + 1$ ;
- $V$  -  $n^{\circ}$  de votos de uma certa lista.

O valor  $U$  representa um número votos suficiente para eleger um mandato, ele pode no entanto não ser necessário. Portanto, na prática, procede-se do seguinte modo.

1. O número de mandatos de cada lista é a parte inteira da fracção  $\frac{V}{U}$  (os arredondamentos são feitos por defeito).
2. Se houver mandatos ainda por distribuir, procede-se como no **Algoritmo A** para apurar os mandatos restantes.

Aplicando este método ao exemplo anterior, teríamos  $M = 6$ ,  $T = 542+458+171 = 1171$  e  $U = \lfloor \frac{1171}{7} + 1 \rfloor = \lfloor 167,29 \rfloor = 167$ .

Neste caso, o ponto 1 do algoritmo seria suficiente para determinar todos os mandatos, uma vez que 167 é inferior a 171, que vimos anteriormente ser o número correcto. Verifiquemos as contas.

$$\left\lfloor \frac{542}{167} \right\rfloor = [3, 25] = 3 \quad \left\lfloor \frac{458}{167} \right\rfloor = [2, 74] = 2 \quad \left\lfloor \frac{171}{167} \right\rfloor = [1, 02] = 1$$

Como já sabíamos, a lista A elege 3 mandatos, a lista B elege 2 e a lista C elege 1.

Em geral o valor  $U$  é superior ao valor que é realmente suficiente para eleger um mandato, e portanto podem ficar mandatos por eleger. No entanto, quando o número de listas concorrentes é pequeno (como neste exemplo), acontece com frequência que o valor de  $U$  é suficiente para determinar todos os mandatos.

Como ficou dito o Algoritmo B é mais adequado se o número de deputados a eleger for grande. Como o maior círculo eleitoral das eleições legislativas é o de Lisboa, vamos calcular

o número de deputados eleito por cada um dos partidos nesse círculo eleitoral nas eleições realizadas em 2005.

O número de votos expressos válidos, i.e. excluindo os brancos e os nulos foi de  $T = 1148599$  e o número de mandatos eleitos é  $M = 48$ . Temos assim que:

$$U = \left[ \frac{114599}{49} + 1 \right] = [23441, 8] = 23441 .$$

De seguida apresentamos os resultados das eleições. Incluímos apenas um dos partidos com menos do que 23441. Se ele não eleger nenhum deputado, ou eleger o último, então nenhum dos outros precisa de ser considerado.

partidos	PS	PPD/PSD	PCP-PEV	B.E.	CDS-PP	PCTP/MRPP	Total
votos	523537	280697	115709	103944	97659	10985	
votos/ $U$	22,33	11,97	4,94	4,43	4,17	0,47	
mandatos	22	11	4	4	4	0	45

Como o número de mandatos a eleger é 48, ficam ainda três por distribuir. Vamos então proceder agora como no primeiro algoritmo.

PS	PPD/PSD	PCP-PEV	B.E.	CDS-PP	PCTP
22	11	4	4	4	0
$\frac{523537}{23} = 22762,5$	$\frac{280697}{12} = 23391,4$	$\frac{115709}{5} = 23141,8$	$\frac{103944}{5} = 20788,8$	$\frac{97659}{5} = 19531,8$	10985
	$\frac{280697}{13} = 21592,1$	$\frac{115709}{6} = 19284,8$			
23	12	5	4	4	0

Desta tabela sai que os três últimos deputados foram eleitos pelo PSD, pelo PCP-PEV e pelo PS, por esta ordem.

Existe a ideia geral de que se dois partidos se coligarem, então terão mais hipóteses de eleger deputados. Isso é de facto verdade, como vamos ver de seguida.

**Resultado 1** *Numa eleição em que é usado o Método d'Hondt, se uma coligação de partidos tem tantos votos quanto a soma dos votos de cada um deles, então temos o seguinte.*

1. *O número de deputados eleitos por uma coligação de dois partidos é superior em uma unidade ou igual à soma dos deputados eleitos por cada um dos partidos, se considerados separadamente.*
2. *Uma coligação de  $n$  partidos elege no máximo mais  $n - 1$  deputados do que a soma dos deputados eleitos por cada um dos partidos, mas não pode eleger menos.*

O que este resultado diz é o Método d'Hondt favorece as coligações. Essa é uma das vantagens apontadas para este método por alguns autores. Claro que do ponto de vista Matemático partimos do pressuposto que um eleitor que votaria num partido, votaria numa coligação em que este estivesse envolvido, o que nem sempre é verdade.

### Notas

1. Existem outros algoritmos para aplicar o Método d'Hondt. Aqui foram apresentados apenas dois dos mais simples.
2. Nas eleições políticas em Portugal, em caso de empate é favorecido o partido menos votado. Essa é uma regra de desempate, mas não pertence efectivamente ao Método d'Hondt.

## 1.2 Método do número uniforme

A principal característica deste método é facto do número de mandatos não ser fixo. Ou seja, este método respeita a proporcionalidade mas o número de mandatos a dividir pelas listas concorrentes não é fixado anteriormente. Neste caso o que é previamente fixado é o número de votos necessário para eleger um mandato. Deparamos-nos com este método no nosso dia a dia em coisas que não têm nada a ver com eleições, mas em que o princípio é o mesmo. Por exemplo, quando um supermercado ou uma gasolinera lança um cartão de pontos e nos diz que por cada 5 euros ganhamos 1 ponto no nosso cartão, o que está a fazer é a usar este método. Obviamente, o número de pontos que a totalidade dos consumidores pode ganhar não está fixado à partida. Quanto mais, melhor ...

Este método funciona do seguinte modo.

1. Fixa-se um valor uniforme  $U$ .
2. O número de mandatos de cada lista é a parte inteira do quociente entre o número de votos dessa lista e o valor uniforme  $U$ .

Em eleições, este método é por vezes usado para determinar o número de deputados eleitos em cada círculo eleitoral de uma eleição representativa. Obviamente, este método tem o inconveniente de fazer com que o número de deputados nessa assembleia seja variável. Isso foi o que aconteceu nas eleições legislativas realizadas em Portugal em 1976<sup>2</sup>. Nessas eleições foram eleitos 263 deputados, ao contrário dos 250 que foram eleitos em 1975 para a Assembleia Constituinte. Actualmente, a distribuição do número de deputados eleitos pelos círculos eleitorais é feita, em função do número de eleitores inscritos, pelo Método d'Hondt, com a excepção dos círculos de emigração que elegem quatro deputados no total.

<sup>2</sup>Não tenho a certeza, mas é a única explicação que me parece lógica.

### 1.3 Métodos não proporcionais

Por vezes é necessário fazer distribuições não proporcionais. Como é evidente, mesmo distribuições não proporcionais seguem certas regras e são feitas com determinados objectivos. Por esse motivo não existem regras gerais.

Vamos ver um exemplo que torna clara a necessidade da não proporcionalidade em certos casos. A distribuição dos deputados por ilhas na Assembleia Legislativa dos Açores não é proporcional. É evidente que qualquer método proporcional deixaria a ilha do Corvo sem representação, uma vez que a ilha de São Miguel tem mais de 200 vezes mais habitantes (e eleitores) do que o Corvo. O legislador optou assim por usar um sistema misto entre a proporcionalidade e a representação igualitária das ilhas.

Vejamos então o que diz a Lei Eleitoral para a Assembleia Legislativa Regional dos Açores sobre a distribuição de deputados por ilhas. Um círculo eleitoral corresponde a uma ilha.

#### Artigo 16<sup>o</sup>

#### Distribuição de deputados

1. Em cada círculo eleitoral são eleitos dois deputados e mais um por cada 6000 eleitores ou fracção superior a 1000.

...

A tabela seguinte mostra o cálculo da distribuição dos deputados por ilhas para as eleições de 2004.

#### Eleitores inscritos para as eleições de Outubro de 2004.

ilhas	eleitores		:6000	resto		mandatos
Corvo	350	2	0	350	–	2
Faial	11451	2	1	5451	+1	4
Flores	3211	2	0	3211	+1	3
Graciosa	3817	2	0	3817	+1	3
Pico	11820	2	1	5820	+1	4
Santa Maria	4508	2	0	4508	+1	3
São Jorge	7967	2	1	1967	+1	4
São Miguel	99854	2	16	3854	+1	19
Terceira	44787	2	7	2787	+1	10
Total	187765	18	26	–	+8	52

É fácil verificar que há alguma distorção da proporcionalidade, pois a ilha de São Miguel tem mais de metade dos eleitores, mas elege apenas 19 dos 52 deputados. Esta assembleia é mais um exemplo de uma assembleia cujo número de membros é variável.

## 1.4 Exercícios

1. Numa eleição, para eger uma assembleia de representantes, é utilizado o método d'Hondt. A essa eleição concorreram três listas. A lista A obteve 61 votos, a lista B 65 votos e a lista C 14 votos.
  - (a) Determine a percentagem de votos obtidos por cada uma das listas.
  - (b) Se o número de mandatos a eger nesta eleição fosse cinco, quais as listas que os obteriam?
  - (c) Calcule o número mínimo de mandatos necessário para que a lista C estivesse representada na assembleia.
  - (d) Resolva de novo as alíneas anteriores, considerando agora as seguintes votações:
    - i. A 100 votos, B 155 votos, C 45 votos;
    - ii. A 20 votos, B 15 votos, C 110 votos;
    - iii. A 5 votos, B 955 votos, C 40 votos;
    - iv. A 1250 votos, B 1300 votos, C 1500 votos, D 1150 votos.
  - (e) Usando o sistema do número uniforme, com  $U = 14$ , determine de novo o número de mandatos obtidos por cada uma das listas.
2. Numa eleição para a atribuição de dois mandatos concorreram cinco partidos, que obtiveram os seguintes resultados:

A 10 votos, B 11 votos, C 8 votos, D 8 votos, E 8 votos.

  - (a) Diga quais os partidos que eger os dois mandatos.
  - (b) Se os partidos C e D concorressem coligados (obtendo 16 votos), qual seria o efeito que a coligação teria na distribuição de mandatos? E uma coligação entre C, D e E.
3. Nas eleições para o Parlamento Europeu realizadas em Portugal em 1994, os resultados dos principais partidos foram os indicados na tabela.

partido	votos	%	mandatos
PS	1060905	34,8	10
PSD	1046857	34,4	9
CDS-PP	378845	12,4	3
CDU	340803	11,2	3

(Nota: As percentagens apresentadas são em relação ao número total de votos.)

- (a) Se o número de mandatos a eleger fosse 24 em vez de 25, quem perderia um lugar? E se fosse 26?
- (b) Se o PSD e o CDS-PP concorressem em coligação (obtendo a soma dos votos dos dois partidos), aumentariam o número de deputados eleitos? E uma coligação entre o PS e a CDU.
- (c) Sabendo que nas Eleições Legislativas da República Portuguesa existem 22 círculos eleitorais (18 distritos, 2 regiões autónomas e 2 círculos da emigração), qual é o número máximo de deputados que dois partidos podem eleger a mais por concorrerem coligados. E uma coligação de três partidos?
4. Numa eleição com voto plural, um candidato que obtenha mais do que 50% dos votos ganha de certeza. Se for uma eleição em que sejam atribuídos 2 mandatos pelo método d'Hondt, então se um partido tiver mais do que  $1/3$  dos votos tem a certeza de obter 1 mandato.
- (a) Diga qual a proporção de votos suficiente para que um partido eleja 1 mandato numa eleição em que são eleitos  $n$  mandatos.  
[Sugestão: Comece por analisar os casos  $n = 1, 2, 3, \dots$ ]
- (b) Diga qual a proporção de votos suficiente para que um partido eleja  $k$  mandatos numa eleição em que são eleitos  $n$  mandatos. ( $k \leq n$ )
5. (Teste de 2005/06) A tabela mostra os resultados das eleições para a Assembleia de Freguesia de Almedina–Coimbra realizadas em 9 Outubro de 2005.

	votos
PSD.CDS.PPM	346
PCP.PEV	217
PS	166
Total	729

- (a) A Assembleia de Freguesia tem nove membros. Determine a composição da assembleia.
- (b) Com mais quantos votos teria a coligação PSD.CDS.PPM obtido a maioria absoluta de mandatos?

## 2 Medição de Poder (Sistemas de votação ponderada)

Existem coisas no nosso universo que são fáceis de medir. Distâncias, pesos ou volumes são exemplos básicos de medições que podemos fazer com facilidade. Para tal usa-se um termo de comparação, metro, quilograma ou litro, conforme os casos. Existem outras, que não sendo tão fáceis de medir, também medimos diariamente com o auxílio de aparelhos mais complicados. Neste segundo caso, temos as temperatura ou a intensidade de um sismo. Estes dois tipos de medições têm no entanto em comum o facto de serem medidas absolutas. Isto quer dizer que uma vez fixada a escala, um objecto/acometimento pode tomar um qualquer valor dentro da escala.

Quando se trata de medir o poder, é evidente que não podemos ter uma medida absoluta. O poder de alguém só pode, quanto muito, ser comparado com o de outra pessoa ou grupo. Acresce ainda que não existe uma maneira única de medir o poder, mas várias tentativas de criar um índice de poder. Como exemplo de um dos índices utilizados, vamos estudar o *Índice de Poder de Banzhaf*.

**Definição 2** *Um sistema de votação ponderada é uma assembleia eleitoral na qual cada eleitor pode ter um número distinto de votos.*

A medição de poder só faz sentido em sistemas de votação ponderada, pois se todos os eleitores de uma assembleia de voto tiverem o mesmo número de votos, então têm o mesmo poder.

Existem muitas eleições e comissões onde são usados sistemas de votação ponderada. Aqui são apresentados apenas alguns exemplos.

- Assembleia de accionistas de uma empresa.
- Conselho de Segurança das Nações Unidas.
- Conselho Europeu.
- Assembleia de Sócios de certas colectividades (Benfica, Sporting, ...)

No Conselho Europeu, os países têm diferente número de votos, de acordo com o seu tamanho. Na assembleia geral do Benfica, quem tiver mais de 10 anos de sócio tem direito a 20 votos, enquanto quem for sócio à menos de 5 só tem direito a 1 voto.

O Conselho de Segurança das Nações Unidas representa um subtipo de sistemas de votação ponderada de que falaremos mais tarde.

## 2.1 Índice de poder

Em alguns casos é fácil medir o poder. Por exemplo, se uma empresa tiver um sócio que seja dono de mais do que 50% do capital, então podemos afirmar que ele tem 100% do poder na assembleia de accionistas. Se uma empresa tiver 3 sócios, um com 40% do capital, outro com 35% e outro com 25%, então têm todos o mesmo poder. É fácil verificar, que quaisquer dois juntos têm a maioria. É este princípio que a regra geral de medição de poder deve preservar.

Nos dois exemplos anteriores foi considerado que são necessários mais do que 50% dos votos para aprovar uma moção. No entanto, por vezes são exigidas maiorias qualificadas de  $2/3$ ,  $4/5$ , ... ou até a unanimidade.

Nas definições que vão ser introduzidas, uma coligação é apenas um conjunto de eleitores que votam da mesma maneira; uma moção é uma proposta à assembleia que deve ser aprovada ou rejeitada.

### Definições 3

1. *Uma coligação vencedora é uma coligação com um número votos suficientes para fazer aprovar uma moção.*
2. *Diz-se que um eleitor tem voto decisivo numa coligação se a coligação deixa de ser vencedora quando este abandona a coligação.*
3. *O índice de poder de um eleitor é o número de coligações em que ele é decisivo.*

O índice de poder de cada um dos eleitores dá-nos uma maneira para comparar o poder de cada um. No entanto, normalmente o poder é apresentado de forma relativa.

O poder relativo de um eleitor é a razão entre o seu índice de poder e a soma dos índices de poder de todos os eleitores.

O poder relativo é normalmente expresso em percentagem.

#### Exemplo

Estudemos o caso de uma comissão composta por quatro membros, um presidente (P) e três outros elementos (A, E e I).

Nessa comissão, as decisões são tomadas por maioria e o presidente tem voto de qualidade. Vamos determinar o poder relativo de cada um dos membros da comissão.



Começamos por elaborar uma tabela, onde pomos **todas** as coligações vencedoras e, para cada uma delas, os eleitores que têm voto decisivo. Pode acontecer que numa coligaçã vencedora ninguém tenha voto decisivo.

col. vencedoras	v. decisivos
P+A+E+I	–
P+A+E	P
P+A+I	P
P+E+I	P
A+E+I	A, E, I
P+A	P, A
P+E	P, E
P+I	P, I

Para calcular o índice de poder de cada um dos eleitores, basta contar na tabela o número de vezes que esse eleitor é decisivo, assim:  $d(P) = 6$ ,  $d(A) = d(E) = d(I) = 2$ .

O poder relativo de cada um deles é a razão entre o seu índice e o índice de poder total,  $d(\text{total}) = d(P) + d(A) + d(E) + d(I) = 12$ .

Sendo assim, o poder relativo de  $P$  e de  $A$  é, respectivamente,  $p(P) = \frac{d(P)}{d(\text{total})} = \frac{6}{12} = 50\%$  e  $p(A) = \frac{d(A)}{d(\text{total})} = \frac{2}{12} = 16,6(6)\%$ .

## 2.2 O Conselho de Segurança da ONU

Nesta secção, vamos estudar um caso particular dos sistemas de votação ponderada. Mais concretamente, estudaremos as assembleias em que apesar de todos os eleitores terem, aparentemente, o mesmo número de votos, alguns têm mais poder do que os outros. A estes sistemas chamamos *sistemas do tipo ONU*<sup>3</sup>, pois o Conselho de Segurança das Nações Unidas é um dos exemplo mais estudados deste tipo de sistemas.

A medição do poder de cada um dos eleitores neste tipo de sistema é feita seguindo o método geral.

**Definição 4** *Um sistema do tipo ONU é um sistema em que cada eleitor tem apenas um voto, mas em que um grupo deles tem direito de veto. Uma moção é aprovada se tiver uma maioria qualificada (e.g. 60%, 2/3 ou um número de votos pré-determinado).*

*Um colégio eleitoral deste tipo fica completamente determinado por três números: o número de eleitores, o número de eleitores com direito de veto e o número de votos necessário para aprovar uma moção.*

<sup>3</sup>Podem ter outras designações.

Sendo assim, só existem dois tipos de eleitores: com ou sem veto. Dois eleitores do mesmo tipo têm o mesmo poder relativo.

O Conselho de Segurança tem 15 membros, 5 dos quais com direito de veto, e uma moção é aprovada se obtiver, pelo menos, 9 votos favoráveis.

### Exemplo

Consideremos um comissão com 7 elementos, 2 dos quais com direito de veto, e onde são necessários 5 membros para tomar uma decisão.

Para determinar o poder relativo dos membros da comissão com e sem direito de veto, vamos elaborar uma tabela. Na primeira coluna desta tabela coloca-se o número de elementos que uma coligação vencedora pode ter, neste caso 5, 6 ou 7. Na segunda põe-se o número de coligações vencedoras de cada tipo. Com 7 elementos só existe uma coligação, logo só existe uma coligação vencedora. Enquanto com 5, por exemplo existem 10. Como os dois membros com direito de veto estão em todas as coligações vencedoras, para contar as coligações vencedoras com 5 elementos basta contar de quantas maneiras diferentes é possível escolher três dos outros cinco. Na última coluna escreve-se o número de votos decisivos em cada coligação, distinguindo entre os votos decisivos dos membros com direito de veto e os votos decisivos dos outros elementos.

$n^{\circ}$ eleitores	$n^{\circ}$ col. vencedoras	$n^{\circ}$ v. decisivos
7	1	2+0
6	5	2+0
5	10	2+3

O número total de coligações vencedoras é  $1+5+10=16$ . Como um eleitor com direito de veto (V) é decisivo em todas coligações, temos então que o seu índice de poder é  $d(V) = 16$ .

Por outro lado, existem  $6=1+5$  coligações onde há 2 votos decisivos, e 10 onde há 5 votos decisivos e portanto

$$d(\text{total}) = 1 \times 2 + 5 \times 2 + 10 \times 5 = 62 .$$

Temos então que o poder relativo dos membros da comissão com direito de veto é  $p(V) = \frac{16}{62} \simeq 25,8\%$ .

Os dois membros com direito de veto têm um poder relativo igual a  $2 \times 25,8 = 51,6\%$ . Ou seja, os outros 5 membros em conjunto têm  $100 - 51,6 = 48,4\%$  do poder, e portanto cada um deles tem  $\frac{48,4}{5} = 9,68\%$  do poder.

### Conselho de Segurança da ONU

Por curiosidade, apresentamos os cálculos para determinar o poder relativo dos membros do Conselho de Segurança das Nações Unidas.

Como já foi dito, o Conselho de Segurança das Nações Unidas tem 15 membros, 5 deles com direito de veto (EUA, Rússia, Reino Unido, China e França) e são necessários 9 votos para aprovar uma resolução.

$n^{\circ}$ eleitores	$n^{\circ}$ col. vencedoras	$n^{\circ}$ v. decisivos
15	1	5+0
14	10	5+0
13	45	5+0
12	120	5+0
11	210	5+0
10	252	5+0
9	210	5+4

$$d(EUA) = 848 \quad d(\text{total}) = 5080$$

$$p(EUA) = \frac{848}{5080} \simeq 16,69\%$$

O poder dos membros não permanentes é  $100 - 5 \times 16,69 = 16,65\%$  do poder, e portanto cada um deles tem  $\frac{16,65}{10} = 1,665\%$  do poder.

## 2.3 Exercícios

- Uma comissão é constituída por três membros: A, B e C. Um dos membros (A) tem direito a 2 votos e os outros dois a 1 voto cada um. Uma decisão é aprovada desde que obtenha 3 votos.
  - Determine todas as coligações vencedoras e todos os votos decisivos.
  - Calcule o índice de poder e o poder relativo de cada um dos membros da comissão.
- Responda às alíneas do exercício anterior nos seguintes casos:
  - os três elementos da comissão têm o mesmo número de votos e a decisão é tomada por maioria;
  - a comissão tem quatro elementos, todos têm o mesmo número de votos, mas um deles tem direito de veto, ou seja tem que estar obrigatoriamente em todas as coligações vencedoras;

- (c) a comissão tem cinco elementos, todos têm o mesmo número de votos, mas um deles tem voto de qualidade.
3. O Futebol Clube de Coimbra constituiu uma Sociedade Anónima Desportiva (SAD) para gerir o futebol do seu clube. O clube ficou com 20% das acções da SAD e as restantes foram adquiridas em partes iguais pela empresa de comunicação *Mediana Lisboa*, e pela empresa de distribuição *Oceano*. Sabendo que a lei determina que o clube fundador da SAD tem direito de veto na assembleia de accionistas, indique o poder relativo de cada um dos três sócios.
4. Uma empresa familiar tem cinco sócios, o pai, a mãe e três filhos. O capital da empresa está dividido entre os cinco em partes iguais e as decisões são tomadas por maioria. Determine o poder relativo de cada um dos sócios nas seguintes situações:
- (a) cada sócio decide de maneira independente;
- (b) os dois cônjuges votam sempre em conjunto;
- (c) um dos filhos é menor e é representado pelos pais.
5. (Frequência de 2004/05) Para eleger os elementos de uma comissão de seis elementos é utilizado o método proporcional d'Hondt. A essa eleição concorreram três listas e o resultados estão indicados na tabela.

lista	%	eleitos
A	40	3
B	39	2
C	21	1

- (a) Sabendo que as decisões na comissão são tomadas por maioria (i.e. são necessários 4 votos), indique todas as coligações vencedoras, o índice de poder e o poder relativo de cada uma das listas.
- (b) Se o número de elementos da comissão fosse oito, qual seria a representação na comissão de cada uma das listas.
6. Uma comissão tem 10 elementos, 3 dos quais com direito de veto, e são necessários 8 membros para tomar uma decisão.

Calcule o poder relativo dos membros da comissão, com e sem direito de veto.

### 3 Procedimentos eleitorais

A partir deste ponto, vamos estudar os sistemas que têm por objectivo ordenar um conjunto de candidatos através de eleições democráticas. Em muitas situações o objectivo é escolher apenas um mas, um procedimento eleitoral permite-nos sempre ordenar todos os candidatos.

Existem dois tipos de procedimentos eleitorais, ou de tipo eleitoral: os *procedimentos de apreciação absoluta*, em que é atribuída uma classificação: nota de uma disciplina, provas de ginástica, certo tipo de concursos públicos, ..., que permitem ordenar os candidatos através do seu “valor absoluto” e os procedimentos de *apreciação relativa* que têm como objectivo ordenar os candidatos através da comparação entre eles. Claro que cada um dos eleitores pode ter uma opinião diferente sobre os candidatos, e isso trás dificuldades na escolha do vencedor. São os procedimentos de apreciação relativa que vamos estudar. Como todos temos intuitivamente a ideia, diferentes procedimentos podem levar a diferentes conclusões. Portanto, o objectivo é tentar encontrar um que seja mais adequado do que os outros. Não existe resposta absoluta para este problema, como veremos mais tarde.

Exemplos de procedimentos eleitorais de apreciação relativa.

- Eleição do Presidente da República.
- Contratação de um funcionário para a Administração Pública<sup>4</sup>.
- Campeonato do Mundo de Fórmula 1.
- Festival Eurovisão da Canção.

O Campeão do Mundo de Fórmula 1 não é decidido por votação, mas se pensarmos em cada corrida como um eleitor e em cada piloto como um candidato a Campeão do Mundo, então podemos usar o mesmo tipo de regras. Tal como eleitores diferentes têm opiniões diferentes, as classificações das corridas também são diferentes.

Antes de apresentar os procedimentos mais usuais, são introduzidas duas definições que nos vão acompanhar no resto do texto.

#### Definições 5

*Um procedimento eleitoral é um conjunto de regras que permite determinar a ordenação final dos candidatos a uma eleição.*

*Um perfil eleitoral é o conjunto das preferências individuais de todos os eleitores.*

---

<sup>4</sup>Depende das regras do concurso. Noutros casos são usadas classificações, e portanto a apreciação é absoluta.

Num perfil eleitoral, considera-se que cada eleitor faz uma ordenação completa de todos os candidatos.

Os procedimentos de apreciação relativa dividem-se em dois tipos: métodos maioritários e métodos posicionais. A principal diferença entre os dois tipos é que os métodos posicionais valorizam a opinião que cada eleitor tem sobre todos os candidatos.

### 3.1 Métodos maioritários

Os métodos maioritários são os que são usados normalmente em eleições políticas, uma vez que o número de eleitores torna bastante difícil que cada eleitor ordene todos os candidatos.

1. **Voto plural** – Cada eleitor escolhe um candidato. O vencedor é o candidato que obtém mais votos.
2. **Voto antiplural** – Cada eleitor rejeita um candidato. O vencedor é o candidato menos rejeitado. (De modo equivalente, cada eleitor escolhe todos os candidatos menos um. O vencedor é o candidato que obtém mais votos.)

[Nota: Estes métodos ignoram completamente a opinião que cada eleitor faz sobre os outros candidatos.]

3. **Voto maioritário a duas voltas** – Cada eleitor escolhe um candidato. Se um candidato obtém mais do que metade dos votos (maioria absoluta) é declarado vencedor. Caso contrário efectua-se uma segunda volta entre os dois candidatos mais votados.
4. **Método Run-off** – Decorre em várias voltas. Em cada volta são eliminados os candidatos que não obtiverem votos e o candidato menos votado de entre os restantes até algum candidato obter maioria absoluta. Poderá ser necessário efectuar desempates em alguma das fases.
5. **Método de Condorcet** – Fazem-se comparações entre todos os pares de candidatos. O *vencedor de Condorcet* é o candidato que ganhar todas as comparações.

Generalização – Se não existir vencedor de Condorcet, pode-se atribuir pontos ao vencedor de cada “duelo”. Por exemplo 2 pontos por vitória e 1 por empate. O vencedor é o candidato que obtiver mais pontos. A este método chama-se **Método de comparação par a par**.

### 3.2 Métodos posicionais

Antes de definirmos o que é um método posicional, começamos por apresentar o que é provavelmente o mais antigo deles, a Contagem de Borda. Este método foi apresentado

por Jean Charles Borda no século XVIII, como proposta de procedimento na eleição do presidente da Academia Francesa das Ciências. A sua formulação original era ligeiramente diferente da que é utilizada actualmente.

**Contagem de Borda** – Cada eleitor atribui pontos por ordem decrescente de preferência aos candidatos. Para 3 candidatos atribuem-se as pontuações (2,1,0), para 4, (3,2,1,0) e assim sucessivamente.

### Exemplo

Vejam agora um exemplo, onde se vê que a utilização de métodos de votação diferentes pode levar a uma disparidade de resultados.

Numa assembleia de 31 pessoas, antes de se proceder a uma eleição, discutiu-se qual o método a utilizar. Houve quatro propostas: voto plural (P), voto maioritário a duas voltas (D), método de Condorcet (C) e Contagem de Borda (B).

O quadro seguinte mostra as preferências dos membros da assembleia.

preferência	
$B \succ P \succ D \succ C$	5 membros
$P \succ C \succ B \succ D$	10 membros
$D \succ B \succ C \succ P$	9 membros
$C \succ B \succ D \succ P$	7 membros

Que método deverá ser usado?

Se utilizarmos o voto plural ganha P com 10 votos, seguido de D com 9 votos, C com 7 votos e B com 5 votos. Se utilizarmos o voto plural, escolheríamos o voto plural.

Se utilizarmos o voto maioritário a duas voltas, o resultado da primeira volta é o resultado da votação plural. Os dois mais votados são P e D. Na segunda volta, os 7 eleitores que preferem C, têm B como segunda preferência e D como terceira, e por isso votam em D na segunda volta. Os 5 eleitores que preferem B, votam na segunda volta em P. Assim na segunda volta, D tem  $9+7=16$  votos e P tem  $10+5=15$ . Portanto, o método escolhido seria o voto maioritário a duas voltas.

O método de Condorcet funciona comparando todos os candidatos dois a dois. Ou seja, temos que fazer seis comparações. A comparação entre P e D já foi feita no método anterior. Portanto a regra geral é para cada comparação ignorar as outras duas hipóteses na tabela de preferências.

P	D	P	C	P	B	D	C	D	B	C	B
15	16	15	16	10	21	14	17	9	22	17	14

Usando o método de Condorcet, o escolhido seria o método de Condorcet.

Na Contagem de Borda, cada eleitor atribui 3, 2, 1 e 0 pontos aos candidatos, de acordo com a sua ordem de preferência. Basta portanto contar quantos vezes um candidato é o preferido, o segundo preferido, ... Por exemplo B é o preferido 5 vezes, o segundo 16 vezes e o terceiro 10 vezes. Calculemos a pontuação de cada um deles.

$$p(B) = 3 \times 5 + 2 \times 16 + 1 \times 10 = 57$$

$$p(P) = 3 \times 10 + 2 \times 5 + 1 \times 0 = 40$$

$$p(C) = 3 \times 7 + 2 \times 10 + 1 \times 9 = 50$$

$$p(D) = 3 \times 9 + 2 \times 0 + 1 \times 12 = 39$$

O vencedor é a Contagem de Borda.

O importante a salientar neste exemplo acadêmico é que é necessário definir antecipadamente o método de votação que se vai usar numa eleição. Caso contrário, existe a hipótese de uma escolha selectiva do procedimento a usar influenciar o resultado da eleição.

Como exemplo, vamos ainda aplicar a este caso a voto antiplural e o método Run-off.

No voto antiplural, olhamos apenas para a última coluna para saber quem é que é ordenado menos vezes em último. Ou seja, P é rejeitado por 16 eleitores, D por 10 eleitores, C por 5 eleitores e B por nenhum. Talvez o método escolhido deve ser a Contagem de Borda?

Por outro lado, se usássemos o método Run-off o vencedor seria D, o que não é surpresa pois este método tem algumas semelhanças com o método maioritário a duas voltas, especialmente em eleições com poucos candidatos.

	B	C	D	P	eliminado
1ª volta	5	7	9	10	B
2ª volta	–	7	9	15	C
3ª volta	–	–	16	15	P



Como já foi dito, o principal exemplo de um método posicional é a Contagem de Borda. Um método posicional é um método que segue a mesma lógica da Contagem de Borda, isto é, cada eleitor atribui pontos aos candidatos consoante a sua ordem de preferência. O voto plural e o voto antiplural também são métodos posicionais, embora estes dois casos sejam casos degenerados.

**Definição 6** *Numa eleição com  $n$  candidatos, um método posicional é um método em que cada eleitor atribui  $w_1$  pontos ao seu candidato favorito,  $w_2$  pontos ao segundo, ...,  $w_{n-1}$  ao penúltimo e 0 ao último.*

*Ao vector  $W = (w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, 0)$  chama-se Vector Eleitoral, com  $w_1 \geq w_2 \geq \dots w_{n-1} \geq 0$  e  $w_1 > 0$ .*

Como casos limite podemos escolher  $W = (1, 0, \dots, 0)$  ou  $W = (1, \dots, 1, 0)$ . Estes dois vectores eleitorais correspondem aos votos plural e antiplural, respectivamente. Obviamente que em vez de  $W = (1, 0, \dots, 0)$ , podemos escolher  $W = (2, 0, \dots, 0)$  sem alterar o vencedor da eleição. Isto leva-nos à definição de vectores eleitorais equivalentes.

Dois vectores eleitorais dizem-se equivalentes se produzem os mesmos resultados e escreve-se:  $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, 0) \sim (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, 0)$ .

**Resultado 7** *Dois vectores eleitorais são equivalentes  $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, 0) \sim (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, 0)$  se e só se  $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, 0) = x(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, 0) := (xv_1, xv_2, \dots, xv_{n-1}, 0)$ , com  $x > 0$ .*

### Definição 8

*Um vector eleitoral normalizado é um vector eleitoral do tipo  $(1, w_2, \dots, w_{n-1}, 0)$ .*

Dois vectores eleitorais normalizados diferentes não são equivalentes e, qualquer vector eleitoral  $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, 0)$  é equivalente a um vector eleitoral normalizado  $(1, \frac{w_2}{w_1}, \dots, \frac{w_{n-1}}{w_1}, 0)$ .

Vejamos alguns exemplos de vectores eleitorais

- Contagem de Borda:  $W = (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0)$ . Para  $n = 5$ , tem-se  $W = (4, 3, 2, 1, 0) \sim (1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ .
- Festival Eurovisão da canção:  
 $W = (12, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \dots, 0) \sim (60, 50, 40, 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, \dots, 0)$
- Campeonato de Fórmula 1:  $W = (10, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \dots, 0)$ .

O comprimento do vector eleitoral tem que ser igual ao número de candidatos a uma eleição, campeonato de Fórmula 1, etc. Se necessário, acrescentamos zeros nas últimas posições.

### 3.3 Exercícios

1. Considere os seguintes resultados de eleições democráticas, onde os eleitores ordenam completamente o conjunto dos candidatos.

ordenação	votos	ordenação	votos	ordenação	votos
$A \succ B \succ C \succ D$	12	$D \succ B \succ A \succ C$	250	$D \succ B \succ E \succ A \succ C$	10
$C \succ B \succ D \succ A$	7	$C \succ B \succ A \succ D$	73	$C \succ B \succ A \succ E \succ D$	10
$D \succ B \succ C \succ A$	13	$A \succ B \succ C \succ D$	29	$E \succ B \succ C \succ D \succ A$	10
$A \succ D \succ C \succ B$	5	$A \succ C \succ B \succ D$	105		

- (a) Determine o vencedor da eleição se for usado o voto plural simples, maioritário a duas voltas, antiplural, Contagem de Borda, método de Condorcet e método Run-off.
- (b) Reverta a votação de cada eleitor (i.e., se votou  $A \succ B \succ C \succ D$ , então passa a votar  $D \succ C \succ B \succ A$ ) e diga qual é o vencedor da votação plural, antiplural e Contagem de Borda. Compare com os resultados da alínea anterior.
2. Considere de novo as eleições do exercício 1.
- (a) Conte os votos da primeira eleição, usando o vector eleitoral  $(7, 6, 1, 0)$ .
- (b) Conte os votos da segunda eleição, usando o vector eleitoral  $(2, 1, 0, 0)$ .
- (c) Conte os votos da terceira eleição, usando o vector eleitoral  $(10, 3, 2, 1, 0)$ .
- (d) Em cada um dos casos, diga qual é o vector eleitoral normalizado.
3. (Teste de 2005/06) Numa votação, para escolher entre quatro candidatos, registaram-se as preferências individuais indicadas no quadro.

preferências	votos
$A \succ B \succ C \succ D$	10
$B \succ D \succ A \succ C$	7
$C \succ B \succ A \succ D$	5
$C \succ A \succ D \succ B$	5
$C \succ A \succ B \succ D$	5

Indique o vencedor da eleição se for usado:

- (a) o voto maioritário a duas voltas;
- (b) o voto antiplural;
- (c) o método posicional de vector eleitoral  $(3, 1, 0, 0)$ .

## 4 Geometria Eleitoral

Numa eleição com apenas dois candidatos, se alguém nos disser que um candidato teve 55% dos votos, ficamos a saber imediatamente que outro teve 45%. Como o resultado relativo é o que realmente interessa para determinar o vencedor de uma eleição, podemos assim afirmar que uma eleição com dois candidatos tem dimensão um. De igual modo, se tivermos uma eleição com três candidatos, e soubermos os resultados, em percentagem, de dois deles, então sabemos o resultado do terceiro. Podemos assim afirmar que uma eleição com três candidatos tem dimensão dois.

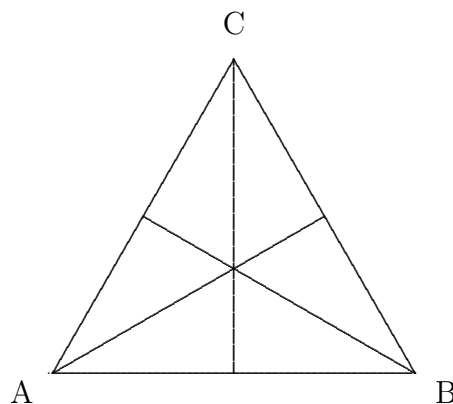
Vamos ver de seguida que é possível representar no plano resultados de eleições com três candidatos, uma vez que o plano também tem dimensão dois (i.e. os pontos do plano são pares ordenados).

### 4.1 Representação Triangular

Até aqui, a apresentação das preferências dos membros de um colégio eleitoral (perfil) foi sempre feita através de uma tabela de preferências, como as que aparecem nos Exercícios 3.3. Ora, mesmo no caso da eleição com três candidatos, existem seis maneiras diferentes de ordenar os candidatos. Apresentamos agora um método gráfico que permite melhorar a apresentação, e a leitura, dos perfis eleitorais.

Através de triângulos podemos representar os resultados de eleições com três candidatos, A, B e C.

Desenha-se um triângulo (em geral equilátero, mas não é necessário) e divide-se o triângulo em seis regiões, como na figura ao lado. Repare-se que o triângulo está dividido em tantas regiões, quantas as maneiras diferentes de ordenar os três candidatos. Por isso, vamos associar a cada região do triângulo uma ordenação distinta. Cada vértice do triângulo representa um dos candidatos. Cada região representa a ordenação que é determinada pela proximidade a cada um dos vértices. Quanto mais próximo está um vértice, mais alto é o *ranking* desse candidato na ordenação correspondente.



A figura em baixo mostra a correspondência entre as regiões e as ordenações. Por convenção, as seis regiões são numeradas como se indica na figura, começando em  $A \succ B \succ C$  e seguindo o sentido dos ponteiros do relógio.

Região 1 –  $A \succ B \succ C$

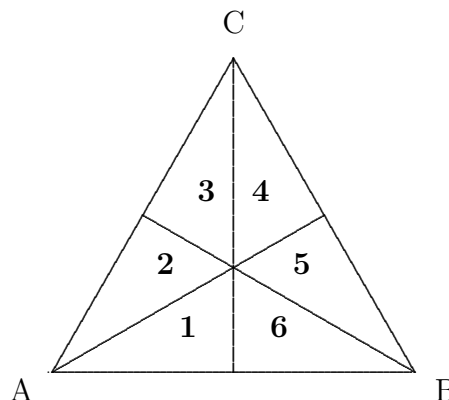
Região 2 –  $A \succ C \succ B$

Região 3 –  $C \succ A \succ B$

Região 4 –  $C \succ B \succ A$

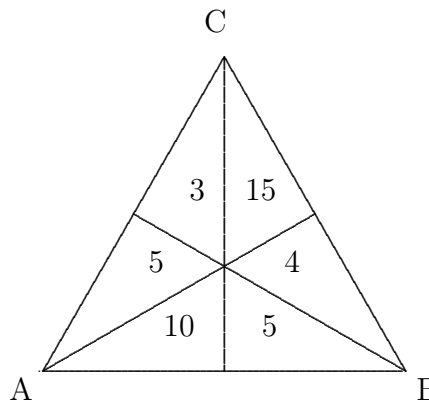
Região 5 –  $B \succ C \succ A$

Região 6 –  $B \succ A \succ C$



Vejamus então um exemplo. Do lado esquerdo temos a tabela de preferências de uma eleição com três candidatos, enquanto do lado direito temos a respectiva *Representação Triangular*.

ordenação	votos	região
$A \succ B \succ C$	10	1
$A \succ C \succ B$	5	2
$C \succ A \succ B$	3	3
$C \succ B \succ A$	15	4
$B \succ C \succ A$	4	5
$B \succ A \succ C$	5	6

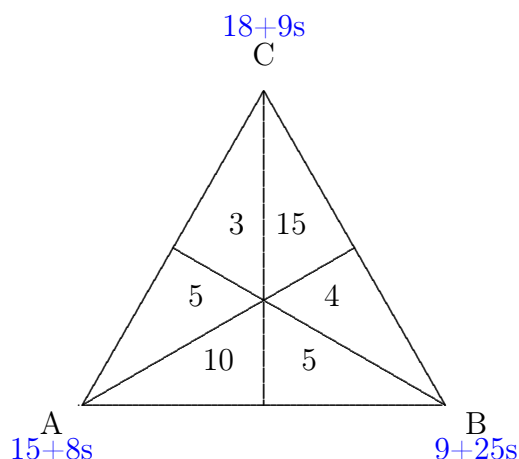


Usando a numeração das regiões, podemos simplesmente dizer que o perfil eleitoral desta eleição é  $\mathbf{p} = (10, 5, 3, 15, 4, 5)$ , que é uma maneira muito mais concisa de guardar a informação.

Mais geralmente, a *descrição vectorial do perfil eleitoral* de uma eleição com três candidatos é um vector  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ , que significa que na votação houve  $p_1$  eleitores que votaram na ordenação de candidatos correspondente à região 1,  $p_2$  que votaram na ordenação correspondente à região 2, e assim sucessivamente.

A representação triangular tem igualmente a vantagem de ser fácil de analisar. Por exemplo, é imediato ver que se o método usado for o voto plural, o resultado da eleição do exemplo anterior é  $A$  - 15 votos (regiões 1 e 2),  $B$  - 9 votos (regiões 5 e 6) e  $C$  - 18 votos (regiões 3 e 4). De igual modo, para o voto antiplural o resultado de  $A$  é a soma dos

eleitores que votaram numa das “regiões” onde  $A$  é o primeiro ou o segundo (regiões 6 e 3) da ordenação. Sendo assim, para facilitar a leitura dos resultados, vamos escrever junto a cada vértice o número de vezes que o candidato correspondente é o preferido dos eleitores e o número de vezes que ele é o segundo preferido. Voltando ao exemplo,  $C$  é 18 vezes o preferido e 9 a segunda preferência (regiões 2 e 5). Vamos assim escrever junto ao vértice  $C$ ,  $18 + 9s$ . O significado do  $s$  vai ser explicado de seguida.



Vamos voltar um pouco atrás. Se numa eleição com três candidatos utilizarmos um método posicional, então um vector eleitoral normalizado é da forma  $W_s = (1, s, 0)$ , com  $0 \leq s \leq 1$ . Este facto é imediato porque num vector eleitoral normalizado o primeiro elemento é 1, o último é 0 e o número intermédio varia entre os dois. Por exemplo, para  $s = 0$ , o método correspondente é o voto plural, para  $s = 1/2$  a Contagem de Borda e para  $s = 1$  é o voto antiplural.

Designando por  $p_s = (p_s(A), p_s(B), p_s(C))$  o resultado duma eleição com vector eleitoral  $W_s = (1, s, 0)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , esse resultado pode ser obtido da seguinte maneira:

$$p_s(A) = (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o preferido}) + s \times (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o 2}^\circ \text{ preferido}).$$

Olhando agora de novo para a representação triangular, é fácil obter o resultado da eleição para qualquer método posicional. Para tal basta substituir  $s$  pelo valor pretendido. Por exemplo, para saber o vencedor da eleição do exemplo com vector eleitoral  $(3, 1, 0) \sim (1, \frac{1}{3}, 0)$ , faz-se  $s = \frac{1}{3}$  e tem-se

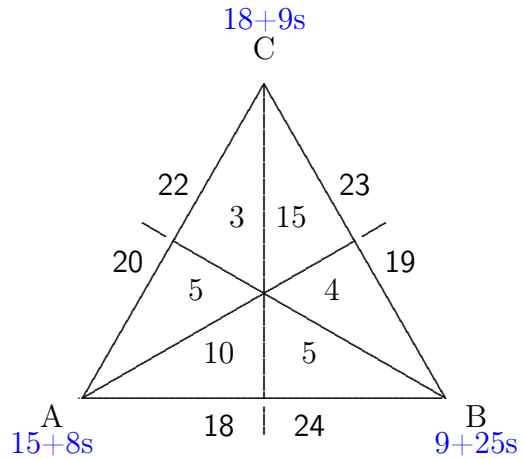
$$p_{\frac{1}{3}} = (15 + 8 \times \frac{1}{3}, 9 + 25 \times \frac{1}{3}, 18 + 9 \times \frac{1}{3}) = (\frac{53}{3}, \frac{52}{3}, \frac{63}{3}).$$

Portanto, com este vector eleitoral, o vencedor seria  $C$ .

Existe ainda um outro método para o qual é fácil deduzir o vencedor a partir do da representação triangular, o método de Condorcet.

Olhando de novo para o triângulo, vemos que o segmento de recta que começa em  $C$  e é perpendicular a  $[AB]$  divide o triângulo em duas metades. As três regiões do lado esquerdo estão mais próximas de  $A$  do que de  $B$  e nas três do lado direito acontece o contrário. Assim para saber quem ganharia no *confronto directo* entre os dois, somamos os valores das três regiões mais próximas de cada um deles.

No nosso exemplo,  $A$  teria  $10+5+3=18$  votos, enquanto  $B$  teria  $5+4+15=24$  votos. Ou seja,  $B$  vence na comparação directa com  $A$ . Para melhor visualizarmos, escrevemos os valores 18 e 24 debaixo da linha  $[AB]$ , como se vê na figura. Do modo idêntico, se podem ver as comparações entre  $C$  e  $A$ , e entre  $C$  e  $B$ . A partir da figura conclui-se facilmente que  $C$  é vencedor de Condorcet.

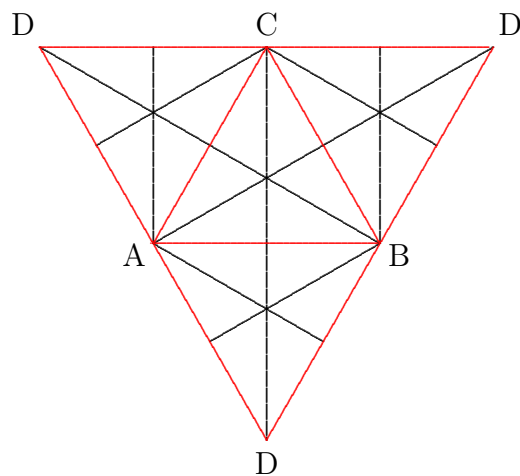


A representação onde constam todos os valores de que falámos é designada por *Representação triangular completa*.

### 4.2 Quatro candidatos

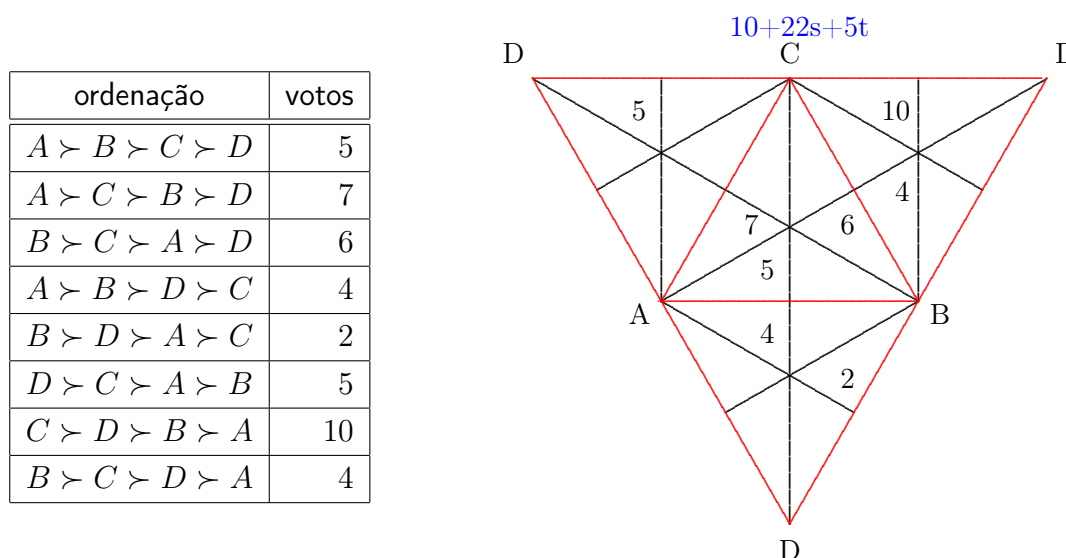
É fácil generalizar o que foi dito anteriormente para eleições com dois ou três candidatos e verificar que numa eleição com  $n$  candidatos, basta conhecer o resultado (em percentagem) de  $n - 1$  candidatos. Ou seja, uma eleição com  $n$  candidatos tem dimensão  $n - 1$ . Para um  $n$  qualquer não podemos representar os resultados da eleição como fizemos para  $n = 3$ , mas para  $n = 4$  podemos fazê-lo em três dimensões. O correspondente ao triângulo é agora um sólido com quatro vértices, uma pirâmide triangular.

Como o nosso material de trabalho é habitualmente o papel, que só tem duas dimensões, vamos planificar a pirâmide. A figura representa uma pirâmide triangular planificada. As linhas a vermelho são as arestas da pirâmide. Cada uma das quatro faces da pirâmide é um triângulo e por isso podemos proceder como anteriormente. Dividindo cada uma das faces em 6 regiões, a "pirâmide" fica assim dividida em 24 regiões.



Cada uma das regiões corresponde a uma ordenação dos quatro candidatos, A,B,C e D, de uma eleição. Note-se que cada candidato corresponde a um vértice da pirâmide, e por isso um deles, na nossa figura D, é representado por três pontos na planificação. Para representar um perfil eleitoral de uma eleição com quatro candidatos na planificação da pirâmide, fazemos corresponder a cada uma das 24 regiões uma ordenação. Para tal seguimos o mesmo critério que anteriormente: quanto mais próximo está um vértice, mais alto é o *ranking* desse candidato na ordenação correspondente a essa região.

Vejamus então um exemplo. Do lado esquerdo temos a tabela de preferências de uma eleição com quatro candidatos, enquanto do lado direito temos a respectiva *Representação Triangular*.



Normalmente, nem todas as ordenações são efectivamente escolhidas. Por facilidade, podemos deixar a respectiva região em branco.

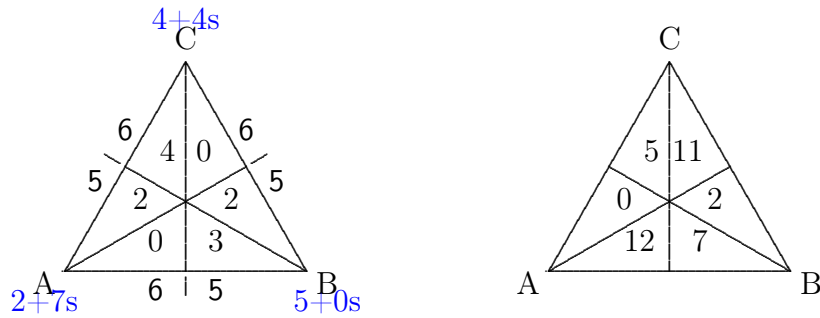
Tal como no caso das eleições com três candidatos, a expressão  $10 + 22s + 5t$  significa que  $C$  é o candidato preferido 10 vezes, o segundo preferido 22 vezes e o terceiro preferido 5 vezes.

Tal como nas eleições com três candidatos, é possível determinar o vencedor de Condorcet a partir da representação triangular. O segmento vertical  $[CD]$  divide o triângulo em duas regiões, uma mais próxima de  $A$  e outra mais próxima de  $B$ . O mesmo procedimento pode ser feito para as comparações  $C - A$  e  $C - B$ . Para as comparações com  $D$  é preciso um pouco mais de cuidado. Nesses casos é preciso observar que regiões estão mais próximas de cada um dos dois candidatos considerados.

### 4.3 Exercícios

1. A figura mostra a representação triangular de dois perfis eleitorais. A partir dessa representação indique o vencedor de Condorcet (se existir) e os vencedores das votações

plural e antiplural. No triângulo da direita complete a representação.



2. As tabelas mostram os resultados de eleições com três candidatos.

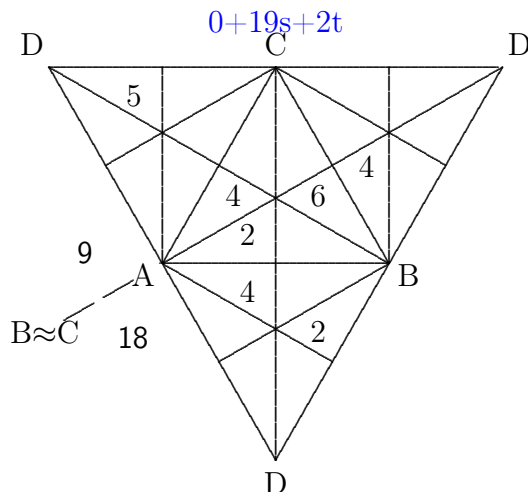
ordenação	votos	região
$A \succ B \succ C$	12	1
$A \succ C \succ B$	7	2
$C \succ A \succ B$	3	3
$C \succ B \succ A$	5	4
$B \succ C \succ A$	13	5
$B \succ A \succ C$	5	6

ordenação	votos	região
$A \succ B \succ C$	112	
$A \succ C \succ B$	517	
$C \succ A \succ B$	96	
$B \succ C \succ A$	986	
$B \succ A \succ C$	715	

ordenação	votos	região
	37	1
	37	5
	38	3

- Complete as duas últimas tabelas.
- Faça a representação triangular de cada uma delas e indique o vencedor de Condorcet (se existir) e os vencedores das votações plural e antiplural.
- Apresente o resultado normalizado das votações plural e antiplural.

3. A figura representa o perfil eleitoral dum eleição com quatro candidatos.



- Complete a representação.
- A partir da representação geométrica, diga qual é o vencedor de Condorcet (se existir) e os vencedores das votações plural e antiplural.
- Faça a representação triangular da votação verificada após a desistência de D.



## 4.4 Métodos posicionais

Vimos anteriormente que qualquer método posicional é equivalente a um método com vector eleitoral  $W_s = (1, s, 0)$ , para  $0 \leq s \leq 1$ . Vimos também que a fórmula que nos dá o resultado dessa eleição, para o candidato A, é:

$$p_s(A) = (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o preferido}) + s \times (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o 2}^\circ \text{ preferido}).$$

Em particular para  $s = 0$ ,  $p_0$  é o resultado da votação plural e para  $s = 1$ ,  $p_1$  é o resultado da votação antiplural. Ou seja,

$$p_0(A) = (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o preferido}),$$

$$p_1(A) = (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o preferido}) + (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o 2}^\circ \text{ preferido}),$$

e portanto

$$p_1(A) - p_0(A) = (\text{n}^\circ \text{ votos em que A é o 2}^\circ \text{ preferido}).$$

Podemos assim deduzir o resultado de uma eleição para um método posicional qualquer,  $p_s$ , a partir dos resultados das votações plural e antiplural.

$$p_s = p_0 + s \times (p_1 - p_0) = (1 - s) \times p_0 + s \times p_1$$

Obviamente, também é possível deduzir o resultado normalizado (ou em percentagem) de uma eleição para um método posicional a partir dos respectivos resultados normalizados dos votos plural e antiplural.

Vamos designar por  $E$  o número de eleitores e por  $q_s = (q_s(A), q_s(B), q_s(C))$  o resultado normalizado da eleição com vector eleitoral  $W_s = (1, s, 0)$ . O resultado normalizado é o quociente entre o número votos de cada candidato e o número total de votos, que pode ser diferente do número de eleitores. Assim, na eleição plural cada eleitor tem um voto e portanto existem tantos eleitores como votos. Por sua vez, na eleição antiplural cada eleitor escolhe dois candidatos, e portanto os votos são o dobro dos eleitores. Temos então que,

$$q_0 = \frac{p_0}{E} \quad \text{e} \quad q_1 = \frac{p_1}{2 \times E}.$$

Generalizando a ideia para um método posicional qualquer, se o vector eleitoral for  $W_s = (1, s, 0)$ , cada eleitor atribui 1 ponto ao seu candidato preferido e  $s$  pontos ao seu segundo preferido, ou seja cada eleitor tem direito a  $1 + s$  votos. Sendo assim o número total de votos,  $p_s(A) + p_s(B) + p_s(C)$  é igual a  $(1 + s) \times E$ . Podemos agora deduzir o valor de  $q_s$  a partir dos valores de  $q_0$  e  $q_1$ , como pretendido.

$$q_s = \frac{p_s}{(1 + s) \times E} = \frac{(1 - s) \times p_0 + s \times p_1}{(1 + s) \times E} = \frac{1 - s}{1 + s} \times \frac{p_0}{E} + \frac{2s}{1 + s} \times \frac{p_1}{2 \times E}$$

Temos então finalmente que

$$q_s = \left(1 - \frac{2s}{s+1}\right) q_0 + \left(\frac{2s}{s+1}\right) q_1 .$$

## 4.5 O segmento dos resultados

Antes de apresentar a representação triangular, começamos por dizer que isso era possível porque as eleições com três candidatos são bidimensionais. Vamos agora concretizar isso um pouco mais. A cada resultado (normalizado) de uma eleição com três candidatos corresponde um ponto no plano coordenado. Mais, essa correspondência é feita de maneira única. Vamos ver em detalhe como se processa este facto.

1. Designamos por  $q = (q(A), q(B), q(C))$  o resultado eleitoral normalizado de uma eleição.

2. Por convenção, escrevemos  $\begin{cases} x = q(B) \\ y = q(C) \end{cases}$ .

3.  $q(A) + q(B) + q(C) = 1 \implies q(A) = 1 - q(B) - q(C) = 1 - x - y$

4.  $q = (1 - x - y, x, y)$

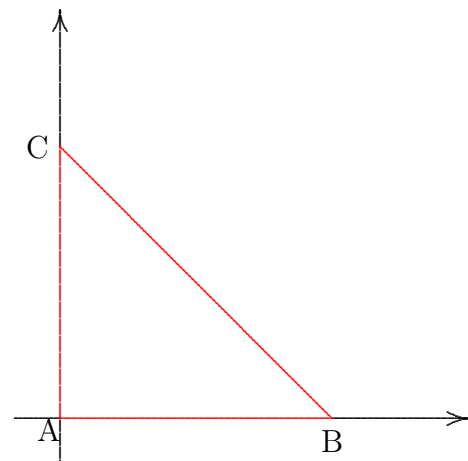
5. O resultado de uma eleição fica determinado se conhecermos os valores de  $x$  e de  $y$ . Portanto a cada resultado eleitoral normalizado  $q = (1 - x - y, x, y)$  corresponde o ponto do plano de coordenadas  $(x, y)$ .

6. Como sabemos que os resultados de uma eleição não podem ser negativos,

$$\begin{cases} q(A) \geq 0 \\ q(B) \geq 0 \\ q(C) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

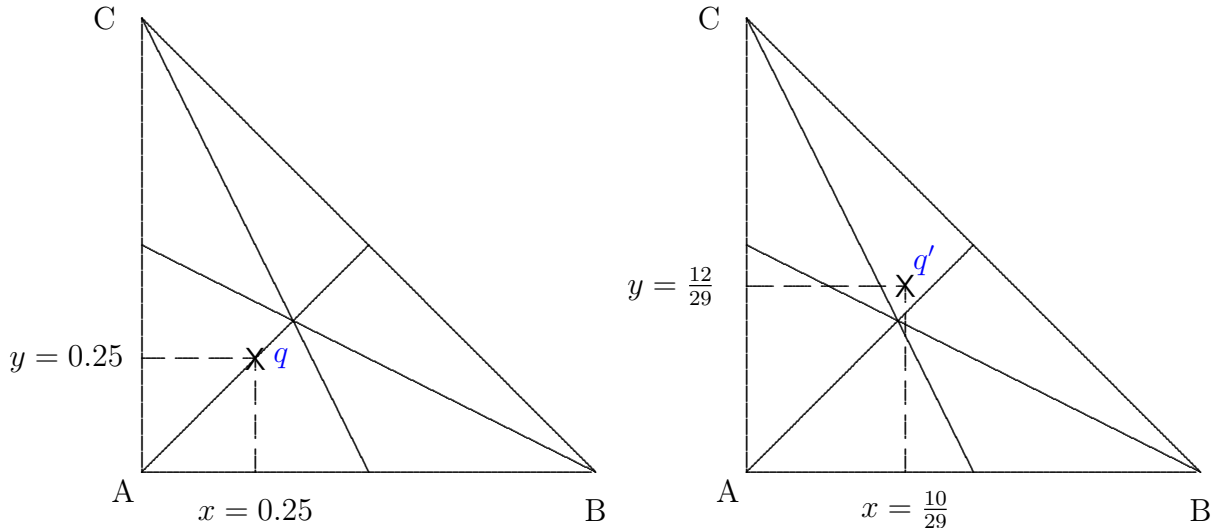
7. A representação dos resultados no plano está dentro do triângulo (vermelho) definido pelas equações  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $x + y \leq 1$ .

8. Quanto maior é a votação (relativa) de um candidato, maior é a proximidade do respectivo vértice ao ponto que representa o resultado da eleição.



## Exemplo

Consideremos duas eleições cujo os resultados são  $p = (100, 50, 50)$  e  $p' = (7, 10, 12)$ , respectivamente. O resultado normalizado das duas eleições é então  $q = (0.5, 0.25, 0.25)$  e  $q' = (\frac{7}{29}, \frac{10}{29}, \frac{12}{29}) = (0.24, 0.35, 0.41)$ , respectivamente. Nas figuras estão marcados os pontos correspondentes a cada uma das eleições. Os comprimentos de  $AB$  e de  $AC$  representam uma unidade.



O triângulo está dividido nas seis regiões que correspondem aos resultados finais possíveis de uma eleição. Assim, a partir da representação de um resultado no triângulo podemos descobrir o vencedor da eleição. No primeiro caso,  $q$  encontra-se na zona de vitória de A, em cima da linha de empate entre B e C.

Nos exemplos anteriores, a interpretação geométrica dos vencedores é desnecessária porque partimos dos resultados reais das eleições. No entanto, existem casos em que podemos retirar conclusões da representação geométrica sem recorrer a cálculos.

Vimos anteriormente que o resultado de uma eleição para um método posicional pode ser determinado a partir dos respectivos resultados normalizados dos votos plural e antiplural.

$$q_s = \left(1 - \frac{2s}{s+1}\right) q_0 + \left(\frac{2s}{s+1}\right) q_1$$

Interpretando geometricamente esta equação, para  $0 \leq s \leq 1$ , ela é a equação de um segmento de recta que une os pontos  $q_0$  e  $q_1$ . Assim, o próximo resultado é imediato.

**Teorema 9** *O segmento de recta  $[q_0, q_1]$  atravessa uma determinada região do triângulo eleitoral se e só se existe um método posicional para o qual o resultado é o correspondente a essa região.*

**Definição 10** *Ao segmento de recta  $[q_0, q_1]$  chama-se Segmento dos resultados eleitorais.*

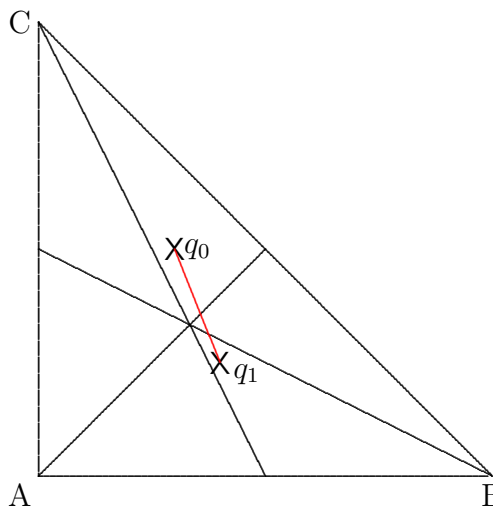
**Exemplo**

Consideremos a eleição, cujo a descrição vectorial é  $(2, 0, 2, 3, 0, 3)$ . Os resultados das votações plural e antiplural são  $q_0 = (0.2, 0.3, 0.5)$  e  $q_1 = (0.35, 0.4, 0.25)$ , respectivamente.

Marcamos os pontos  $q_0$  e  $q_1$  no triângulo, o *Segmento dos resultados eleitorais* é a linha que une  $q_0$  e  $q_1$ .

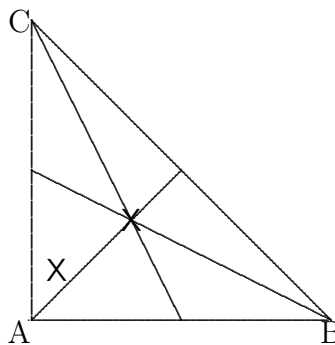
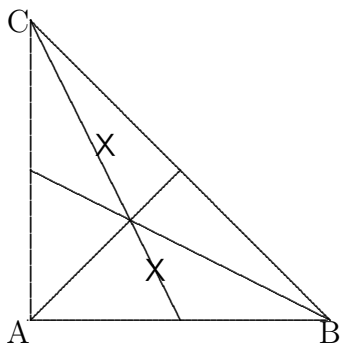
A partir da figura, ficamos a saber que existem métodos posicionais onde a ordenação final é:  $C \succ B \succ A$ ,  $B \succ C \succ A$  e  $B \succ A \succ C$ . Nenhuma uma outra ordenação pode acontecer, com a excepção dos casos em que há empates.

Por exemplo, ficamos a saber que não existe nenhum método posicional para o qual  $A$  é o vencedor.



**4.6 Exercícios**

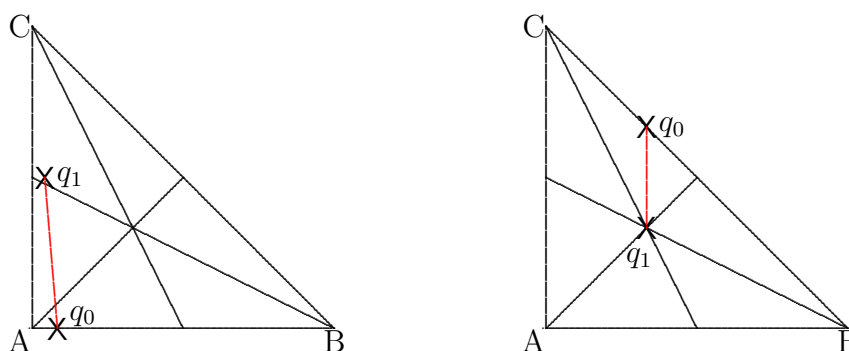
1. Considere o perfil eleitoral  $\mathbf{p} = (3, 2, 0, 4, 2, 0)$  de uma eleição com três candidatos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
  - (a) Determine os valores de  $s$  para os quais  $C$  é o vencedor da eleição posicional com vector eleitoral  $(1, s, 0)$ .
  - (b) Será que existe um método posicional que classifica  $C$  em último?
2. Considere de novo as votações consideradas nos exercícios 1 e 2 na página 27. Para cada uma delas, calcule:
  - (a) o resultado  $(p_s)$  da votação com com vector eleitoral  $W_s = (1, s, 0)$  para  $0 \leq s \leq 1$ ;
  - (b)  $q_s$ , o resultado normalizado da mesma eleição.
3. Indique o resultado das quatro votações que estão representadas nos triângulos.



4. Represente geometricamente as eleições, cujo o resultado final foi:

- (a)  $p=(15,5,10)$ ;
- (b)  $p=(12,50,13)$ ;
- (c)  $p=(2,5,10)$ ;
- (d)  $p=(1250,712,523)$ .

5. Para duas eleições distintas, foi construído o segmento dos resultados eleitorais em função do vector eleitoral normalizado  $(1, s, 0)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ .



- (a) A partir das figuras, determine os resultados normalizados das eleições plural e antiplural.
  - (b) Indique um perfil eleitoral que corresponda a esses resultados.
6. Considere as eleições com três candidatos cujo os resultados escritos na forma vectorial são  $(4, 4, 2, 4, 5, 1)$  e  $(1, 2, 0, 2, 5, 5)$ , respectivamente.
- (a) Faça a representação triangular dos perfis eleitorais.
  - (b) Determine os resultados das votações plural e antiplural.
  - (c) Trace os segmento dos resultados eleitorais.
  - (d) Determine analiticamente os valores de  $s$  para os quais se verifica cada um dos resultados possíveis.
7. Numa eleição com três candidatos, o resultado em percentagem do voto plural foi  $(50, 30, 20)$ , e do voto antiplural foi  $(25, 35, 40)$ .
- (a) Marque no triângulo eleitoral os resultados das duas votações.
  - (b) Trace o segmento de recta que os une e interprete os resultados.



- 
10. (a) Determine o valor de  $s$  para o qual  $p_s$  é a média de  $p_0$  e  $p_1$ .  
[Recorde que  $p_s = (1 - s)p_0 + sp_1$ .]
- (b) Determine o valor de  $s$  para o qual  $q_s$  é o ponto médio do segmento de recta de variação dos resultados eleitorais  $[q_0, q_1]$ .  
[Recorde que  $q_s = (1 - \frac{2s}{1+s})q_0 + (\frac{2s}{1+s})q_1$ .]
- (c) Compare os resultados que obteve com os resultados do exercício anterior.
11. Mostre que se um perfil eleitoral for da forma  $p = (n, k, n, k, n, k)$ , com  $n$  e  $k$  dois inteiros positivos, então o resultado da eleição é um empate completo, qualquer que seja o método posicional escolhido para contar os votos, i.e  $q_s = (1/3, 1/3, 1/3)$ . Qual é o aspecto do segmento de recta dos resultados eleitorais?

## 5 O problema inverso

Até aqui tratámos do problema de calcular o resultado de uma eleição, a partir das preferências dos eleitores. Mas será que é possível fazer o contrário? É claro que existem casos em que os mesmos resultados podem ser atingidos por perfis eleitorais diferentes. Por exemplo, se considerarmos  $\mathbf{p}=(5, 0, 4, 0, 7, 0)$  e  $\mathbf{p}'=(3, 2, 2, 2, 5, 2)$ , em ambos os casos tem-se  $p_s = (5 + 4s, 7 + 5s, 4 + 7s)$ .

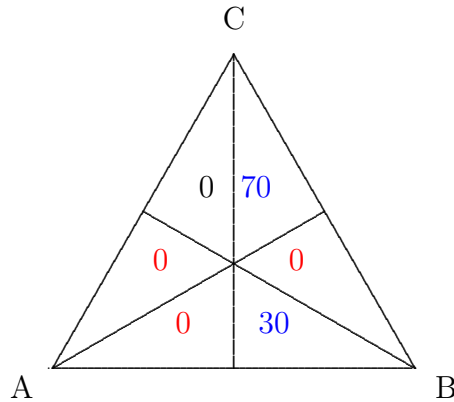
Vamos-nos restringir ao caso das eleições com três candidatos. Vimos que conhecidos os resultados de duas eleições posicionais, as eleições plural e antiplural, é possível conhecer o resultados das eleições segundo qualquer método posicional. Vamos agora ver dois exemplos, em que partir dos resultados da eleição plural e antiplural vamos determinar o respectivo perfil eleitoral (pode não ser único). No primeiro caso, vamos resolver o problema através de simples observação e no segundo de uma forma mais sistemática.

### Exemplo 1

Sejam  $p_0 = (0, 30, 70)$  e  $p_1 = (30, 100, 70)$ . As primeiras preferências dos eleitores são dadas por  $p_0$  e as segundas por  $p_1 - p_0 = (30, 70, 0)$ .

Começamos por preencher o triângulo com os zeros. Como  $A$  não tem primeiras preferências e  $C$  não tem segundas preferências, nas regiões 1, 2 e 5 os valores são 0.

$p_0(B) = 30$  é a soma dos valores das regiões 5 e 6. Logo a região 6 tem o valor 30. As segundas preferências de  $B$  são 70, mas na região 1 o valor é 0, logo na região 4 tem-se o valor 70. Finalmente na região 3 só pode ser 0.



A resolução do problema anterior por simples observação foi possível devido à existência de vários valores 0, quer nas primeiras, quer segundas preferências. No caso geral, temos que resolver este problema analiticamente.

### Exemplo 2

Sejam  $p_0 = (8, 9, 17)$  e  $p_1 = (19, 25, 24)$ . As primeiras preferências dos eleitores são dadas por  $p_0$  e as segundas por  $p_1 - p_0 = (11, 16, 7)$ . Estes resultados são os resultados de um dado perfil  $\mathbf{p} = (a, b, c, d, e, f)$ . Para este perfil (genérico), tem-se que  $p_0 = (a + b, e + f, c + d)$  e  $p_1 - p_0 = (c + f, a + d, b + e)$ .

$$\text{Igualando ambas as expressões, vem que: } \begin{cases} (8, 9, 17) = (a + b, e + f, c + d) \\ (11, 16, 7) = (c + f, a + d, b + e) \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 8 \\ e + f = 9 \\ c + d = 17 \\ c + f = 11 \\ a + d = 16 \\ b + e = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ - - - \\ - - - \\ - - - \\ - - - \\ 8 - a + e = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ a - 1 + f = 9 \\ - - - \\ - - - \\ - - - \\ e = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 - a \\ f = 10 - a \\ - - - \\ c + 10 - a = 11 \\ - - - \\ e = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ f = 10 - a \\ 1 + a + d = 17 \\ c = 1 + a \\ - - - \\ e = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ f = 9 - a \\ d = 16 - a \\ c = 1 + a \\ a + 16 - a = 16 \\ e = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ c = a + 1 \\ d = 16 - a \\ e = a - 1 \\ f = 9 - a \end{cases} .
\end{aligned}$$

Se escolhermos o valor de  $a$  de modo conveniente, então sabemos o perfil eleitoral. A única restrição é que todos os valores devem ser positivos, ou seja:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ 8 - a \geq 0 \\ a + 1 \geq 0 \\ 16 - a \geq 0 \\ a - 1 \geq 0 \\ 9 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 8 \geq a \\ a \geq -1 \\ 16 \geq a \\ a \geq 1 \\ 9 \geq a \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 8 .$$

Uma das escolhas possíveis é  $a = 1$ , e nesse caso  $\mathbf{p}=(1, 7, 2, 15, 0, 8)$ .

De maneira mais prática, podemos começar com  $a = 0$  e deduzir os outros valores. Se algum dos valores der negativo, aumentamos o valor de  $a$  de modo a que esse valor deixe de ser negativo.

Pode acontecer que os resultados conhecidos não sejam  $p_0$  e  $p_1$ , mas outros dois. Nesse caso, deduzimos os valores de  $p_0$  e  $p_1$  a partir da fórmula:

$$p_s = (1 - s)p_0 + sp_1 ,$$

e depois procedemos como nos casos anteriores.

Por exemplo se  $p_{\frac{1}{2}} = (6, 5, 1)$  e  $p_{\frac{1}{4}} = (5.5, 4, 0.5)$ , então

$$\begin{cases} \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_1 = p_{\frac{1}{2}} \\ \frac{3}{4}p_0 + \frac{1}{4}p_1 = p_{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 + p_1 = 2p_{\frac{1}{2}} \\ 3p_0 + p_1 = 4p_{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 2p_{\frac{1}{2}} - p_0 \\ 3p_0 + 2p_{\frac{1}{2}} - p_0 = 4p_{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 2p_{\frac{1}{2}} - p_0 \\ 2p_0 = -2p_{\frac{1}{2}} + 4p_{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 2(6, 5, 1) - p_0 \\ 2p_0 = -2(6, 5, 1) + 4(5.5, 4, 0.5) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 2(6, 5, 1) - p_0 \\ 2p_0 = (-12, -10, -2) + 4(22, 16, 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = (7, 7, 2) \\ p_0 = (5, 3, 0) \end{cases} .$$

De maneira muita idêntica para o que foi feito para o resultado absoluto, podemos deduzir as preferências dos eleitores a partir dos resultados relativos das eleições. Por maioria de razão, ao mesmo resultado podem corresponder vários perfis eleitorais diferentes. Desde logo, porque a votação relativa não dá nenhuma indicação sobre o número de eleitores.

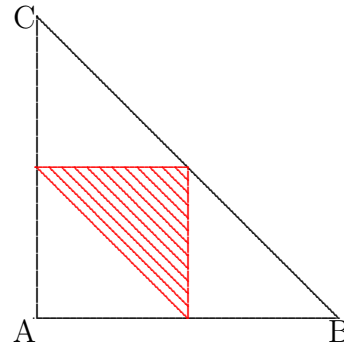
### 5.1 Incongruências

O objectivo desta subsecção é mostrar que nem todos os resultados de uma eleição são admissíveis. Isto quer simplesmente dizer que existem algumas regras que os resultados *posicionais* têm de observar. Algumas dessas regras dizem a respeito a um método tomado independentemente e outras a comparações entre dois deles.

Em tudo o que se segue,  $E = p_0(A) + p_0(B) + p_0(C)$  é o número de eleitores de uma eleição com os candidatos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Se um acontecimento é apresentado para um candidato  $A$ , então ele válido para todos os outros.

1. (a)  $p_1(A) + p_1(B) + p_1(C) = 2(p_0(A) + p_0(B) + p_0(C)) = 2E$   
 (b)  $p_s(A) + p_s(B) + p_s(C) = (1 + s)(p_0(A) + p_0(B) + p_0(C)) = (1 + s)E$
2. (a)  $p_1(A) \geq p_0(A) \Rightarrow \frac{p_1(A)}{2E} \geq \frac{p_0(A)}{2E} \Leftrightarrow q_1(A) \geq \frac{q_0(A)}{2}$   
 (b)  $p_s(A) \geq p_0(A) \Rightarrow \frac{p_s(A)}{(1 + s)E} \geq \frac{p_0(A)}{(1 + s)E} \Leftrightarrow q_s(A) \geq \frac{q_0(A)}{1 + s}$
3. (a)  $p_1(A) \leq E \Rightarrow q_1(A) = \frac{p_1(A)}{2E} \leq \frac{E}{2E} = \frac{1}{2}$   
 (b)  $p_s(A) \leq E \Rightarrow q_s(A) = \frac{p_s(A)}{(1 + s)E} \leq \frac{E}{(1 + s)E} = \frac{1}{1 + s}$

O resultado 3.(a) significa geometricamente que a representação de  $q_1$  não pode estar em todo o triângulo, mas apenas numa parte dele. A essa zona chama-se *Zona Antiplural* (a vermelho na figura).



## 5.2 Exercícios

1. Determine um perfil eleitoral (podem existir vários) tal que:
  - (a)  $p_0 = (100, 0, 0)$  e  $p_1 = (100, 70, 30)$ ;
  - (b)  $p_0 = (10, 5, 5)$  e  $p_{1/2} = (13, 7, 10)$ ;
  - (c)  $p_{1/4} = (15, 15, 15)$  e  $p_{1/2} = (15, 21, 18)$ ;
  - (d)  $q_0 = (1, 0, 0)$  e  $q_1 = (0.5, 0.25, 0.25)$ ;
  - (e)  $q_{1/2} = (1/3, 1/3, 1/3)$  e  $q_0 = (1/2, 0, 1/2)$ ;
  - (f)  $q_{1/3} = (1/3, 1/3, 1/3)$  e  $q_0 = (4/9, 1/6, 7/18)$ .
  
2. Seja A um candidato numa eleição com três candidatos. Mostre que se for usada a Contagem de Borda, A não pode ter mais do que  $2/3$  dos votos, ou seja  $q_{1/2}(A) \leq 2/3$ . Represente no triângulo eleitoral a zona dos resultados admissíveis para a Contagem de Borda.
  
3. Diga porque é que não existe nenhum perfil eleitoral tal que:
  - (a)  $q_s = (0, 0.2, 0.9)$ ;
  - (b)  $p_s = (10, 0, 2)$  e  $q_s = (0.6, 0, 0.4)$ ;
  - (c)  $p_0 = (10, 3, 7)$  e  $p_1 = (8, 12, 20)$ ;
  - (d)  $q_0 = (1, 0, 0)$  e  $q_1 = (1/3, 1/3, 1/3)$ ;
  - (e)  $q_1 = (2/3, 1/6, 1/6)$ ;
  - (f)  $q_{1/2} = (0, 0.2, 0.8)$ ; (ver Ex. 2)
  - (g)  $q_{1/2} = (2/3, 0, 1/3)$  e  $q_1 = (0.4, 0.2, 0.4)$ ;
  - (h)  $q_{1/2} = (2/3, 0, 1/3)$  e  $q_0 = (0.99, 0, 0.01)$ .
  
4. Suponha que numa eleição com três eleitores e três candidatos o resultado da votação plural é  $(2, 0, 1)$ . Será que é possível saber quem teria ganho se fosse usada a Contagem de Borda?

## 6 Paradoxos eleitorais

Nesta secção vamos estudar o problema de descobrir, se possível, qual é a melhor maneira de contar os votos de uma eleição. Estudámos até aqui vários métodos, mas haverá algum melhor do que outros?

Informalmente podemos dizer que um paradoxo eleitoral é uma eleição onde podem acontecer resultados contraditórios sem que haja mudança de opinião (nem de voto) dos eleitores.

**Resultado 11** 1. Para um conjunto de candidatos  $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ,  $n \geq 3$ , é possível encontrar um perfil eleitoral de modo que:

- (i)  $C_j$  ganha a eleição se cada eleitor escolher  $j$  candidatos, ou seja quando é usado o vector eleitoral  $(\underbrace{1, \dots, 1}_j, 0, \dots, 0)$ ;   
 *j vezes*
- (ii)  $C_n$  ganha a Contagem de Borda, ou seja quando é usado o vector eleitoral  $(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ .

2. Para quatro ou mais candidatos, existe um perfil eleitoral onde cada um dos candidatos pode ser ordenado em qualquer das posições, dependendo apenas do método posicional utilizado.

O Resultado 11(2) não se verifica para eleições com apenas três candidatos. Veja o Exercício 2 no fim da secção.

É obviamente contraditório ou paradoxal que seja possível obter vencedores diferentes se forem usados métodos de votação diferentes, o que aliás já tínhamos verificado anteriormente. Este problema trás-nos de volta à questão inicial, será que existe algum procedimento eleitoral que seja perfeito? Ou pelo menos preferível aos outros? De seguida vamos tentar responder a estas perguntas.

### 6.1 Teorema de Arrow

Existem vários procedimentos eleitorais e com muita frequência os seus resultados são contraditórios. Qual é então o melhor procedimento? Antes de tentar responder a esta pergunta, talvez seja melhor fazer outra pergunta:

Que critérios (razoáveis) deve satisfazer um bom procedimento eleitoral?

Cada um de nós pode ter ideias diferentes, mas os três critérios que se seguem parece-me que facilmente podem ser consensuais.

1. **Crítério de liberdade.** Cada eleitor ordena os candidatos livremente, desde que o faça de forma transitiva. (i.e. se um eleitor prefere  $A$  a  $B$  e prefere  $B$  a  $C$ , então prefere  $A$  a  $C$ ).
2. **Crítério de Pareto ou da unanimidade.** Se todos os eleitores preferem o candidato  $A$  ao candidato  $B$ , então  $A$  vence  $B$  nas eleições.
3. **Crítério da independência das alternativas irrelevantes.** Se um candidato desiste de uma eleição, a ordenação dos restantes candidatos não é alterada.

**Teorema 12 (Teorema de Arrow)** *Numa eleição com três ou mais candidatos, o único procedimento eleitoral que verifica estas três condições é uma **DITADURA**, ou seja o resultado final coincide sempre com a escolha de um eleitor fixo.*

Por Ditadura entende-se um sistema em que cada eleição é decidida apenas por uma pessoa, não necessariamente sempre mesma. Essa pessoa pode, por exemplo, ser escolhida por sorteio entre todas as pessoas com direito de voto. Neste caso teríamos uma Ditadura democrática, mas obviamente o sistema não seria bom.

Este resultado indica que não existe um sistema óptimo. No entanto, nem todos os procedimentos são igualmente maus. Para melhor os compararmos, vamos introduzir mais um critério.

4. **Crítério da monotonia.** Se o candidato  $X$  vence uma eleição e numa reeleição as únicas alterações são a favor de  $X$ , então  $X$  continua a ser o vencedor.

O critério de liberdade não depende da maneira como os votos são contados, mas apenas da maneira como a votação é feita. Para os restantes critérios, a tabela seguinte indica para alguns dos métodos que estudámos se satisfazem ou não os critérios. É fácil verificar que o critério mais difícil de satisfazer é o critério da independência das alternativas irrelevantes.

	Pareto	Monotonia	I. A. I.
Plural	Sim	Sim	Não
Antiplural	Não	Sim	Não
Borda	Sim	Sim	Não
2 voltas	Sim	Não	Não
<i>Runoff</i>	Sim	Não	Não

Os resultados negativos são provados através de exemplos. Vejamos então dois exemplos.

## Exemplo 1

O voto plural não satisfaz o critério da independência das alternativas irrelevantes.

ordenação	votos
$A \succ B \succ C$	10
$B \succ C \succ A$	8
$C \succ A \succ B$	4

Se na eleição cujo os resultados se mostram na tabela for usada a votação plural, a ordenação final é  $A \succ B \succ C$ . No entanto se o candidato  $B$  desistir, o ordenação dos restantes candidatos é alterada, e teríamos o candidato  $C$  com 12 votos à frente do candidato  $A$  que manteria os mesmos 10 votos.

## Exemplo 2

O voto maioritário a duas voltas não satisfaz o critério da Monotonia.

ordenação	votos
$A \succ B \succ C$	8
$B \succ A \succ C$	2
$B \succ C \succ A$	5
$C \succ A \succ B$	6

Nesta eleição passam à segunda volta os candidatos  $A$  e  $B$  com 8 e 7 votos, respectivamente. Na segunda volta o vencedor seria  $A$  com 14 votos.

O que aconteceria se os dois eleitores que votaram  $B \succ A \succ C$ , mudassem o seu voto para  $A \succ B \succ C$ ?

A mudança deveria favorecer o candidato  $A$ , no entanto neste caso a segunda volta seria disputada entre  $A$  e  $C$  e  $C$  ganharia com 11 votos contra 10. Ou seja, uma mudança aparentemente favorável a  $A$  acabou por provocar a sua derrota.

## 6.2 Contagem de Borda

Pelo que ficou visto atrás, não é possível decidir de forma absoluta qual o melhor procedimento eleitoral. Alguns são aliás muito difíceis de comparar.

No entanto, se compararmos apenas os métodos posicionais, a contagem de Borda tem características que nos permitem dizer que é menos susceptível a provocar resultados paradoxais do que qualquer outro método posicional. Vejamos então algumas vantagens da Contagem de Borda.

1. A Contagem de Borda é o único método posicional onde a ordenação final não pode ser oposta à ordenação de Condorcet (comparação par a par).
2. O vencedor de Condorcet nunca pode ser último na Contagem de Borda. (O Exercício 7 é o caso particular para uma eleição com apenas três canddatos.)
3. Se num determinado perfil eleitoral a Contagem de Borda permite resultados paradoxais, então qualquer outro método posicional também permite. O mesmo não é verdade para mais nenhum método posicional.

### 6.3 Exercícios

1. Considere um colégio eleitoral composto por 13 membros. Numa escolha entre três hipóteses, as preferências dos membros do colégio ficaram assim definidas,  $A \succ B \succ C$ : 4 votos,  $A \succ C \succ B$ : 3 votos,  $C \succ B \succ A$ : 6 votos.
  - (a) Verifique que usando os vectores posicionais  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(2, 1, 0)$ , cada uma das hipóteses pode ser a escolhida.
  - (b) Suponha que existe uma quarta hipótese  $D$  que é a terceira preferida de todos os eleitores. Observando a alínea anterior, verifique que existe um método posicional em que cada uma das quatro hipóteses pode ser a escolhida.
  - (c) Construa um exemplo com cinco hipóteses, onde cada hipótese é a escolhida para um determinado método posicional. Será que podia usar o mesmo tipo de construção para construir um exemplo com dez hipóteses?
2. Considere as seis regiões em que está dividido o triângulo eleitoral. Repare que um segmento de recta nunca atravessa mais do que quatro regiões.  
Explique porque é que se num dado perfil eleitoral os três candidatos podem ser vencedores para algum método posicional, então um deles nunca pode ser último. Será isto verdade para quatro candidatos?
3. Use um dos exemplos do Exercício 1 na página 22 para comprovar que o voto plural, a Contagem de Borda e o voto maioritário a duas voltas não verificam o critério da *Independência das alternativas irrelevantes* (Teorema de Arrow).
4. Construa um exemplo que mostre que a votação antiplural não satisfaz o critério de *Pareto*.
5. (a) Construa um exemplo que mostre, ao mesmo tempo, que a voto maioritário a duas voltas e o método Runoff não satisfazem o critério da *Monotonia*.  
(b) Construa agora um exemplo, onde apenas um deles não satisfaça o critério da *Monotonia*.
6. Será que o Exercício 3 na página 28 é um exemplo de que as votações plural ou antiplural não satisfazem o critério da *Independência das alternativas irrelevantes*?
7. Numa eleição com três candidatos, e considerando o perfil eleitoral  $p = (p_1, \dots, p_6)$ , o candidato A é o vencedor de Condorcet se  $p_1 + p_2 + p_3 > p_4 + p_5 + p_6$  e  $p_1 + p_2 + p_6 > p_4 + p_5 + p_3$ .  
Mostre que se for usada a Contagem de Borda, então A não pode ser último.  
[Sugestão: Suponha que A é último e encontre uma contradição.]

## 7 Estratégias

Pelo acabámos de ver, as mesmas opiniões podem produzir resultados eleitorais diferentes. Claro que isso levanta o problema de saber se é possível estabelecer uma estratégia que favoreça a nossa opinião em relação às dos outros.

Uma estratégia eleitoral é a maneira como um determinado interveniente: eleitor, candidato ou organizador das eleições, tenta influenciar o resultado das eleições. As estratégias dividem-se em três tipos, dois dos quais já são nossos conhecidos.

### 1. **Escolher o método de voto apropriado.** (estratégia de quem organiza as eleições)

Como já vimos várias vezes, a escolha do método de votação apropriado pode influenciar o resultado final sem que haja mudança de opinião dos eleitores. É por isso importante que o método de votação seja decidido antecipadamente.

Este tipo de caso por vezes verifica-se (voluntária ou involuntariamente) em comissões pequenas, onde a votação é precedida de discussão, sendo por isso possível ter uma ideia antecipada do sentido de voto dos eleitores.

### 2. **Desistência.** (estratégia dos candidatos)

A desistência de um ou mais candidatos pode implicar uma mudança no vencedor de uma eleição. Este facto só se verifica se o método não satisfizer o *Critério da independência das alternativas irrelevantes*.

Pode ser usado em votações em que as posições dos eleitores são públicas ou existem sondagens indicativas. Nas eleições entre estados, com frequência um país desiste porque é público que não tem apoios suficientes. Um exemplo é a eleição dos membros não permanentes do Conselho de Segurança da ONU. A desistência já foi utilizada como estratégia em anteriores eleições presidenciais em Portugal

### 3. **Voto estratégico.** (estratégia dos eleitores)

Existem situações em que o resultado final de uma eleição pode ser mais próximo da vontade de um eleitor se este votar estrategicamente e não sinceramente. O voto estratégico tem mais efeito se o resultado de dois ou mais candidatos numa eleição for muito próximo.

Todos os métodos são susceptíveis de manipulação através do voto estratégico. Em eleições políticas ouvimos com frequência falar do voto estratégico sob a designação de *voto útil*.



## 7.1 Voto estratégico

O procedimento eleitoral ideal não deve poder ser alvo de estratégia por parte dos eleitores. Não existe nenhum procedimento nessas condições.

Como exemplo vamos estudar em que situações é que o voto estratégico pode ser útil numa eleição com três candidatos se for usado um método posicional. Para mais do que três candidatos pode ser feito um estudo similar e em eleições com dois candidatos cada eleitor vota no seu candidato preferido não havendo por isso estratégia possível.

Suponhamos que numa eleição com três candidatos  $A$ ,  $B$  e  $C$  é conhecido que o candidato  $C$  não tem hipóteses de ganhar, e que a eleição é muito equilibrada entre  $A$  e  $B$ .

A tabela mostra como deverão os diversos eleitores votar e para que métodos posicionais  $(1, s, 0)$  têm as estratégias maior eficácia.

Cada eleitor pode ordenar os candidatos de seis maneiras diferentes (recorde a representação triangular). Vamos dividi-las em dois grupos, aquelas em que os eleitores preferem  $A$  em relação a  $B$  e aquelas em que preferem  $B$  em relação a  $A$ .

Eleitores que preferem  $A$  em relação a  $B$ .

Sincero	Estratégico	eficácia %	ef. máxima	ef. nula
$A \succ B \succ C$	$A \succ C \succ B$	$s \times 100$	antiplural	plural
$A \succ C \succ B$	não existe	–	–	–
$C \succ A \succ B$	$A \succ C \succ B$	$(1 - s) \times 100$	plural	antiplural

Eleitores que preferem  $B$  em relação a  $A$ .

Sincero	Estratégico	eficácia %	ef. máxima	ef. nula
$B \succ A \succ C$	$B \succ C \succ A$	$s \times 100$	antiplural	plural
$B \succ C \succ A$	não existe	–	–	–
$C \succ B \succ A$	$B \succ C \succ A$	$(1 - s) \times 100$	plural	antiplural

Obviamente,  $A$  ou  $B$  podem ser substituídos por  $C$ , fazendo as adaptações convenientes. A eficácia de qualquer das estratégias, quando usada a Contagem de Borda, é de 50%. Nenhum outro método posicional tem esta característica.

Não é apenas quando são usados métodos posicionais que é possível utilizar o voto estratégico. Aliás qualquer procedimento eleitoral é susceptível de ser manipulado através do voto estratégico.

**Teorema 13 (Teorema de Gibbard-Satterthwaite)** *Numa eleição com três ou mais candidatos, independentemente do método de votação utilizado, existem situações em que é do interesse de um eleitor votar estrategicamente.*

## 7.2 Eleições Presidenciais

Nas eleições políticas em Portugal existem poucas situações de escolha uninominal em oposição à escolha representativa, que é o habitual no nosso sistema. As exceções são a eleição do Presidente da República e, até certo ponto, as eleições dos Presidentes de Câmara e de Junta de Freguesia, que são os cabeças de lista do partido mais votado. Estes últimos são eleitos por uma votação plural, ainda que com a restrição de que a mesma votação serve para eleger a Câmara Municipal e a Assembleia de Freguesia, respectivamente. Este facto atenua a existência do voto útil pois muitos (por vezes poucos) eleitores votam com a intenção de eleger vereadores e não o Presidente da Câmara. No entanto em muitas destas eleições podemos ver uma das principais características do voto plural, a concentração dos votos nos dois principais concorrentes<sup>5</sup>.

Nas eleições para a Presidência da República é usado o voto maioritário a duas voltas para permitir que na primeira volta os eleitores votem sinceramente, sem terem que se preocupar com estratégias. No entanto, este método pode provocar uma concentração de votos em três ou quatro candidatos na primeira volta, ou seja naqueles que os eleitores julguem ter mais hipóteses de passar à segunda volta.

O Teorema de Gibbard-Satterthwaite indica que em todos os métodos pode haver situações em que seja útil votar estrategicamente, mas pressupõe que os eleitores não mudam de opinião durante a eleição. Ora, nas eleições Presidenciais os eleitores votam nas duas voltas de forma independente. Em certas situações, um grupo razoavelmente pequeno de eleitores pode votar estrategicamente na primeira volta e dessa forma influenciar o resultado final das eleições. Vamos ver de seguida um exemplo concreto onde isso poderia ter acontecido.

As eleições Presidenciais de 1986 foram as mais disputadas da nossa curta democracia até à data, 2006, e foram as únicas em que houve segunda volta.

A tabela mostra os resultados nas duas voltas das eleições Presidenciais de 1986. Apesar de Freitas do Amaral estar perto da maioria absoluta na primeira, a concentração dos votos da esquerda em Mário Soares fez com que ele fosse eleito.

---

<sup>5</sup>O mesmo fenómeno acontece cada vez mais nas eleições legislativas. Apesar da eleição ser para a Assembleia da República, no espírito de muitos eleitores está a eleição do Primeiro-Ministro.

candidato	votos	%
Freitas do Amaral (A)	2629597	46,31
Mário Soares (B)	1443683	25,43
Salgado Zenha (C)	1185867	20,88
Lurdes Pintasilgo (D)	418961	7,38

candidato	votos	%
Mário Soares	3010756	51,18
Freitas do Amaral	2872064	48,82

Dados tirados do sítio da Comissão Nacional de Eleições em [www.cne.pt](http://www.cne.pt).

A partir destes dados podemos tentar deduzir o quadro de preferências individuais dos eleitores. Podemos começar por supor que os eleitores nas duas voltas foram os mesmos. A partir dos resultados das duas voltas e das posições políticas dos candidatos, creio que este seria um quadro de preferências dos eleitores verosímil (na minha opinião, claro). Os resultados são apresentados em percentagem e arredondados à unidade e os candidatos designados pelas letras A, B, C, D segundo a tabela anterior.

preferências	% de votos
$A \succ B \succ C \succ D$	45
$A \succ B \succ D \succ C$	3
$B \succ C \succ A \succ D$	10
$B \succ C \succ D \succ A$	10
$B \succ A \succ C \succ D$	4
$C \succ B \succ D \succ A$	11
$C \succ D \succ B \succ A$	10
$D \succ C \succ B \succ A$	7

A partir desta tabela podemos concluir que Mário Soares foi um vencedor justo, pois de acordo com estas preferências seria o vencedor para a maioria dos procedimentos eleitorais que estudámos até agora. A única excepção significativa é o voto plural.

Mas podemos fazer outro tipo de reflexões. O que teria acontecido se, por exemplo, 5% dos eleitores que preferiam Freitas do Amaral tivessem votado Salgado Zenha? De acordo com o quadro de preferências apresentado, o vencedor seria Freitas do Amaral ganhando na segunda volta a Salgado Zenha com 52% dos votos.

Este exemplo serve apenas para mostrar que um sistema com duas ou mais voltas em que os eleitores tenham oportunidade de mudar de opinião entre as votações é muito facilmente manipulável. Se pensarmos num colégio eleitoral pequeno em vez de uma eleição nacional, então é mais fácil a coordenação entre os eleitores o que aumenta o perigo da utilização do voto estratégico.

### 7.3 Exercícios

1. Um certo prêmio literário é atribuído por um júri composto por dez elementos. No ano de 2004 chegaram à fase final cinco candidatos, a Ana, a Carla, o João, o Rui e o Tiago. O presidente do júri, além de uma ética duvidosa, tinha uma preferência pelo Rui e estava interessado em que ele fosse o vencedor.

preferências	votos
Ana $\succ$ Carla $\succ$ João $\succ$ Rui $\succ$ Tiago	6
Rui $\succ$ Carla $\succ$ João $\succ$ Tiago $\succ$ Ana	2
Tiago $\succ$ Rui $\succ$ João $\succ$ Carla $\succ$ Ana	2

- (a) Suponhamos que o presidente do júri lhe pedia para indicar um método de contagem dos votos em que o Rui fosse o vencedor. Seria isso possível? Justifique.
- (b) Como ele achou difícil convencer os outros membros do júri desse método, pediu que lhe indicasse um método mais prático onde o vencedor fosse o João. Qual seria?
- (c) Se o pedido de ajuda fosse sincero, qual o método de contagem que aconselharia? Porquê?
2. Numa votação, para escolher entre três candidatos, registaram-se as seguintes preferências individuais.

preferências	votos
X $\succ$ Z $\succ$ Y	10
Z $\succ$ Y $\succ$ X	2
Y $\succ$ X $\succ$ Z	15

- (a) Determine o resultado da votação utilizando a Contagem de Borda.
- (b) Se alguns eleitores que preferem  $Y$  mudassem estrategicamente o seu voto para  $Y \succ Z \succ X$ ,  $Y$  poderia ser o vencedor. Qual o número mínimo de eleitores que teriam que usar essa estratégia para que  $Y$  ganhasse a eleição?
- (c) Seria possível que como consequência dessa estratégia  $X$  ficasse em último?
- (d) Teriam os "apoiantes" de  $X$  uma contra-estratégia?

## Referências

- [1] Donald Saari, *Chaotic Elections! A Mathematician Looks at Voting*, AMS, 2001.
- [2] P. Tannenbaum e R. Arnold, *Excursions in Modern Mathematics*, Prentice-Hall, 2001.
- [3] S. Brams e A. Taylor, *Fair Division. From cake-cutting to dispute resolution*, Cambridge University Press, 1999, reprint.
- [4] Comissão Nacional de Eleições, [www.cne.pt](http://www.cne.pt) .