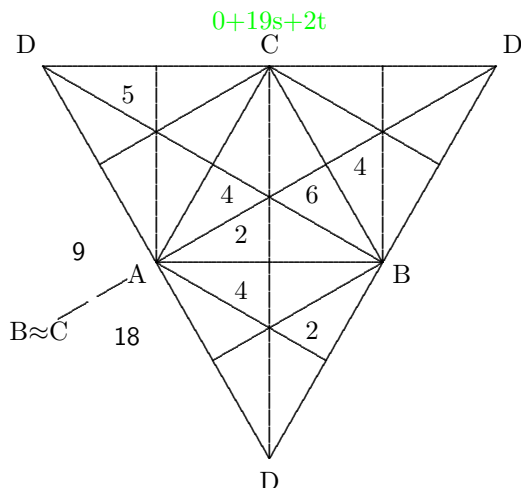


21. Considere uma eleição com três candidatos e os resultados da eleição escritos como vector ordenado $p = (p_1, \dots, p_6)$ induzido pela representação triangular.
- (a) Para cada um dos seguintes perfis eleitorais p , determine o resultado da eleição, quando é usado um vector eleitoral $W_s = (1, s, 0)$.
- i. $p = (71, 71, 0, 0, 0, 0)$; iii. $p = (0, 22, 0, 0, 22, 0)$;
ii. $p = (8, 0, 0, 7, 3, 0)$; iv. $p = (8, 2, 10, 4, 2, 10)$.
- (b) Em cada um dos casos, determine o valor de s para o qual o resultado da eleição, p_s , é a média do resultado da votação plural, p_0 , e da votação antiplural, p_1 .
- (c) Calcule o resultado normalizado da eleição, q_s , e represente o segmento de recta da variação dos resultados eleitorais $[q_0, q_1]$.
- (d) Determine o ponto médio do segmento de recta dos resultados eleitorais.
22. (a) Determine o valor de s para o qual p_s é a média de p_0 e p_1 .
[Recorde que $p_s = (1 - s)p_0 + sp_1$.]
- (b) Determine o valor de s para o qual q_s é o ponto médio do segmento de recta de variação dos resultados eleitorais $[q_0, q_1]$.
[Recorde que $q_s = (1 - \frac{2s}{1+s})q_0 + (\frac{2s}{1+s})q_1$.]
- (c) Compare os resultados que obteve com os resultados do exercício anterior.
23. Determine um perfil eleitoral (podem existir vários) tal que:
- (a) $p_0 = (100, 0, 0)$ e $p_1 = (100, 70, 30)$; (d) $q_0 = (1, 0, 0)$ e $q_1 = (0.5, 0.25, 0.25)$;
(b) $p_0 = (10, 5, 5)$ e $p_{1/2} = (13, 7, 10)$; (e) $q_{1/2} = (1/3, 1/3, 1/3)$ e $q_0 = (1/2, 0, 1/2)$;
(c) $p_{1/4} = (15, 15, 15)$ e $p_{1/2} = (15, 21, 18)$; (f) $q_{1/3} = (1/3, 1/3, 1/3)$ e $q_0 = (4/9, 1/6, 7/18)$.
24. Seja A um candidato numa eleição com três candidatos. Mostre que se for usada a Contagem de Borda, A não pode ter mais do que $2/3$ dos votos, ou seja $q_{1/2}(A) \leq 2/3$. Represente no triângulo eleitoral a zona dos resultados admissíveis para a Contagem de Borda.
25. Diga porque é que não existe nenhum perfil eleitoral tal que:
- (a) $q_s = (0, 0.2, 0.9)$; (e) $q_1 = (2/3, 1/6, 1/6)$;
(b) $p_s = (10, 0, 2)$ e $q_s = (0.6, 0, 0.4)$; (f) $q_{1/2} = (0, 0.2, 0.8)$; (ver Ex. 24)
(c) $p_0 = (10, 3, 7)$ e $p_1 = (8, 12, 20)$; (g) $q_{1/2} = (2/3, 0, 1/3)$ e $q_1 = (0.4, 0.2, 0.4)$;
(d) $q_0 = (1, 0, 0)$ e $q_1 = (1/3, 1/3, 1/3)$; (h) $q_{1/2} = (2/3, 0, 1/3)$ e $q_0 = (0.99, 0, 0.01)$.
26. Mostre que se um perfil eleitoral for da forma $p = (n, k, n, k, n, k)$, com n e k dois inteiros positivos, então o resultado da eleição é um empate completo ($q_s = (1/3, 1/3, 1/3)$), qualquer que seja o método posicional escolhido para contar os votos. Qual é o aspecto do segmento de recta dos resultados eleitorais?
27. Numa eleição com três candidatos, e considerando o perfil eleitoral $p = (p_1, \dots, p_6)$, o candidato A é o vencedor de Condorcet se $p_1 + p_2 + p_3 > p_4 + p_5 + p_6$ e $p_1 + p_2 + p_6 > p_4 + p_5 + p_3$.
- Mostre que A não pode ser último se for usada a Contagem de Borda.
- [Sugestão: Suponha que A é último e encontre uma contradição.]
28. Use um dos exemplos do exercício 10 para comprovar que o voto plural simples, a Contagem de Borda e o voto maioritário a duas voltas não verificam o critério da *Independência das alternativas irrelevantes* (Teorema de Arrow).
29. Construa um exemplo que mostre que a votação antiplural não satisfaz o critério de *Pareto*.

30. A figura representa o perfil eleitoral numa eleição com quatro candidatos.



- Complete a representação.
- A partir da representação geométrica, diga qual é o vencedor de Condorcet (se existir) e os vencedores das votações plural e antiplural.
- Faça a representação triangular da votação verificada após a desistência de D.
- Calcule de novo os resultados da eleição plural e antiplural. Qual das duas regista um resultado paradoxal?

31. Um certo prémio literário é atribuído por um júri composto por dez elementos. No ano de 2004 chegaram à fase final cinco candidatos, a Ana, a Carla, o João, o Rui e o Tiago. O presidente do júri, além de uma ética duvidosa, tinha uma preferência pelo Rui e estava interessado em que ele fosse o vencedor.

preferências	votos
Ana \succ Carla \succ João \succ Rui \succ Tiago	6
Rui \succ Carla \succ João \succ Tiago \succ Ana	2
Tiago \succ Rui \succ João \succ Carla \succ Ana	2

- Suponhamos que o presidente do júri lhe pedia para indicar um método de contagem dos votos em que o Rui fosse o vencedor. Seria isso possível? Justifique.
 - Como ele achou difícil convencer os outros membros do júri desse método, pediu que lhe indicasse um método mais prático onde o vencedor fosse o João. Qual seria?
 - Se o pedido de ajuda fosse sincero, qual o método de contagem que aconselharia? Porquê?
32. Numa votação, para escolher entre três candidatos, registaram-se as seguintes preferências individuais.

preferências	votos
X \succ Z \succ Y	10
Z \succ Y \succ X	2
Y \succ X \succ Z	15

- Determine o resultado da votação utilizando a Contagem de Borda.
 - Se alguns eleitores que preferem Y mudassem estrategicamente o seu voto para Y \succ Z \succ X, Y poderia ser o vencedor. Qual o número mínimo de eleitores que teriam que usar essa estratégia para que Y ganhasse a eleição?
 - Seria possível que como consequência dessa estratégia X ficasse em último?
 - Teriam os “apoiantes” de X uma contra-estratégia?
33. (Frequência de 2004/05) Diga se as afirmações que se seguem são verdadeiras ou falsas, referindo o resultado em que se baseia ou indicando um exemplo que suporte a sua resposta.
- A votação plural verifica o critério da *Independência das alternativas irrelevantes*.
 - Existe um perfil eleitoral tal que o resultado da votação plural é $p_0 = (50, 30, 20)$ e da votação antiplural é $p_1 = (100, 80, 20)$.
 - A utilização da contagem de Borda numa votação tem vantagens em relação à utilização do voto plural.