O Axioma da Escolha Numerável em Topologia

Gonçalo Gutierres da Conceição

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
2004

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, para obtenção do Grau de Doutor em Matemática, na especialidade de Matemática Pura.

Agradecimentos

A presente dissertação foi elaborada sob a orientação dos Professores Horst Herrlich e Maria Manuel Clementino a quem expresso o meu reconhecimento.

Ao Professor Horst Herrlich agradeço por ter sugerido o tema deste trabalho, assim como pelas questões, e comentários, que suscitou ao longo do seu desenvolvimento. À Professora Maria Manuel Clementino agradeço especialmente a dedicação e incentivo que dela sempre recebi, ainda que por vezes à distância, no decurso do meu trabalho.

Um agradecimento especial aos colegas do grupo de Teoria das Categorias da Universidade de Coimbra e do grupo "Kategorielle Methoden in Algebra und Topologie" da Universidade de Bremen, que me acompanharam neste período.

Agradeço ainda o apoio concedido pelas seguintes instituições: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Universität Bremen – Fach Mathematik, Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, Fundação para a Ciência e Tecnologia e Fundo Social Europeu.

Índice

Introdução

Topologists not only employed the Axiom [of Choice] with ease but often took it for granted. None exhibited the qualms of conscience which affected van der Waerden in Algebra – despite the fact several of the topologists were students of Luzin, an ardent constructivist. Perhaps topologists sensed that it was inappropriate, when engaged in so abstract an enterprise, to insist on constructive methods. Perhaps the enchanting landscape of abstraction and generalization freed them from any lingering constructivist scruples. Whatever the reason, they did not seriously entertain the question of what general topology might become in the absence of the Axiom. Like so many mathematicians before and afterward, the use of arbitrary choices became a second nature to them – if not, indeed, a reflex.

Gregory H. Moore [36, p.242]

O *Axioma da Escolha* é certamente um dos assuntos mais discutidos da História da Matemática. Ele foi formalmente introduzido por E. Zermelo [48] em 1904 para provar o Princípio da Boa Ordenação de Cantor [5].

Até essa data, o Axioma da Escolha era implicitamente usado na demonstração de vários outros resultados. Mesmo propriedades elementares dos números reais, já conhecidas na altura, não dispensam o uso de alguma forma de escolha. Propriedades deste tipo vão ser objecto da nossa atenção no segundo capítulo deste trabalho.

Depois de muitas discussões, sobre o seu novo axioma e a sua prova do Princípio da Boa Ordenação, Zermelo fez uma primeira tentativa para axiomatizar a Teoria dos Conjuntos [49, 50] e incluiu o Axioma da Escolha. Como o Axioma da Escolha não é universalmente aceite, são consideradas duas versões dessa teoria, uma com e outra sem o Axioma da Escolha. Devido aos melhoramentos introduzidos, especialmente, por A. Fraenkel esta teoria é chamada *Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel* e é denotada por ZF, sem o Axioma da Escolha, e por ZFC, com o Axioma da Escolha. Existem várias axiomatizações de ZF, mas para os nossos objectivos as suas diferenças não são importantes. Sendo mais específico, vou usar a axiomatização de T. J. Jech [31, p.35]. Apenas com pequenas modificações dos axiomas, é possível permitir a existência de átomos nesta teoria. A *Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com átomos*, sem o Axioma da Escolha, é denotada por ZFA. Aqui vamos trabalhar em ZF, sendo em geral os resultados também válidos em ZFA.

Hoje em dia, o Axioma da Escolha é usado sem hesitação em áreas como a Álgebra, a Análise, a Lógica, a Teoria dos Conjuntos e a Topologia. É aliás conhecido que muitos resultados da Análise Clássica são baseados no *Axioma da Escolha Dependente*, e que muitos resultados da Álgebra dependem do uso sistemático do *Teorema do Ideal Booleano Primo*. Estes dois princípios são propriamente mais fracos do que o Axioma da Escolha.

Devido à sua relação próxima com a Teoria dos Conjuntos, a Topologia foi sempre uma área muito afectada pelo uso do Axioma da Escolha. Ainda que actualmente ninguém questione a legitimidade do seu uso em Topologia, é interessante investigar quais as demonstrações em que algum princípio de escolha é usado e quais os teoremas que não podem ser provados sem o auxílio de um destes princípios.

Desde que F. Hausdorff introduziu a noção de espaço topológico que os topologistas usam livremente o Axioma da Escolha. Anos antes, M. Fréchet trabalhou com espaços definidos por sucessões e, ainda que por vezes implicitamente, usou frequentemente o Axioma da Escolha Dependente. Seguindo indirectamente os seus passos, o quarto capítulo deste texto é dedicado à investigação do papel do Axioma da Escolha na definição de certas classes de espaços topológicos através de limites. Tal como Fréchet, também Hausdorff, e depois deles outros como W. Sierpiński, K. Kuratowski, P. Alexandroff ou P. Urysohn, usou sem restrições o Axioma para obter os primeiros resultados sobre espaços métricos e topológicos. Muitos dos resultados inicialmente provados por estes Matemáticos necessitam apenas do *Axioma da Escolha Numerável*, em particular resultados envolvendo espaços separáveis, de Lindelöf e que verificam o Segundo Axioma da Numerabilidade. Apenas bastante mais tarde (com excepção de Sierpiński [41, 42]), o tipo de escolha envolvido em resultados deste género se tornou objecto de estudo (e.g. [15, 2, 33]). Esses problemas serão analisados na Secção 3.1.

Provavelmente o teorema de Topologia Geral cuja equivalência ao Axioma da Escolha é mais conhecida é o Teorema da Compacidade de Tychonoff [45]. Esta equivalência foi provada por J. L. Kelley [32] em 1950 e representa o começo do estudo, de uma forma sistemática, da influência do Axioma da Escolha em Topologia. De facto, o que A. Tychonoff provou foi que *o produto de um qualquer número de cópias do intervalo fechado* $[0, 1]$ *é compacto*, ainda que a sua demonstração possa ser usada no caso geral. É interessante realçar que o resultado original de Tychonoff é equivalente ao Teorema do Ideal Booleano Primo ([38, 37]), que, como já foi dito, é estritamente mais fraco do que o Axioma da Escolha.

Na primeira metade do século passado, alguns matemáticos identificaram o uso do Axioma da Escolha, ou algum dos seus derivados, na demonstração de vários resultados, principalmente em Teoria dos Conjuntos. No entanto, eles não tinham nenhuma ferramenta que lhes permitisse provar que esses resultados não eram demonstráveis em ZF. Este problema foi parcialmente resolvido pelo método de Fraenkel-Mostowski para gerar modelos de ZFA e satisfatoriamente solucionado em 1963 por P. J. Cohen [7], que criou o método *"forcing"* para construir modelos de ZF. Este método tornou possível investigar, em ZF, as relações entre diferentes princípios de escolha. Estas novas possibilidades suscitaram o interesse em descobrir qual a exacta "quantidade" de escolha necessária e suficiente para provar determinado resultado topológico.

As provas de independência que estão nesta dissertação são baseadas em propriedades conhecidas de diferentes modelos de ZF. A maioria desses modelos e as suas propriedades estão descritas no livro *Consequences of the Axiom of Choice* [28] de P. Howard e J. E. Rubin e na respectiva versão em linha [29]. (Esta última tem sido actualizada e facilita a pesquisa do leitor.)

O objectivo deste trabalho é investigar o papel que os princípios de escolha desempenham na demonstração de diversos resultados topológicos. Em particular, tenta-se encontrar para cada teorema de Topologia estudado um princípio de escolha equivalente.

Grande parte da investigação aqui produzida está relacionada com *conceitos numeráveis*. Entre outras são estudadas as classes de espaços: separáveis, de Lindelöf, sequencialmente compactos, que verificam o Primeiro (resp. Segundo) Axioma da Numerabilidade, de Fréchet-Urysohn e sequenciais. Por esse motivo, o Axioma da Escolha Numerável é na maioria das vezes suficiente para provar os resultados de ZFC que analisamos.

A partir deste ponto passamos a apresentar mais detalhadamente os assuntos abordados neste trabalho.

No primeiro capítulo são introduzidos conceitos e resultados, tanto de Teoria dos Conjuntos como de Topologia, que serão utilizados nos capítulos posteriores. Isto é necessário (inclusive para conceitos muito usuais) porque alguns conceitos topológicos podem ser descritos de diferentes maneiras, equivalentes em ZFC, mas que frequentemente não são equivalentes em ZF. Também são apresentados resultados topológicos habituais que ainda são válidos em ZF, assim como diferentes caracterizações do mesmo princípio de escolha.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo de propriedades topológicas dos números reais. Nele é mostrado que diversas propriedades usuais dos reais dependem de alguma forma de escolha. O capítulo está dividido em duas partes. Na primeira mostra-se que $\mathbb{R}$ é um espaço de Fréchet-Urysohn se e só se o Axioma da Escolha Numerável é válido para famílias de subconjuntos dos reais, e que estas duas condições são equivalentes a alguns outros resultados topológicos sobre os números reais. Na segunda parte é investigada a questão de saber quando é que $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial. Entre outras coisas, mostra-se que existem modelos de ZF onde $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial, mas não é um espaço de Fréchet-Urysohn.

O terceiro capítulo é intitulado *Propriedades Numeráveis* e nele são estudados os espaços separáveis, de Lindelöf e que verificam o Segundo Axioma da Numerabilidade. Na primeira das suas quatro secções é estudada a equivalência entre estas três propriedades para espaços métricos. Na segunda mostra-se que uma caracterização usual dos espaços que verificam o Segundo Axioma da Numerabilidade não é válida em ZF. Nas duas últimas secções a atenção está centrada na estabilidade destas propriedades para a formação de produtos (numeráveis).

No quarto capítulo são investigadas, mais em detalhe, propriedades relacionadas com limites, tanto de sucessões como de ultrafiltros. Na primeira secção são generalizados, nomeadamente para a classe dos espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade, alguns dos resultados sobre espaços de Fréchet-Urysohn e sequenciais que já haviam sido estudados para $\mathbb{R}$ no segundo capítulo. Na terceira secção é feito um estudo paralelo a este para os espaços que podem ser caracterizados através dos limites de ultrafiltros (que em ZFC são todos). Na segunda secção são averiguadas as relações existentes entre as noções de espaço compacto, sequencialmente compacto e numeravelmente compacto.

No quinto capítulo investiga-se em que condições é que *todo o espaço métrico tem um completamento único*. Ir-se-à ver que essas condições dependem muito das definições de completude e de densidade que usarmos. Na terceira secção são apresentados alguns resultados sobre produtos de espaços métricos e de espaços métricos completos.

No sexto e último capítulo compararam-se várias definições e caracterizações do Primeiro Axioma da Numerabilidade. São fornecidas diferentes caracterizações do Primeiro Axioma da Numerabilidade em ZFC, que estão divididas em dois grupos. Em ZF, as três primeiras tentam reproduzir a ideia original na definição do Primeiro Axioma da Numerabilidade, e qualquer uma delas pode ser considerada uma definição; enquanto que as outras caracterizações não são desejáveis como definição, devido à sua complexidade. Vamos estudar em que condições é que são equivalentes as caracterizações que estão naturalmente relacionadas, e averiguar quando é que alguns espaços topológicos específicos as satisfazem. De entre estes, uma vez mais é dada particular atenção ao espaço topológico dos números reais.

Os três últimos capítulos deste trabalho, com excepção das Secções 4.2 e 5.3, assim como as Secções 2.2, 3.2 e 3.3 são consideradas originais. Os casos em que esta regra não se aplica são referidos nos locais apropriados.

Capítulo 1

Definições e resultados auxiliares

No primeiro capítulo deste trabalho são apresentados resultados e definições de conceitos que serão usados durante os outros capítulos.

Em geral os resultados são bastante conhecidos e por isso a sua demonstração é omitida. Existem no entanto casos em que os resultados, por serem adaptações ou generalizações de outros resultados, não estão referenciados e é por isso apresentada uma demonstração. Resultados de especial importância no decurso do trabalho são também demonstrados.

1.1 Teoria dos Conjuntos

Como seria obrigatório, o corpo do trabalho começa com as definições de função de escolha e do Axioma da Escolha.

São apresentados de seguida alguns *equivalentes conjuntivistas* do Axioma da Escolha. Realce-se que essas equivalências nem sempre foram evidentes. Nestes casos, o tempo tornou para nós óbvios resultados que para os nossos antecessores do início do século passado foram motivo de grande discussão.

Nas definições deste trabalho optou-se por usar a palavra *família* em detrimento da palavra *conjunto*. Essa opção é deliberada e é feita com a intenção de melhorar a compreensão do texto, ainda que por vezes exista um certo abuso de linguagem ao denominar por família o conjunto dos seus elementos.

A opção pelo uso de famílias é ainda justificada pela existência de vários resultados e formulações que envolvem produtos cartesianos.

Definição 1.1.1 *A uma função f, com domínio $\mathcal{F}$, tal que a imagem de cada $A \in \mathcal{F}$ é um elemento de A, i.e. $f(A) \in A$, chama-se função de escolha, ou apenas escolha, na família $\mathcal{F}$.*

Definição 1.1.2 (Axioma da Escolha) *Toda a família cujos elementos são não vazios admite uma função de escolha.*

Devido ao facto de se chamar *produto cartesiano* da família $\mathcal{F}$ ao conjunto $\prod \mathcal{F}$ constituído pelas funções de escolha em $\mathcal{F}$, o Axioma da Escolha é por vezes enunciado da seguinte forma: *É não vazio o produto cartesiano duma família de conjuntos não vazios.*

A definição aqui apresentada é a que foi inicialmente utilizada por E. Zermelo. Mais tarde, B. Russel introduziu um axioma, a que se convencionou chamar Axioma Multiplicativo, que pensou ser mais "fraco" do que o Axioma da Escolha, mas que lhe é equivalente.

O Axioma Multiplicativo deve o seu nome à utilização que Russel fez dele, usando-o para definir produtos (e somas) arbitrários de cardinais.

Definição 1.1.3 (Axioma Multiplicativo) *Para todo o conjunto $\mathcal{C}$ cujo os elementos são disjuntos e não vazios, existe um conjunto A tal que, para todo o $C \in \mathcal{C}$, $A \cap C$ contém um e apenas um elemento.*

Estes dois axiomas podem ser encarados como duas versões do mesmo axioma, pelo que daqui em diante Axioma da Escolha (**AC**)[1] designa ambos os axiomas.

[1]As abreviaturas dos princípios de escolha definidos nesta secção são retiradas da Língua Inglesa. Esta opção tem o intuito de uniformizar a notação com a existente na literatura.

Definição 1.1.4 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo o conjunto admite uma relação de boa ordem.*

Apesar de não ser tão aparente como no caso anterior, é também claro que o Princípio da Boa Ordenação é equivalente ao Axioma da Escolha. Uma demonstração deste facto pode ser vista em [31, p.10].

Definição 1.1.5 (Axioma da Escolha Múltipla – MC) Para toda a família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, existe uma função f tal que, para todo o $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \neq f(X) \subseteq X$ e $f(X)$ é finito.

Teorema 1.1.6 ([31, p.133]) *Em* ZF*, o Axioma da Escolha é equivalente ao Axioma da Escolha Múltipla.*

Neste caso a axiomática considerada é ainda mais importante do que nos outros casos, pois numa axiomática que permita a existência de átomos este teorema não é válido, i.e. existem modelos de ZFA em que o Axioma da Escolha Múltipla se verifica e o Axioma da Escolha não (Segundo Modelo de Fraenkel – $\mathcal{N}2$ em [28]). Para mais detalhes, ver [34] ou [31, p.135].

Ao longo deste trabalho vai ser de grande utilidade a caracterização do Axioma da Escolha Múltipla feita por A. Levy, principalmente pelas generalizações que se podem estabelecer para outras formas de escolha múltipla. Esta caracterização está em paralelo com o Princípio da Boa Ordenação.

Proposição 1.1.7 ([34]) *O Axioma da Escolha Múltipla verifica-se se e só se todo o conjunto pode ser escrito como união bem-ordenada de conjuntos finitos.*

Em várias ocasiões é feito uso do Axioma da Escolha de uma forma parcial, ou seja a demonstração de determinado resultado utiliza, directa ou indirectamente, um princípio de escolha mais fraco do que o próprio Axioma. Vamos começar por definir princípios cujo enunciado envolve a existência explícita de uma função de escolha.

Definição 1.1.8 (Axioma da Escolha Numerável – CC) Toda a família numerável de conjuntos não vazios admite uma função de escolha.

Tal como no caso do Axioma da Escolha, este axioma é também frequentemente definido de maneira alternativa dizendo que: *O produto numerável de conjuntos não vazios não é vazio.*

Devemos destacar neste ponto que está em aberto saber se em ZF a escolha numerável é equivalente à escolha numerável múltipla – **CMC** (define-se de maneira análoga ao Axioma da Escolha Múltipla).

Definições 1.1.9

(a) $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ diz que o Axioma da Escolha Numerável se verifica para famílias de conjuntos de números reais.

(b) $\mathbf{AC}(\mathbb{R})$ diz que o Axioma da Escolha se verifica para famílias de conjuntos de números reais.

(c) $\mathbf{CC}(\alpha)$ diz que o Axioma da Escolha Numerável se verifica para famílias de conjuntos com cardinal inferior ou igual a α.

(d) $\mathbf{CC}(\text{fin})$ diz que o Axioma da Escolha Numerável se verifica para famílias de conjuntos finitos.

Note-se que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{CC}(2^{\aleph_0})$ não são equivalentes, uma vez que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é uma escolha numerável para famílias cuja união tem cardinal inferior ou igual a $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, e não apenas cada um dos elementos da família.

Formas do tipo $\mathbf{AC}(\alpha)$ ou $\mathbf{MC}(\alpha)$ serão utilizadas com um significado similar ao de $\mathbf{CC}(\alpha)$. Elas não serão, no entanto, tão frequentes como esta.

O Axioma da Escolha Numerável assume um papel central neste trabalho, visto estar presente numa grande parte dos resultados. A próxima proposição permite simplificar a demonstração de muitos desses resultados. Devido à sua importância, ela vai ser demonstrada.

Proposição 1.1.10 ([13, p.76], [23]) *As condições seguintes são equivalentes a* **CC** *(respectivamente* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*):*

(i) *toda a família numerável de conjuntos (resp. subconjuntos de* $\mathbb{R}$*) não vazios tem uma subfamília infinita que admite uma função de escolha;*

(ii) *para toda a família numerável* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de conjuntos (resp. subconjuntos de* $\mathbb{R}$*) não vazios, existe uma sucessão que toma valores em* X_n *para um número infinito de valores de* n*.*

Demonstração: **CC**$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(ii) Imediato. Mostremos então que (ii)$\Rightarrow$**CC**.

Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de conjuntos não vazios. Para cada n definimos $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$. Temos então que $(Y_n)_n$ é uma família numerável de conjuntos (disjuntos) não vazios. Por (ii), sabemos que existe uma sucessão $(x_k)_k$ que toma valores num número infinito de Y_n's. Uma vez que os conjuntos Y_n são disjuntos, podemos definir $s(k) := n$ se $x_k \in Y_n$ e $\phi(n) := \min\{k \in \mathbb{N} : s(k) \geq n\}$. As n-projecções de todos os $x_{\phi(n)}$ induzem a função escolha necessária.

Para o caso dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ a prova é idêntica. Para tal, basta notar que $|\mathbb{R}| = |\bigcup_n \mathbb{R}^n|$. ∎

Em [25] foi introduzida uma forma de escolha que corresponde a uma generalização do Axioma da Escolha Múltipla. Por esse motivo, a notação que iremos usar está ligada à que foi usada para o Axioma da Escolha Múltipla.

Definição 1.1.11 ($\mathbf{MC}_\omega$) Para toda a família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, existe uma função f tal que, para todo o $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \neq f(X) \subseteq X$ e $f(X)$ é numerável.

Definições 1.1.12

(a) $\mathbf{MC}_\omega(\mathbb{R})$ diz que $\mathbf{MC}_\omega$ se verifica para famílias de conjuntos de números reais.

(b) $\mathbf{CMC}_\omega(\mathbb{R})$ diz que $\mathbf{MC}_\omega(\mathbb{R})$ se verifica para famílias numeráveis.

Vamos ainda considerar uma forma de escolha “múltipla” que designamos por $\mathbf{CMC}_{WO}(\mathbb{R})$ e que é $\mathbf{CMC}_{\omega}(\mathbb{R})$ substituindo a escolha de um conjunto numerável por um bem-ordenável.

A caracterização de Levy do Axioma da Escolha Múltipla pode ser adaptada para os casos de $\mathbf{MC}_{\omega}$ e $\mathbf{MC}_{\omega}(\mathbb{R})$.

Proposição 1.1.13

(a) ([26]) *Todo o conjunto pode ser escrito como união bem-ordenada de conjuntos numeráveis se e só se* $\mathbf{MC}_{\omega}$ *se verifica.*

(b) ([16]) $\mathbb{R}$ *pode ser escrito como união bem-ordenada de conjuntos numeráveis se e só se* $\mathbf{MC}_{\omega}(\mathbb{R})$ *se verifica.*

Demonstração: A demonstração de (b) dá uma ideia clara de como funciona a demonstração de (a), pelo que só exibiremos uma prova para (b).

Seja $\mathbb{R}$ a união bem-ordenada de conjuntos numeráveis, i.e. $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} A_i$, com cada A_i numerável e com $(I, \leq)$ um conjunto bem-ordenado. Para cada subconjunto X de $\mathbb{R}$, $X = \bigcup_{i \in I}(A_i \cap X)$, definamos $s := \min\{i \in I : A_i \cap X \neq \emptyset\}$. O conjunto $A_s \cap X$ é um subconjunto numerável de X. Este processo fornece a função procurada.

Para provar a outra implicação, consideremos a função f no conjunto de todos os subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ que a cada X faz corresponder um subconjunto numerável e não vazio de X. Através de um processo iterativo, chega-se ao resultado pretendido. ∎

Como ficou patente na demonstração, no enunciado da caracterização podemos impôr que a união seja disjunta.

Lema 1.1.14

(a) $\mathbf{AC} \iff \mathbf{MC}_{\omega} + \mathbf{AC}(\aleph_0)$.

(b) $\mathbf{CC} \iff \mathbf{CMC} + \mathbf{CC}(\mathrm{fin})$.

Podem facilmente ser deduzidas outras equivalências do mesmo tipo das que estão neste lema. Convém no entanto realçar que em ZF se torna redundante escrever a equivalência de (a) para o caso finito, devido a **AC** ser equivalente a **MC** (Teorema 1.1.6).

Na ausência do Axioma da Escolha existem várias definições (não equivalentes) de conjunto finito. Neste texto iremos trabalhar apenas com duas delas, mas um estudo mais geral sobre o assunto pode ser encontrado em [36, p.28] e [28, Nota 94].

Definições 1.1.15

(a) Um conjunto é finito se é vazio ou equipolente a um número natural; senão é infinito.

(b) Um conjunto X é Dedekind-finito se nenhum subconjunto próprio de X é equipolente a X; senão é Dedekind-infinito.

Existem modelos de ZF em que as noções de conjunto finito e Dedekind-finito não coincidem. Por exemplo, no Modelo Básico de Cohen existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito e Dedekind-finito.

Proposição 1.1.16 *Um conjunto X é Dedekind-infinito se e só se tem um subconjunto infinito numerável, ou seja existe uma função injectiva de $\mathbb{N}$ para X.*

Quando temos um resultado que depende de escolha (não demonstrável em ZF), nem sempre é possível explicitar o tipo de escolha necessária. A próxima proposição mostra que esse não é o caso da equivalência entre finito e Dedekind-finito, o que nos permite comparar mais facilmente esta equivalência com outros princípios de escolha.

Teorema 1.1.17 *Todo o conjunto infinito é Dedekind-infinito se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica para famílias de conjuntos Dedekind-finitos.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja (X_n) uma família de conjuntos Dedekind-finitos e não vazios. A união disjunta $\dot{\cup} X_n$ dos conjuntos X_n é infinita e por hipótese também Dedekind-infinita, ou seja existe uma função injectiva f de $\mathbb{N}$ para $\dot{\cup} X_n$.

Como cada um dos conjuntos X_n é Dedekind-finito, $f(\mathbb{N})$ intersecta um número infinito de X_n's. A partir deste ponto procede-se como na demonstração da Proposição 1.1.10, uma vez que o produto finito de conjuntos Dedekind-finitos é ainda Dedekind-finito.

($\Leftarrow$) Seja X um conjunto Dedekind-finito. Vamos denotar por $\mathbb{Z}_n$ o conjunto $\{1, ..., n\}$ dos n primeiros números naturais e definir os conjuntos $S_n := \{(f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow X) : f \text{ é injectiva}\}$. Cada um dos conjuntos S_n é Dedekind-finito, porque caso contrário X seria Dedekind-infinito.

Suponhamos agora que X é infinito. Temos então que (S_n) é uma família de conjuntos Dedekind-finitos não vazios. Logo existe por hipótese $(f_n)_n$, onde cada f_n é um elemento de S_n. Neste caso podemos definir uma função injectiva $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ do seguinte modo: $\phi(1) = f_1(1)$ e, para $n \geq 1$, $\phi(n) = f_n(k)$, com $k = \min\{p \in \mathbb{Z}_n : f_n(p) \notin \phi(\mathbb{Z}_{n-1})\}$. A existência de ϕ contradiz a suposição de que X é Dedekind-finito. ■

A primeira implicação é uma consequência imediata do facto de a equivalência entre as noções de conjunto finito e conjunto Dedekind-finito implicar o Axioma da Escolha Numerável para conjuntos finitos (**CC**(fin)). Este facto já é bastante conhecido, sendo contudo apenas uma implicação própria (ver, e.g., [36, p.322]).

A demonstração da segunda implicação é uma adaptação da demonstração apresentada por T. J. Jech em [31] de que **CC** implica a equivalência entre finito e Dedekind-finito.

Proposição 1.1.18 *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *todo o subconjunto infinito de* $\mathbb{R}$ *é Dedekind-infinito;*

(ii) *o Axioma da Escolha verifica-se para famílias de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *Dedekind-finitos;*

(iii) *o Axioma da Escolha Numerável verifica-se para famílias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ Dedekind-finitos.*

Demonstração: (i)$\Rightarrow$(ii) Esta implicação é óbvia dado que **AC**(fin) é sempre válido para famílias de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Imediato.

(iii)$\Rightarrow$(i) Um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ ou é ilimitado ou tem um ponto de acumulação. Sem perda de generalidade, suponha-se A um subconjunto de $\mathbb{R}$ superiormente ilimitado e definam-se os conjuntos $A_n := [n, +\infty) \cap X$.

Se algum A_n for Dedekind-infinito, então A também é Dedekind-infinito.

Se todos os A_n's forem Dedekind-finitos, então por (iii) existe uma função de escolha em (A_n), ou seja existe (a_n) com cada $a_n \in A_n$. O conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto infinito numerável de A porque A é superiormente ilimitado.

$\blacksquare$

Intimamente ligada com o Axioma da Escolha Numerável está a *Condição da União Numerável*. Na ausência desta condição vários resultados tidos por *óbvios* podem não se verificar. Como exemplo deste facto, refira-se que $\mathbb{R}$ pode ser a união numerável de conjuntos numeráveis ([11]).

Definição 1.1.19 (Condição da União Numerável – CUC) A união numerável de conjuntos numeráveis é numerável.

A condição "a união numerável de conjuntos finitos é numerável" é denotada por **CUC**(fin).

Lema 1.1.20

(a) $\mathbf{CC}(2^{\aleph_0}) \Longrightarrow \mathbf{CUC} \Longrightarrow \mathbf{CC}(\aleph_0)$.

(b) $\mathbf{CUC}(\text{fin}) \Longleftrightarrow \mathbf{CC}(\text{fin})$.

Para provar a primeira implicação de (a) basta verificar que, se X é numerável, o conjunto de todas as bijecções entre $\mathbb{N}$ e X tem cardinal $2^{\aleph_0}$. Se X for finito, então o conjunto das bijecções é também finito, o que nos dá uma das direcções de (b). As implicações restantes são óbvias.

As implicações de (a) não são reversíveis, pois não se verificam no Modelo Básico de Cohen ($\mathcal{M}1$ em [28]) e no Primeiro Modelo de Felgner ($\mathcal{M}20$ em [28]), respectivamente.

A última parte da primeira secção é dedicada a definições relacionadas com o conceito de ultrafiltro, envolvendo nomeadamente a existência de ultrafiltros.

A convergência de ultrafiltros representa um papel central na caracterização de espaços topológicos, e o teorema de ZFC que seguidamente enunciaremos é usado repetidamente nesse contexto. Não é por isso grande surpresa que a sua ausência nos crie novos problemas.

Definição 1.1.21 (Teorema do Ultrafiltro – UFT) Todo o filtro num dado conjunto pode ser estendido a um ultrafiltro.

Este teorema é equivalente ao *Teorema do Ideal Booleano Primo*, i.e. toda a álgebra de Boole não trivial ($0 \neq 1$) tem um ideal primo. Para mais pormenores sobre este assunto, veja [31, 2.3].

Tal como nos casos anteriores, vamos considerar algumas variações do Teorema do Ultrafiltro.

Definições 1.1.22

(a) ([22]) **CUF** diz que o Teorema do Ultrafiltro se verifica para filtros com uma base numerável.

(b) **CUF($\mathbb{R}$)** diz que o Teorema do Ultrafiltro se verifica para filtros em $\mathbb{R}$ com uma base numerável.

Proposição 1.1.23 *Se o Axioma da Escolha Numerável é válido e $\mathbb{N}$ tem um ultrafiltro livre, então* **CUF** *verifica-se.*

Demonstração: Seja $(A_n)_n$ uma base para um filtro num conjunto X. Pode-se supor que $A_{n+1} \subsetneq A_n$ para todo o n. Por **CC** escolhe-se um elemento a_n de $A_n \setminus A_{n+1}$. Como $\mathbb{N}$ tem um ultrafiltro livre por hipótese, o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$.

O filtro gerado em X por $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro e contém $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. ■

Corolário 1.1.24 *O Teorema do Ultrafiltro não é equivalente a* **CUF***.*

No Modelo de Pincus IX ($\mathcal{M}47(n, M)$ em [28]) o Teorema do Ultrafiltro não é válido, mas o Axioma da Escolha Numerável verifica-se e existe um ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$, e portanto **CUF** também se verifica.

Corolário 1.1.25 *Se o Axioma da Escolha é válido para famílias de subconjuntos de $\mathbb{R}$, então* **CUF($\mathbb{R}$)** *verifica-se.*

Tal como na Proposição 1.1.23, em alguns resultados iremos usar condições que apenas envolvem a existência de ultrafiltros livres, em geral ou no conjunto dos números reais.

Teorema 1.1.26 *$\mathbb{R}$ tem um ultrafiltro livre se e só se $\mathbb{N}$ tem um ultrafiltro livre.*

Demonstração: Se existe um ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$, então é imediato que ele se pode estender a um ultrafiltro livre em $\mathbb{R}$.

Seja agora $\mathcal{U}$ um ultrafiltro em $\mathbb{R}$. Todo o ultrafiltro em $\mathbb{R}$ é convergente ou ilimitado. Sem perder generalidade, pode-se supor que $\mathcal{U}$ é ilimitado superiormente, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, $(x, +\infty) \in \mathcal{U}$. Considere-se em $\mathbb{R}$ a partição $(B_n)_n$ com $B_1 := (-\infty, 1]$ e $B_n := (n-1, n]$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Constrói-se de seguida o conjunto $\mathcal{U}' := \{A \subseteq \mathbb{N} : \bigcup_{n \in A} B_n \in \mathcal{U}\}$. Não é difícil verificar que $\mathcal{U}'$ é um ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$ ■

Este resultado permite situar melhor a existência de ultrafiltros livres em $\mathbb{R}$, dado serem conhecidos bastantes modelos onde $\mathbb{N}$ não tem ultrafiltros, como por exemplo o Modelo de Feferman – $\mathcal{M}2$ em [28]. Para mais detalhes consultar a Forma 70 de [28].

1.2 Topologia

Em paralelo com o que foi feito na secção anterior, nesta secção são apresentadas definições de noções topológicas usuais que precisamos neste trabalho. Juntamente com essas definições são introduzidos resultados sobre espaços topológicos em que a habitual demonstração é válida em ZF ou não necessita de alterações profundas.

A ausência do Axioma da Escolha provoca também a existência de diferentes definições em ZF para o mesmo conceito de ZFC. Esse será um problema de que nos ocuparemos mais tarde, e portanto não temos neste capítulo mais do que uma definição do mesmo conceito.

Definição 1.2.1 Um espaço topológico X é *(numeravelmente) compacto* se toda a cobertura aberta (numerável) de X tem uma subcobertura finita.

Algumas das caracterizações usuais dos espaços compactos, que por vezes são usadas como definição, não são equivalentes a esta definição em ZF. Neste contexto, os espaços topológicos aqui definidos como compactos são por vezes designados por compactos de Heine-Borel. Esta designação deve-se ao Teorema de Heine-Borel, que caracteriza os subespaços compactos de $\mathbb{R}^n$.

A partir deste momento usamos frequentemente os três primeiros axiomas de separação: T_0, T_1 e T_2 ou de Hausdorff. As suas definições, assim como as suas habituais caracterizações, não sofrem alteração com a mudança de axiomática.

Proposição 1.2.2

(a) *Todo o subespaço fechado de um espaço topológico compacto é compacto.*

(b) *Todo o subespaço compacto de um espaço topológico de Hausdorff é fechado.*

Demonstração: (b) Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico de Hausdorff, K um seu subespaço compacto e consideremos um ponto $x \notin K$. Como X é de Hausdorff, o conjunto

$$\{V \cap K \neq \emptyset : V \in \mathcal{T} \text{ e } \exists U \in \mathcal{T}\ (x \in U \text{ e } U \cap V = \emptyset)\}$$

é uma cobertura de K, logo tem uma subcobertura finita $\{V_i \cap K : i = 1, .., n\}$. Podemos então escolher (escolha finita) para cada $i = 1, .., n$ um aberto U_i tal que $x \in U_i$ e $U_i \cap V_i = \emptyset$. O conjunto aberto $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ não intersecta K e portanto K é fechado. ∎

A demonstração que acabámos de fazer mostra como mesmo resultados aparentemente óbvios podem necessitar de cuidados redobrados quando o Axioma da Escolha não pode ser utilizado.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Heine-Borel) *Um subespaço de* $\mathbb{R}$ *é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Depois da Proposição 1.2.2, a única parte não trivial que fica por demonstrar é que *"todo o intervalo fechado de* $\mathbb{R}$ *é compacto"*. Uma prova detalhada deste facto, válida em ZF, pode ser vista em [44, Teorema 5.3.1].

Em paralelo com a definição de espaço compacto, vamos introduzir mais duas definições directamente relacionadas com compacidade, espaço sequencialmente compacto e espaço de Lindelöf. Esta última deve o seu nome à caracterização feita por Lindelöf do espaço topológico dos números reais que, como veremos mais tarde, não é válida em todos os modelos de ZF.

Definição 1.2.4 Um espaço topológico X é *sequencialmente compacto* se toda a sucessão em X tem uma subsucessão convergente.

Definição 1.2.5 Um espaço topológico X é *de Lindelöf* se toda a cobertura aberta de X tem uma subcobertura numerável.

Definição 1.2.6 Um espaço topológico é *separável* se tem um subespaço numerável denso.

Definições 1.2.7

(a) Um espaço topológico X verifica o *Primeiro Axioma da Numerabilidade* se todo o ponto $x \in X$ tem um Sistema Fundamental de Vizinhanças (SFV) numerável.

(b) Um espaço topológico verifica o *Segundo Axioma da Numerabilidade* se tem uma base numerável.

Ao longo do texto, os espaços que verificam o Segundo Axioma da Numerabilidade são com frequência referidos simplesmente como espaços com uma base numerável.

Proposição 1.2.8 *Todo o espaço topológico (numeravelmente) compacto que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é sequencialmente compacto.*

A demonstração usual desta proposição (ver [46, Teorema 7.1.3]) é válida em ZF. A única escolha que é necessário fazer é uma escolha num conjunto numerável, o que é sempre possível.

Lema 1.2.9 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.*

(a) *Se $(X, \mathcal{T})$ verifica o segundo axioma da numerabilidade, então $|\mathcal{T}| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.*

(b) *Se $(X, \mathcal{T})$ é T_0 e verifica o Segundo Axioma da Numerabilidade, então $|X| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.*

O resultado de (a) é uma consequência da definição de base.

Para (b), basta verificar que o cardinal de qualquer espaço topológico T_0 é menor que o cardinal da sua topologia.

O Capítulo 4 vai ser principalmente dedicado à caracterização de espaços topológicos através de limites, nomeadamente de sucessões e de ultrafiltros.

Dentro desse estudo será dada particular atenção aos espaços de Fréchet-Urysohn e espaços sequenciais. Seguindo as definições de, por exemplo, R. Engelking [10], um espaço topológico X é *de Fréchet-Urysohn* se para todo o $A \subseteq X$ e todo o x no fecho de A, existe uma sucessão de elementos de A convergente para x; e um espaço topológico X é *sequencial* se um conjunto $A \subseteq X$ é fechado se e só se juntamente com qualquer sucessão contém todos os seus limites.

Para facilitar o manuseamento destas definições, iremos utilizar o operador de fecho sequencial, o que torna principalmente mais claro o conceito de espaço sequencial.

Definições 1.2.10 Seja A um subespaço do espaço topológico X. O *fecho sequencial* de A em X é o seguinte conjunto:

$$\sigma_X(A) := \{x \in X : (\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}})[(x_n) \text{ converge para } x]\}.$$

A é *sequencialmente fechado* em X se $\sigma_X(A) = A$.

Usando o mesmo tipo de notação, o *fecho (usual) de Kuratowski* de A em X é denotado por $k_X(A)$.

Definições 1.2.11 Um espaço topológico X é:

(a) *sequencial* se, para todo o $A \subseteq X$, $\sigma_X(A) = A$ se e só se $k_X(A) = A$;

(b) *de Fréchet-Urysohn* se, para todo o $A \subseteq X$, $k_X(A) = \sigma_X(A)$.

Note-se que um espaço topológico X é sequencial se e só se, para todo o $A \subseteq X$, $k_X(A) = \hat{\sigma}_X(A)$ com $\hat{\sigma}_X(A) := \bigcap\{B : A \subseteq B \subseteq X \text{ e } \sigma_X(B) = B\}$. Este é o menor operador de fecho idempotente que é maior ou igual a σ e é imediato que, para todo o $A \subseteq X$, $\sigma_X(A) \subseteq \hat{\sigma}_X(A) \subseteq k_X(A)$.

Proposição 1.2.12 *Um espaço topológico X é de Fréchet-Urysohn se e só se é sequencial e o fecho sequencial σ_X é idempotente.*

Usando a notação dos operadores de fecho, esta Proposição diz simplesmente que $k_X = \sigma_X$ se e só se $k_X = \hat{\sigma}_X$ e $\hat{\sigma}_X = \sigma_X$.

A partir deste ponto vamos usar as noções de espaço métrico e pseudométrico. A definição de espaço métrico que usamos é a usual. Um espaço pseudométrico é um espaço métrico, onde é permitido que a distância entre dois pontos distintos seja nula.

Definição 1.2.13 Um espaço (pseudo)métrico é *completo* se toda a sua sucessão de Cauchy é convergente.

Proposição 1.2.14

(a) *Todo o subespaço completo de um espaço métrico é sequencialmente fechado.*

(b) *Todo o subespaço sequencialmente fechado de um espaço (pseudo)métrico completo é completo.*

Deve aqui ser referido que (a) não se verifica para espaços pseudométricos, uma vez que existem subespaços completos não sequencialmente fechados. Basta considerar a pseudométrica indiscreta e qualquer seu subespaço não trivial.

Corolário 1.2.15 *Seja X um espaço métrico completo. Um subespaço A de X é completo se e só se $\sigma_X(A) = A$.*

Corolário 1.2.16 *Todo o subespaço fechado de um espaço (pseudo)métrico completo é completo.*

Corolário 1.2.17 *Para um espaço métrico completo X são equivalentes:*

(i) *X é um espaço sequencial;*

(ii) *todo o espaço $A \subseteq X$ é completo se e só se é fechado em X.*

Proposição 1.2.18 *Todo o espaço (pseudo)métrico sequencialmente compacto é completo.*

A demonstração desta Proposição é imediata porque se uma subsucessão de uma sucessão de Cauchy converge, ela própria tem que convergir.

Corolário 1.2.19 *Todo o subespaço sequencialmente compacto de um espaço métrico é sequencialmente fechado.*

Este Corolário é imediato pois todo o subespaço métrico completo é sequencialmente fechado.

O resultado deste Corolário é ainda válido se considerarmos um espaço de Hausdorff no lugar de um espaço métrico, fazendo assim um paralelo com o caso dos espaços compactos e conjuntos fechados que vimos na Proposição 1.2.2.

Continuando esse paralelo tem-se também que *todo o subespaço sequencialmente fechado de um espaço topológico sequencialmente compacto é sequencialmente compacto.*

Capítulo 2

Os números reais

A intenção de começar por apresentar problemas no conjunto dos números reais é mostrar como mesmo os resultados aparentemente mais simples podem não ser válidos num universo sem escolha. De entre estes resultados, é dado ênfase aos resultados que estudamos para outro tipo de espaços topológicos. Apesar de existir um capítulo inteiramente dedicado aos números reais, resultados em $\mathbb{R}$ são também frequentes nos outros capítulos, nomeadamente quando relacionados com conceitos que serão introduzidos posteriormente.

O capítulo está dividido em duas secções. Na primeira são apresentados resultados equivalentes a $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ e na segunda um conjunto de resultados, equivalentes entre si, mas algo surpreendentemente, propriamente mais fracos do que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

2.1 $\mathbb{R}$ é um espaço de Fréchet-Urysohn

A Proposição 1.2.12 dá uma clara indicação de que as propriedades de um espaço topológico ser de Fréchet-Urysohn, ser sequencial ou o seu fecho sequencial ser idempotente estão intimamente relacionadas. Neste capítulo vamos estudar em que condições é que $\mathbb{R}$ tem estas três propriedades.

O espaço topológico real é de Fréchet-Urysohn se e só se o Axioma da Escolha

Numerável se verifica em $\mathbb{R}$. Este resultado é já bastante conhecido (ver [12, p.124]), mas no entanto para as condições "$\mathbb{R}$ é sequencial" e "$\sigma_{\mathbb{R}}$ é idempotente" a situação não é tão clara. A primeira destas duas condições vai ser objecto de estudo na secção seguinte; para a segunda apresentamos aqui a solução do problema ([18]).

Teorema 2.1.1 ([12, 24, 18]) *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) $\mathbb{R}$ *é de Fréchet-Urysohn;*

(ii) *o fecho sequencial é idempotente em* $\mathbb{R}$.

Demonstração: A demonstração usual de que $\mathbb{R}$ é de Fréchet-Urysohn continua a ser válida se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verifica (ver, e.g., [12, p.124]), e se $\mathbb{R}$ é de Fréchet-Urysohn, então $\sigma_{\mathbb{R}}$ é idempotente (Proposição 1.2.12). Falta portanto apenas provar que (ii)$\Rightarrow\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e defina-se $Y_n := \{x + p : x \in X_n,\ p \in \mathbb{N}\}$. Para todo o n em $\mathbb{N}$, pode ser definida uma função bijectiva crescente $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ por $f_n(x) = \frac{(2n+1)(x+1)+|x|}{2n(n+1)(x+1)}$. Consideremos os conjuntos $Z_n := f_n(Y_n)$. Pela maneira como os conjuntos Y_n e as funções f_n estão definidos, a sucessão $(f_n(x + p))_p$, para $x \in X_n$ fixo, é uma sucessão em Z_n que converge para $\frac{1}{n}$. Ou seja, para $Z := \bigcup_n Z_n$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ está contido em $\sigma_{\mathbb{R}}(Z)$ e portanto $0 \in \sigma^2_{\mathbb{R}}(Z)$. Como $\sigma_{\mathbb{R}}$ é idempotente por hipótese, $0 \in \sigma_{\mathbb{R}}(Z)$, i.e. existe uma sucessão $(a_k)_k$ em Z que converge para 0.

Os conjuntos Z_n são disjuntos, e por isso para cada $k \in \mathbb{N}$ existe exactamente um $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \in Z_{n(k)}$. Podemos então agora definir $b_k := f^{-1}_{n(k)}(a_k)$ e $B_k := \{x \in X_{n(k)} : (\exists p \in \mathbb{N})\, x + p = b_k\}$. O conjunto B_k é discreto porque, se x_1 e x_2 são dois elementos distintos de B_k, então existem $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tais que $x_1 + p_1 = x_2 + p_2$, logo $|x_1 - x_2| \in \mathbb{N}$. Além disso, B_k é não vazio e tem um majorante b_k, logo tem igualmente um máximo c_k.

Podemos concluir que $\{c_k : k \in \mathbb{N}\}$ intersecta um número infinito dos conjuntos X_n, o que é uma consequência da convergência de $(a_k)_k$ para 0. A versão da Proposição 1.1.10 para o caso real permite-nos terminar a prova. ■

Corolário 2.1.2 ([12, p.128], [24]) *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o subespaço de* $\mathbb{R}$ *é separável;*

(ii) *todo o subconjunto ilimitado de* $\mathbb{R}$ *contém um conjunto numerável ilimitado.*

Demonstração: $\mathbf{CC}(\mathbb{R})\Rightarrow$(i) Uma vez que todo o subespaço A de $\mathbb{R}$ verifica o Segundo Axioma da Numerabilidade, apenas é necessário escolher um elemento de cada aberto não vazio na base de A.

A implicação (i)$\Rightarrow$(ii) é imediata, e para (ii)$\Rightarrow\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ vamos provar que $\mathbb{R}$ é de Fréchet-Urysohn a partir de (ii).

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in k_{\mathbb{R}}(A)$ um ponto de acumulação à direita de A. Como vimos anteriormente, pode ser definida uma função bijectiva crescente $g : (x-1, x) \longrightarrow \mathbb{R}$. O subespaço $g(A)$ é ilimitado superiormente, logo existe por hipótese um conjunto numerável $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq g(A)$ ilimitado. Se definirmos $k(n) := \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \geq n\}$, a sucessão $(g^{-1}(x_{k(n)}))_n$ está em A e converge para x. ∎

Em [4] N. Brunner estudou a existência de subconjuntos infinitos Dedekind-finitos de $\mathbb{R}$. Introduzimos aqui um dos seus resultados, e respectiva demonstração, de maneira a utilizar o seu método para a construção de conjuntos densos em $\mathbb{R}$ e não separáveis. Ao mesmo tempo o resultado de Brunner é usado para ampliar os resultados da Proposição 1.1.18.

Proposição 2.1.3 *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *todo o subconjunto infinito de* $\mathbb{R}$ *é Dedekind-infinito;*

(ii) *todo o conjunto denso em* $\mathbb{R}$ *é Dedekind-infinito;*

(iii) *o Axioma da Escolha verifica-se para famílias de conjuntos densos em $\mathbb{R}$ Dedekind-finitos;*

(iv) *o Axioma da Escolha Numerável verifica-se para famílias de conjuntos densos em $\mathbb{R}$ Dedekind-finitos.*

Demonstração: As implicações (i)$\Rightarrow$(ii) e (iii)$\Rightarrow$(iv) são evidentes e através da Proposição 1.1.18 a implicação (i)$\Rightarrow$(iii) é também imediata.

(ii)$\Rightarrow$(i) ([4]) Seja A um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ e, sem perda de generalidade, suponhamos que 0 é ponto de acumulação à esquerda de A.

Definimos então $A_0 := A \cap (0, 1)$ e, para cada n em $\mathbb{N}$, $A_n := A \cap (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. O conjunto A_0 é ainda infinito e tem 0 como ponto de acumulação. Alguns dos conjuntos A_n podem ser vazios, mas um número infinito desses conjuntos tem que ser não vazio, ou seja $\mathbb{M} := \{m \in \mathbb{N} : A_m \neq \emptyset\}$ tem o mesmo cardinal do que $\mathbb{N}$. Consideremos então a base de $\mathbb{R}$ que consiste nos intervalos abertos $((r_m, s_m))_{m \in \mathbb{M}}$ em que os extremos são números racionais.

Para todo o $m \in \mathbb{M}$, existe uma função injectiva $f_m : A_m \longrightarrow (r_m, s_m)$ definida por $f_m(x) := r_m + m(m+1)(s_m - r_m)(x - \frac{1}{m+1})$. A função $f : A_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) := f_m(x)$ se $x \in A_m$, está bem definida porque os conjuntos A_n são disjuntos.

O conjunto $B := f(A_0)$ é denso em $\mathbb{R}$, uma vez que intersecta todos os elementos da base. Temos então por hipótese que B é Dedekind-infinito, ou seja existe uma função $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow B$ injectiva.

Falta agora provar que A (ou A_0) é também Dedekind-infinito. Para cada elemento $b \in B$ consideremos $m(b) := \min\{m \in \mathbb{M} : b \in f_m(A_m)\}$, o que permite construir uma inversa de $f : A_0 \longrightarrow B$. O conjunto $\{f^{-1}_{m(\phi(k))}(\phi(k)) : k \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto numerável de A_0 e portanto A é Dedekind-infinito.

(iv)$\Rightarrow$(ii) Seja X um conjunto denso em $\mathbb{R}$. Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $X_n := X \cap (n, n+1)$ é denso em $(n, n+1)$.

Se X for Dedekind-finito então cada um dos conjuntos X_n também é Dedekind-finito. Tendo em consideração que podemos construir um homeomorfismo entre

$\mathbb{R}$ e $(n, n+1)$, cada X_n pode ser visto como denso em $\mathbb{R}$ e portanto existe por hipótese $(x_n)_n$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X_n$.

Como os conjuntos X_n são disjuntos, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ define uma função injectiva de $\mathbb{N}$ para X. ■

Proposição 2.1.4 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *o Axioma da Escolha Numerável verifica-se para famílias de espaços densos em* $\mathbb{R}$*;*

(ii) *todo o subespaço de* $\mathbb{R}$ *é separável;*

(iii) *todo o espaço denso em* $\mathbb{R}$ *é separável.*

Demonstração: A equivalência entre $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ e (ii) está no Corolário 2.1.2. As implicações $\mathbf{CC}(\mathbb{R}) \Rightarrow$(i) e (ii)$\Rightarrow$(iii) são evidentes.

Como na demonstração da proposição antecedente, consideramos a base $((r_n, s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$, que consiste nos intervalos abertos em que os extremos são números racionais. Para todo o $n \in \mathbb{N}$, pode ser definida uma função bijectiva $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow (r_n, s_n)$.

(iii)$\Rightarrow \mathbf{CC}(\mathbb{R})$ Seja $(A_n)_n$ uma família numerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e definamos $B_n := f_n(A_n)$ e $B := \bigcup_n B_n$. O espaço B é denso em $\mathbb{R}$ e por (iv) existe $C := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ numerável e denso em B, logo também denso em $\mathbb{R}$.

Um número infinito dos conjuntos $B_n \cap C$ são não vazios, senão C seria limitado e portanto não seria denso em $\mathbb{R}$. Para cada elemento de $\mathbb{M} := \{m \in \mathbb{N} : B_n \cap C \neq \emptyset\}$, define-se $k(m) := \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \in B_m\}$. O conjunto $\{f_m^{-1}(x_{k(m)}) : m \in \mathbb{M}\}$ determina uma função de escolha em $(A_m)_{m \in \mathbb{M}}$, o que, tendo em conta a Proposição 1.1.10, é suficiente para provar (i).

(i)$\Rightarrow$(iii) Seja A um espaço denso em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n := A \cap (r_n, s_n)$ é denso em (r_n, s_n). Como já vimos anteriormente, o facto de os espaços (r_n, s_n) serem homeomorfos a $\mathbb{R}$ faz com que possamos considerar (A_n) como uma família de espaços densos em $\mathbb{R}$. Temos então que, por hipótese, existe $\{x_n : x_n \in A_n \text{ e } n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, que é um espaço numerável denso em $\mathbb{R}$. ■

Uma das conclusões mais surpreendentes quando analisamos o espaço topológico $\mathbb{R}$ em ZF é talvez o facto de este não ser de Lindelöf. Esta propriedade falha inclusive de modo mais drástico, pois o próprio espaço discreto $\mathbb{N}$ pode não ser de Lindelöf. Diversos autores dedicaram-se a esta última questão, nomeadamente N. Brunner [4] mostrou que não é provável em ZF que $\mathbb{N}$ seja um espaço de Lindelöf. Mais tarde foi provado que $\mathbb{N}$ *é de Lindelöf* se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica em $\mathbb{R}$ ($\mathbf{CC}(\mathbb{R})$). Provas deste resultado podem ser vistas em vários sítios, como por exemplo em [24, 1, 28]. Devido à sua importância e à sua singularidade, optamos por apresentar uma demonstração onde se vê directamente que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não pode ser evitado.

Teorema 2.1.5 *O espaço discreto $\mathbb{N}$ é de Lindelöf se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica para famílias de conjuntos de números reais.*

Para provar que $\mathbb{N}$ é de Lindelöf segue-se a demonstração usual. É apenas preciso verificar que nenhuma condição mais forte do que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é usada. A única escolha necessária é uma escolha numerável na topologia de $\mathbb{N}$, ou seja em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e esse conjunto é equipolente a $\mathbb{R}$. Portanto $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é suficiente para provar que $\mathbb{N}$ é de Lindelöf.

Vamos então provar a outra implicação.

Demonstração: Começamos por considerar uma família numerável $(X_n)_n$ de subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, o que é equivalente a considerar uma família numerável de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto $Y_n := \{x \cup \{-n\} : x \in X_n\}$, que é um subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Pela maneira como os conjuntos Y_n estão definimos, uma função de escolha em $(Y_n)_n$ induz uma função de escolha em $(X_n)_n$.

Por hipótese $\mathbb{N}$ é de Lindelöf, pelo que também $\mathbb{Z}$ (com a topologia discreta) é de Lindelöf. O conjunto $\mathcal{U} := \bigcup_n Y_n \cup \{\mathbb{N}_0\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{Z}$, logo tem uma subcobertura numerável $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. O facto de $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ser uma cobertura, nomeadamente por cobrir a parte negativa de $\mathbb{Z}$, faz com que para cada n exista $s(n) := \min\{k \in \mathbb{N} : u_k \in Y_n\}$ e consequentemente

$\{u_{s(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ define uma função de escolha em $(Y_n)_n$. ■

Corolário 2.1.6 ([24]) *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o espaço topológico que verifica o Segundo Axioma da Numerabilidade é de Lindelöf;*

(ii) *todo o subespaço de* $\mathbb{R}$ *é de Lindelöf;*

(iii) $\mathbb{R}$ *é de Lindelöf.*

Demonstração: (iii)$\Rightarrow$$\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ Como $\mathbb{N}$ é um subespaço fechado de $\mathbb{R}$, se $\mathbb{R}$ é de Lindelöf, então $\mathbb{N}$ é de Lindelöf e portanto $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ verifica-se. As implicações (i)$\Rightarrow$(ii) e (ii)$\Rightarrow$(iii) são evidentes.

$\mathbf{CC}(\mathbb{R})\Rightarrow$(i) Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de um espaço $(X, \mathcal{T})$ que verifica o Segundo Axioma da Numerabilidade, e $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sua base. Consideremos então os subconjuntos de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_n := \{U \in \mathcal{U} : B_n \subseteq U\}$ e o conjunto de números naturais $\mathbb{M} := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{U}_n \neq \emptyset\}$. Como $\mathcal{B}$ é uma base, $\{B_m : m \in \mathbb{M}\}$ é uma cobertura de X. Por outro lado, $\bigcup_m \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ e, pelo Lema 1.2.9, sabemos que $|\mathcal{T}| \leq |\mathbb{R}|$. Temos por isso que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ implica a existência de uma família $(U_m)_{m\in\mathbb{M}}$ tal que cada U_m é um elemento de $\mathcal{U}_m$, ou seja $\{U_m : m \in \mathbb{M}\}$ é uma subcobertura de $\mathcal{U}$. ■

A demonstração de $\mathbf{CC}(\mathbb{R})\Rightarrow$(i) fornece, automaticamente, uma prova para a implicação do Teorema 2.1.5 que não foi demonstrada.

Corolário 2.1.7 *Todo o subespaço separável de* $\mathbb{R}$ *é de Lindelöf se e só se* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ *se verifica.*

Demonstração: Se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verifica, então todo o subespaço de $\mathbb{R}$ é de Lindelöf. Por outro lado, se todo o subespaço separável de $\mathbb{R}$ é de Lindelöf, então $\mathbb{N}$ é também de Lindelöf. ■

O Teorema que é enunciado de seguida é uma restrição das condições (i) do Teorema 2.1.1 e (ii) do Corolário 2.1.2 para subespaços de Lindelöf de $\mathbb{R}$. Ao contrário do que acontece com aquelas condições, este Teorema é um teorema de ZF.

Teorema 2.1.8 ([16])

(a) *Todo o subespaço de Lindelöf ilimitado de $\mathbb{R}$ contém uma sucessão ilimitada.*

(b) *Para todo o subespaço de Lindelöf A de $\mathbb{R}$, se $x \in k_{\mathbb{R}}(A)$ então $x \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$.*

Demonstração: As duas demonstrações têm muitas semelhanças, pelo que vamos apenas demonstrar (b). Para (a) procede-se de modo análogo considerando $x = \infty$.

Sem perda de generalidade, consideremos $x \in k_{\mathbb{R}}(A) \setminus A$ um ponto de acumulação à direita do espaço de Lindelöf $A \subseteq \mathbb{R}$. Claramente $\mathcal{U} := \{(-\infty, a) \cap A : a < x,\ a \in A\} \cup \{(x, +\infty) \cap A\}$ é uma cobertura aberta de A. Como A é de Lindelöf, contém uma subcobertura numerável $\{(-\infty, a_n) \cap A : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, +\infty)\}$ de $\mathcal{U}$. Os elementos a_n determinam completamente os conjuntos, uma vez que, se $a < b$, então $a \in (-\infty, b) \cap A$ e $a \notin (-\infty, a) \cap A$.

O ponto x é portanto um ponto de acumulação da sucessão $(a_n)_n$, e definindo $k(n) := \min\{j \in \mathbb{N} : a_j \in (x - \frac{1}{n}, x)\}$ temos então uma sucessão $(a_{k(n)})_n$ em A que converge para x. ∎

Teorema 2.1.9 ([21, 16]) *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *existe um subespaço de $\mathbb{R}$ de Lindelöf e não compacto;*

(ii) *existe um subespaço de $\mathbb{R}$ de Lindelöf e não fechado;*

(iii) *existe um subespaço de $\mathbb{R}$ de Lindelöf e ilimitado.*

Demonstração: Se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verifica, então todo o subespaço de $\mathbb{R}$ é de Lindelöf e, por exemplo, o próprio $\mathbb{R}$ não é compacto. As implicações (i)$\Rightarrow$(ii) e (i)$\Rightarrow$(iii) são imediatas. Mais uma vez existe um paralelo entre o caso dos espaços não fechados e dos espaços ilimitados, pelo que fazemos apenas a demonstração de (iii)$\Rightarrow$**CC**($\mathbb{R}$), uma vez que a prova de (ii)$\Rightarrow$**CC**($\mathbb{R}$) segue um caminho idêntico.

(iii)$\Rightarrow$**CC**($\mathbb{R}$) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um espaço de Lindelöf superiormente ilimitado. Pelo Teorema 2.1.8, A contém uma sucessão (a_n) ilimitada superiormente. Sem perda de generalidade, podemos considerar (a_n) crescente, e portanto o espaço $C := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é discreto. Consequentemente C é um subespaço fechado de A, o que implica que C seja de Lindelöf.

O espaço C é discreto e infinito numerável, logo homeomorfo a $\mathbb{N}$. Vemos portanto que $\mathbb{N}$ é de Lindelöf, e do Teorema 2.1.5 vem que **CC**($\mathbb{R}$) se verifica. ■

Lema 2.1.10 ([35]) *A família de todos os subconjuntos não vazios fechados de $\mathbb{R}$ tem uma função de escolha.*

Demonstração: Seja $F \neq \emptyset$ um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. Se F for limitado superiormente, então escolhemos o seu máximo, que existe porque F é fechado. Caso contrário, escolhe-se o mínimo de $F \cap [0, +\infty)$. ■

Em ZFC todos os espaços métricos de Lindelöf são separáveis. Como iremos ver no capítulo seguinte tal pode não acontecer na ausência do Axioma da Escolha. Esse resultado é demonstrável para subespaços de $\mathbb{R}$, ainda que não se possa simplesmente dizer, como vimos anteriormente (2.1.2), que todos os subespaços de $\mathbb{R}$ são separáveis.

Teorema 2.1.11

(a) *Todo o subespaço fechado de $\mathbb{R}$ é separável.*

(b) *Todo o subespaço compacto de $\mathbb{R}$ é separável.*

(c) *Todo o subespaço de Lindelöf de $\mathbb{R}$ é separável.*

Demonstração: (a) Seja $A \neq \emptyset$ um subespaço fechado do conjunto dos números reais e defina-se a família $\mathcal{F} := \{[r, s] \cap A : r, s \in \mathbb{Q} \text{ e } [r, s] \cap A \neq \emptyset\}$ constituída por subconjuntos de $\mathbb{R}$ fechados e não vazios. Seja e a função de escolha do

Lema 2.1.10. O conjunto $\{e(F) : F \in \mathcal{F}\}$ é denso em A, e numerável porque $\mathcal{F}$ é numerável.

Para $A = \emptyset$, o resultado é obviamente trivial.

(b) Vem automaticamente de (a) e do Teorema de Heine-Borel.

(c) O Teorema 2.1.9 afirma que temos duas hipóteses: ou $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verifica e então todos os subespaços de $\mathbb{R}$ são separáveis, ou os subespaços de Lindelöf de $\mathbb{R}$ são precisamente os compactos, e portanto por (b) separáveis. ∎

O resultado (c) deste corolário é a implicação inversa de uma das condições (equivalentes) do Corolário 2.1.7.

É interessante notar que, apesar de ser um teorema de ZF, a sua demonstração depende de $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

2.2 $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial

Nesta secção vamos averiguar quando é que $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial. Tal como o facto de $\mathbb{R}$ ser de Fréchet-Urysohn, também não é provável em ZF que $\mathbb{R}$ é sequencial (Modelo Básico de Cohen).

Tendo em conta a Proposição 1.2.12, poderíamos ser levados a pensar que este problema seguiria um caminho paralelo ao da idempotência do fecho sequencial em $\mathbb{R}$, ou seja que seria equivalente a $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$. Um dos principais objectivos desta secção é mostrar que tal não se verifica.

Teorema 2.2.1 ([16]) *Se $\mathbb{R}$ é sequencial, então todo o subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ é Dedekind-infinito.*

Demonstração: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto infinito Dedekind-finito. Claramente A é sequencialmente fechado, mas não separável, logo pelo Teorema 2.1.11 A não é fechado. ∎

Como $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, é imediato do Corolário 1.2.17 o seguinte resultado.

Proposição 2.2.2 *$\mathbb{R}$ é sequencial se e só se todo o subespaço completo de $\mathbb{R}$ é fechado.*

Fazendo um paralelo com as Proposições 2.1.3 e 2.1.4, tentaremos no próximo teorema dar uma melhor ideia de como podem ser os subespaços completos não fechados de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2.3 ([16]) *Todo o subespaço completo de $\mathbb{R}$ é fechado se e só se $\mathbb{R}$ é o único subespaço denso em $\mathbb{R}$ completo.*

Dito por outras palavras, se existir $A \subseteq \mathbb{R}$ completo e não fechado, então existe $B \neq \mathbb{R}$ completo e denso em $\mathbb{R}$.

A demonstração desta implicação segue inicialmente um percurso paralelo à de (ii)$\Rightarrow$(i) na Proposição 2.1.3.

Demonstração: Seja A um subespaço de $\mathbb{R}$ completo mas não fechado, e suponhamos que $0 \in k_{\mathbb{R}}(A) \setminus A$ é um ponto de acumulação à esquerda de A. Como $\mathbb{Q}$ é numerável, existe $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $[0, r] \cap A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$; caso contrário existiria uma sucessão de números racionais em A a convergir para 0.

Define-se $A_n := (\frac{r}{n+1}, \frac{r}{n}) \cap A$ e $A_0 := [0, r] \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, que é ainda um espaço completo mas não fechado. Procede-se agora como na demonstração de 2.1.3, definindo $\mathbb{M} := \{m \in \mathbb{N} : A_m \neq \emptyset\}$, a base de $\mathbb{R}$ $((r_m, s_m))_{m\in\mathbb{M}}$, que consiste nos intervalos com extremos racionais, as funções injectivas $f_m : A_m \longrightarrow (r_m, s_m)$ e $f : A_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) := f_m(x)$ se $x \in A_m$.

O espaço $B := f(A_0)$ é denso em $\mathbb{R}$, uma vez que, para cada $m \in \mathbb{M}$, $(r_m, s_m) \cap B \supseteq f_m(A_m) \neq \emptyset$ e $B \neq \mathbb{R}$ porque $B \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, dado que f transforma números irracionais em irracionais. Falta apenas provar que B é completo.

Seja (b_n) uma sucessão de Cauchy em B, e consideremos, para cada elemento b de B, $m(b) := \min\{m \in \mathbb{M} : b \in f_m(A_m)\}$. Como todas as funções f_m são injectivas, podemos definir, para cada n, $a_n := f^{-1}_{m(b_n)}(b_n)$. O espaço A_0 é completo e limitado, logo é sequencialmente compacto (ver o Lema 2.2.4 a seguir), e portanto a sucessão (a_n) de A_0 tem uma subsucessão $(a_{k(n)})$ convergente para um ponto $a \in A_0$. Esta subsucessão apenas intersecta um número finito dos conjuntos A_m, senão o único limite possível seria $0 \notin A_0$, o que implica que a subsucessão está residualmente em A_l, para um $l \in \mathbb{M}$ fixo, e portanto $a \in A_l$.

Finalmente, a continuidade de f_l implica que $f(a_{k(n)})$ converge para $f(a) \in B$. Mas, pela maneira como a sucessão (a_n) foi definida, $f(a_{k(n)}) = b_{k(n)}$, ou seja, (b_n) é uma sucessão de Cauchy com uma subsucessão convergente, logo também ela converge. ∎

Lema 2.2.4 *Um subespaço limitado de $\mathbb{R}$ é sequencialmente compacto se e só se é completo.*

Demonstração: Todo o espaço sequencialmente compacto é completo (1.2.18). Para provar a outra implicação, consideremos um subespaço A limitado e completo de $\mathbb{R}$, i.e. $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = A$. Como A é limitado, $k_{\mathbb{R}}(A)$ é também limitado, ou seja $k_{\mathbb{R}}(A)$ é compacto e portanto sequencialmente compacto, pela Proposição 1.2.8. Temos assim que cada sucessão (a_n) em A tem uma subsucessão $(a_{k(n)})$ convergente em $k_{\mathbb{R}}(A)$, logo convergente em A pois $\sigma_R(A) = A$. ∎

Pode-se provar, sem necessidade de utilizar qualquer forma de escolha, que todo o espaço (pseudo)métrico completo e totalmente limitado é sequencialmente compacto ([2]). Acresce ainda que em $\mathbb{R}$ as noções de subespaço limitado e totalmente limitado coincidem, pelo que o Lema que acabámos de provar é um caso particular deste resultado mais geral. Como não vai ser utilizada neste trabalho a versão mais geral, optou-se por apresentar apenas o caso dos números reais, por a sua demonstração ser mais simples.

Neste ponto estamos em condições de responder parcialmente à seguinte pergunta "Existem subespaços de $\mathbb{R}$ sequencialmente compactos e não compactos?". Já há algum tempo que autores como T. J. Jech [31, p.21] ou W. Felschner [12, p.128] realçaram que não se pode provar a equivalência entre compacidade e compacidade sequencial para subespaços de $\mathbb{R}$ sem recorrer a algum tipo de escolha. Não é no entanto conhecida qual a condição de Teoria dos Conjuntos necessária e suficiente para provar essa equivalência.

Como iremos ver, este problema está relacionado com o que temos estado a estudar até ao momento, i.e. saber quando é que $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial.

Teorema 2.2.5 ([16]) *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $A \subseteq \mathbb{R}$ *é completo se e só se é fechado;*

(ii) *se* $A \subseteq \mathbb{R}$ *é sequencialmente compacto, então é fechado;*

(iii) *se* $A \subseteq \mathbb{R}$ *é completo, então é separável;*

(iv) *se* $A \subseteq \mathbb{R}$ *é sequencialmente compacto, então é separável.*

Demonstração:

(i)⇒(iii) e (ii)⇒(iv) Pelo Teorema 2.1.11.

(i)⇒(ii) e (iii)⇒(iv) Pela Proposição 1.2.18.

(ii)⇒(i) Que todo o subespaço fechado de $\mathbb{R}$ é completo é uma consequência imediata do Corolário 1.2.16.

Para a outra implicação consideramos $A \subseteq \mathbb{R}$ completo. Logo, para cada n em $\mathbb{N}$, $A_n := A \cap [-n, n]$ é um espaço completo, e portanto por 2.2.4 cada A_n é sequencialmente compacto. Utilizando agora a hipótese, vem que A_n é fechado para todo o $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, é fácil verificar que $k_{\mathbb{R}}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} k_{\mathbb{R}}(A_n)$, mas como $k_{\mathbb{R}}(A_n) = A_n$, $k_{\mathbb{R}}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$, ou seja A é fechado.

(iv)⇒(ii) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um espaço sequencialmente compacto. Por (iv), existe $B := \{x_n : x_n \in A \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$ numerável e denso em A, e portanto $k_{\mathbb{R}}(A) = k_{\mathbb{R}}(B)$.

Seja x um elemento de $k_{\mathbb{R}}(A) = k_{\mathbb{R}}(B)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap B \neq \emptyset$. Define-se então $\varphi(n) := \min\{k \in \mathbb{N} : x_k \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\}$. A sucessão $(x_{\varphi(n)})$ converge para x, e como A é sequencialmente compacto, pela Proposição 1.2.18 A é completo. Logo $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = A$ (1.2.15), o que significa que x é um elemento de A. ∎

Proposição 2.2.6 ([16]) *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *um subespaço de $\mathbb{R}$ é sequencialmente compacto se e só se é compacto;*

(ii) *todo o subespaço sequencialmente compacto de $\mathbb{R}$ é fechado;*

(iii) *todo o subespaço sequencialmente compacto de $\mathbb{R}$ é limitado.*

Todo o espaço compacto é sequencialmente compacto (Proposição 1.2.8) e o Teorema de Heine-Borel diz que um subespaço de $\mathbb{R}$ é compacto se e só se é fechado e limitado. É portanto claro que (i) é equivalente à conjunção das condições (ii) e (iii). Temos então que é suficiente mostrar que (ii) e (iii) são equivalentes.

Para tal basta ver que existe um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e todo o intervalo aberto de $\mathbb{R}$ (ver demonstração de 2.1.1), e que os homeomorfismos preservam os subespaços sequencialmente compactos.

O Teorema 2.1.9 diz que, na ausência de $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$, os espaços compactos e os de Lindelöf coincidem em $\mathbb{R}$. Não é portanto de estranhar que seja possível substituir compacto por de Lindelöf na condição (i) da Proposição 2.2.6.

Lema 2.2.7 *Todo o subespaço de $\mathbb{R}$ sequencialmente compacto e de Lindelöf é compacto.*

Demonstração: Se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verifica, então compacto é equivalente a sequencialmente compacto e, se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não se verifica, pelo Teorema 2.1.9, ser compacto é equivalente a ser de Lindelöf. ■

Proposição 2.2.8 ([16]) *Todo o subespaço de $\mathbb{R}$ sequencialmente compacto é compacto se e só se todo o subespaço de $\mathbb{R}$ sequencialmente compacto é de Lindelöf.*

A demonstração desta proposição é imediata a partir do Lema 2.2.7.

Para concluir esta secção, vamos mostrar que o Axioma da Escolha Numerável para famílias de conjuntos de números reais ($\mathbf{CC}(\mathbb{R})$) não é necessário para provar que $\mathbb{R}$ *é sequencial*. Vamos fazer isso provando que $\mathbb{R}$ é sequencial a partir de uma forma de escolha, $\mathbf{CMC}_{WO}(\mathbb{R})$, independente de $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ (Modelo de Feferman/Levy – $\mathcal{M}9$ em [28]).

Antes do teorema que nos permite mostrar esta independência, enunciamos um lema que, tal como a Proposição 1.1.18, compara as condições que estivemos a estudar com um princípio de escolha.

Lema 2.2.9 ([16]) *$\mathbb{R}$ é um espaço sequencial se e só se o Axioma da Escolha (numerável) se verifica para famílias de subespaços de $\mathbb{R}$ sequencialmente fechados (=completos).*

Demonstração: Se $\mathbb{R}$ é sequencial, então todo o espaço sequencialmente fechado é fechado, e a família de todos os subespaços fechados de $\mathbb{R}$ tem uma função de escolha (Lema 2.1.10).

Consideremos agora $A = \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ um subespaço sequencialmente fechado de $\mathbb{R}$ e $x \in k_{\mathbb{R}}(A)$. Queremos provar que x pertence a A. Definem-se os conjuntos $A_n := [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap A$, que são sequencialmente fechados por serem a intersecção de dois conjuntos sequencialmente fechados. Por hipótese, existe (x_n) tal que, para $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n \subseteq A$. A sucessão (x_n) converge para x, logo $x \in \sigma_{\mathbb{R}}(A) = A$. ∎

Teorema 2.2.10 ([16]) *Se $\mathbf{CMC}_{WO}(\mathbb{R})$ se verifica, então $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial.*

Demonstração: Seja (A_n) uma família de subespaços sequencialmente fechados não vazios de $\mathbb{R}$. Tendo em conta o lema precedente, é suficiente provar que esta família admite uma função de escolha.

Por $\mathbf{CMC}_{WO}(\mathbb{R})$, existe uma família (B_n) de conjuntos não vazios bem-ordenáveis tal que $B_n \subseteq A_n$ para cada n. Como em cada B_n existe uma boa-ordem, $\sigma_{\mathbb{R}}(B_n) = k_{\mathbb{R}}(B_n) \subseteq \sigma_{\mathbb{R}}(A_n) = A_n$. Por 2.1.10, toda a família de subconjuntos fechados em $\mathbb{R}$ admite uma escolha, logo existe $(x_n)_n$ tal que $x_n \in k_{\mathbb{R}}(A_n) \subseteq A_n$. ■

Corolário 2.2.11 *Se $\mathbb{R}$ é a união numerável de conjuntos numeráveis, então $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial.*

Demonstração: Se $\mathbb{R}$ é a união numerável de conjuntos numeráveis, então $\mathbb{R}$ é a união bem-ordenada de conjuntos numeráveis, que é equivalente a $\mathbf{MC}_\omega(\mathbb{R})$ pela Proposição 1.1.13. É então imediato que $\mathbf{MC}_\omega(\mathbb{R})$ implica $\mathbf{CMC}_{WO}(\mathbb{R})$. ■

Corolário 2.2.12 ([16]) *A condição "$\mathbb{R}$ é um espaço sequencial" não implica $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.*

Em [6] A. Church provou que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ implica que o primeiro ordinal não numerável não é o limite de uma sucessão de ordinais numeráveis, o que implica que $\mathbb{R}$ não é a união numerável de conjuntos numeráveis (ver [31, p.148]). No Modelo de Feferman/Levy [11], $\mathbb{R}$ é a união numerável de conjuntos numeráveis, logo $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não se verifica, mas por 2.2.11 $\mathbb{R}$ é sequencial.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos deduzir também o seguinte corolário, simplificando assim a prova que está em [27].

Corolário 2.2.13 *Se $\mathbb{R}$ é a união numerável de conjuntos numeráveis, então o Axioma da Escolha Numerável não se verifica para famílias de subconjuntos numeráveis de $\mathbb{R}$.*

Como vimos na demonstração de 2.2.11, se $\mathbb{R}$ é a união numerável de conjuntos numeráveis, então $\mathbf{CMC}_\omega(\mathbb{R})$ verifica-se. Conclui-se que o Axioma da Escolha Numerável não se verifica para famílias de subconjuntos numeráveis de $\mathbb{R}$ porque $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não é válido (1.1.14).

Capítulo 3

Propriedades numeráveis

No terceiro capítulo vão ser estudadas as relações entre o Axioma da Escolha Numerável e algumas noções topológicas que envolvem numerabilidade. Nomeadamente, vamos centrar a nossa atenção nas classes de espaços de Lindelöf, com uma base numerável (i.e., que verificam o Segundo Axioma da Numerabilidade) e separáveis.

3.1 Espaços métricos

Como é bastante conhecido, um espaço (pseudo)métrico é de Lindelöf se e só se tem uma base numerável se e só se é separável. Estas equivalências não permanecem válidas na ausência do Axioma da Escolha, o que aliás já foi visto para subespaços de $\mathbb{R}$ no capítulo anterior. O caso real já é objecto de estudo há algum tempo e mostra que algumas das implicações não se verificam em ZF. Mas foram C. Good e I. J. Tree [15] que realçaram de uma forma global a impossibilidade de provar em ZF todas as implicações, à excepção de uma, para espaços métricos. Na sequência desse trabalho H. L. Bentley e H. Herrlich [2] estudaram qual seria a situação dos mesmos resultados para espaços pseudométricos.

Nesta secção vamos descrever o que acontece para os espaços (pseudo)métricos, aproveitando para ver qual é a situação das implicações que em ZFC são verdadeiras para espaços topológicos.

Lema 3.1.1 *Todo o espaço pseudométrico separável tem uma base numerável.*

Demonstração: Sejam (X, d) um espaço pseudométrico e $A \subseteq X$ numerável e denso em X. Então $\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in A \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$ é uma base numerável de X. ∎

Teorema 3.1.2 *Se o Axioma da Escolha Numerável se verifica, então, para um espaço pseudométrico X, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *X é de Lindelöf;*

(ii) *X tem uma base numerável;*

(iii) *X é separável.*

Demonstração: A implicação (iii)⇒(i) é o lema precedente e (ii)⇒(iii) é óbvia. Falta então provar (i)⇒(ii).

Seja X um espaço pseudométrico de Lindelöf. Consideremos para cada n a cobertura aberta $\mathcal{U}_n := \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$. Como X é de Lindelöf, cada $\mathcal{U}_n$ tem uma subcobertura numerável. Por **CC** podemos escolher para cada n uma dessas subcoberturas numeráveis $\mathcal{V}_n$. É agora fácil concluir que $\mathcal{B} := \bigcup_n \mathcal{V}_n$ é uma base para a topologia de X e, pelo Lema 1.1.20, $\mathcal{B}$ é numerável, pois é a união numerável de conjuntos numeráveis. ∎

Note-se que a demonstração usual destas equivalências usa apenas o Axioma da Escolha Numerável (e.g., [47, Teorema 16.11]), ainda que isso nem sempre seja mencionado de forma explícita.

É válido para espaços topológicos em geral que todo o espaço com uma base numerável é separável, o que se prova facilmente usando **CC**, e é de Lindelöf, que já vimos ser equivalente a **CC**($\mathbb{R}$) no Corolário 2.1.6.

A Proposição que se segue é imediata a partir dos Corolários 2.1.6, 2.1.7 e do Lema 3.1.1.

Proposição 3.1.3 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o espaço (pseudo)métrico com uma base numerável é de Lindelöf;*

(ii) *todo o espaço (pseudo)métrico separável é de Lindelöf.*

O Segundo Axioma da Numerabilidade é hereditário (em ZF) ou seja, se um espaço topológico tem uma base numerável, então todo o seu subespaço tem uma base numerável. É assim imediato que, se o Axioma da Escolha Numerável se verifica, a separabilidade é também uma propriedade hereditária para espaços (pseudo)métricos. No decurso do estudo que estamos a fazer, surgem naturalmente as condições em que subespaços de espaços (pseudo)métricos separáveis são separáveis.

Proposição 3.1.4 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o espaço topológico* T_0 *com uma base numerável é separável;*

(ii) *um espaço métrico tem uma base numerável se e só se é separável;*

(iii) *todo o subespaço de um espaço métrico separável é separável.*

Demonstração: É imediato que (i)⇒(ii) porque todo o espaço metrizável é T_0.

(ii)⇒(iii) O Segundo Axioma da Numerabilidade é hereditário, logo de (ii) decorre que a separabilidade é também hereditária.

(iii)⇒$\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ Se (iii) é verificada, então todo o subespaço de $\mathbb{R}$ é separável, o que pelo Corolário 2.1.2 é equivalente a $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

$\mathbf{CC}(\mathbb{R})$⇒(i) Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico T_0 com uma base numerável (B_n), então pelo Lema 1.2.9 $|X| \leq |\mathbb{R}|$, e portanto $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ diz que existe um conjunto $\{x_n : x_n \in B_n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$. Esse conjunto é denso em X. ∎

Proposição 3.1.5 ([2]) *As condições seguintes são equivalentes a* **CC***:*

(i) *todo o espaço topológico (pseudométrico) com uma base numerável é separável;*

(ii) *todo o espaço pseudométrico de Lindelöf é separável;*

(iii) *todo o espaço topológico (pseudométrico) de Lindelöf e com uma base numerável é separável.*

Demonstração: As implicações **CC**$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iii) e **CC**$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) ou são óbvias ou estão no Teorema 3.1.2. Basta-nos então provar que, se todo o espaço pseudométrico de Lindelöf e com uma base numerável é separável, então **CC** é válido.

Seja (X_n) uma família numerável de conjuntos não vazios. Suponhamos que $*, \infty \notin \bigcup_n X_n$ e consideremos $\frac{1}{\infty} := 0$.

Define-se o espaço pseudométrico (X, d) com $X := \bigcup_n (X_n \times \{n\}) \cup \{(*, \infty)\}$ e d definida por

$$d((x,n),(y,m)) := \begin{cases} 0 & \text{se } n = m \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

O espaço (X, d) tem uma base numerável $\{X_n \times \{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(*, \infty) \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} (X_k \times \{k\}) : n \in \mathbb{N}\}$ e é de Lindelöf (é inclusive compacto) porque todo o aberto a que $(*, \infty)$ pertence contém todos menos um número finito dos conjuntos $X_n \times \{n\}$, sendo portanto apenas necessária uma escolha finita para provar que X é de Lindelöf (compacto).

Temos então que X é separável por hipótese, logo existe um conjunto numerável que toma valores em todos os conjuntos $X_n \times \{n\}$, o que induz uma função de escolha na família (X_n). ■

Proposição 3.1.6 ([2]) *O Axioma da Escolha Numerável verifica-se se e só se todo o subespaço de um espaço pseudométrico separável é separável.*

Demonstração: Uma implicação é consequência do facto de ter base numerável ser uma propriedade hereditária e do Teorema 3.1.2.

Seja agora (X_n) uma família numerável de conjuntos não vazios e definamos em $X := \bigcup_n ((X_n \cup \{0\}) \times \{n\})$ uma pseudométrica d por

$$d((x,n),(y,m)) := \begin{cases} 0 & \text{se } n = m \\ 1 & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

O espaço (X, d) tem um subespaço numerável denso $A := \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$, logo $Y := X \backslash A$ tem também um subespaço numerável denso, o que implica a existência de uma escolha em (X_n). ■

Juntamente com as questões que temos estado a tratar seria interessante saber quais as condições de Teoria dos Conjuntos que são equivalentes a: (a) todo o espaço métrico de Lindelöf é separável; (b) todo o espaço métrico de Lindelöf tem uma base numerável; (c) todo o subespaço de um espaço métrico de Lindelöf é de Lindelöf. As questões (b) e (c) estão também em aberto para espaços pseudométricos, mas são equivalentes às respectivas questões para espaços métricos, pois um espaço pseudométrico é de Lindelöf (resp. tem uma base numerável) se e só se a sua reflexão nos espaços métricos é de Lindelöf (resp. tem uma base numerável).

Não é conhecido se a condição (iii) da Proposição 3.1.5 é válida em ZF para espaços métricos, embora possa ser provada usando $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ e seja sempre válida para subespaços de $\mathbb{R}$ (2.1.11).

Os resultados finais desta secção mostram que as condições (a), (b) e (c) não são prováveis em ZF.

Proposição 3.1.7 ([15]) *Se todo o espaço métrico de Lindelöf tem uma base numerável, então o Axioma da Escolha Numerável verifica-se para famílias de conjuntos finitos (*$\mathbf{CC}(\mathrm{fin})$*).*

Demonstração: Seja (X_n) uma família numerável de conjuntos finitos não vazios. Pelo Lema 1.1.20 é suficiente provar que $\bigcup_n X_n$ é numerável.

Consideremos então o espaço métrico (X, d), com $X := \bigcup_n (X_n \times \{n\}) \cup \{(*, \infty)\}$ e d definida por

$$d((x,n),(y,m)) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x,n) = (y,m) \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{se } (x,n) \neq (y,m). \end{cases}$$

Analogamente ao que foi feito na demonstração da Proposição 3.1.5, o espaço (X, d) é de Lindelöf (também é compacto). Temos então que X tem uma base numerável. Como qualquer base de X contém o conjunto $\{\{(x,n)\} : x \in X_n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$, a união $\bigcup_n X_n$ é numerável. ■

Corolário 3.1.8 *Se todo o espaço métrico de Lindelöf é separável, então* $\mathbf{CC}(\text{fin})$ *verifica-se.*

Corolário 3.1.9 *Se todo o subespaço de um espaço métrico de Lindelöf é de Lindelöf, então* $\mathbf{CC}(\text{fin})$ *verifica-se.*

Demonstração: Consideremos o espaço de Lindelöf X definido na demonstração da Proposição 3.1.7. O subespaço $Y := X \setminus \{(*, \infty)\}$ é também de Lindelöf. Mas Y é discreto, logo tem que ser numerável e consequentemente $\mathbf{CC}(\text{fin})$ verifica-se. ■

Fica patente nesta demonstração que, se todo o subespaço de um espaço métrico de Lindelöf é de Lindelöf, então $\mathbb{N}$ é de Lindelöf, ou seja $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ verifica-se. Esta conclusão não é aliás uma surpresa, pois se todo o subespaço de, por exemplo, um intervalo fechado de $\mathbb{R}$ for de Lindelöf, $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ verifica-se (ver 2.1.6 ou 2.1.9).

3.2 Base numerável

A presente secção é dedicada ao estudo de uma caracterização dos espaços que verificam o Segundo Axioma da Numerabilidade, que não é demonstrável em ZF. Começamos por enunciar o teorema que nos dá a referida caracterização em ZFC, para de seguida estudarmos o grau de escolha envolvido nesse teorema.

Teorema 3.2.1 (ZFC) *Toda a base de um espaço que verifica o Segundo Axioma da Numerabilidade contém uma base numerável.*

Como iremos analisar de seguida este resultado não é sequer válido para o espaço topológico real, o que, como acontece noutras situações, tem um papel central na prova de que o Teorema 3.2.1 é equivalente a $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.2.2 ([17]) *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *toda a base de um espaço que verifica o Segundo Axioma da Numerabilidade contém uma base numerável;*

(ii) *toda a base para os abertos do espaço topológico real contém uma base numerável.*

Demonstração: Como $\mathbb{R}$ verifica o Segundo Axioma da Numerabilidade, é claro que (i) implica (ii).

$\mathbf{CC}(\mathbb{R}) \Rightarrow$(i) Para esta implicação vamos seguir a demonstração habitual (e.g., [9, 2.4.17], [19, 1.1.20]), tendo no entanto o cuidado de não usar nenhum princípio de escolha mais forte do que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico com uma base numerável $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{C}$ uma qualquer base de $(X, \mathcal{T})$. Definem-se, para cada par $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{C}(n, m) := \{C \in \mathcal{C} : B_n \subseteq C \subseteq B_m\}$ e $\mathbb{L} := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mathcal{C}(n, m) \neq \emptyset\}$. É evidente que $\mathbb{L} \neq \emptyset$ e que $(\mathcal{C}(n, m))_{(n,m)\in\mathbb{L}}$ é uma família numerável de subconjuntos não vazios de $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, pois $|\mathbb{L}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. Mas como $(X, \mathcal{T})$ tem uma base numerável, então $|\mathcal{T}| \leq |\mathbb{R}|$, pelo Lema 1.2.9, e portanto por $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ existe uma função de escolha em $(\mathcal{C}(n, m))_{(n,m)\in\mathbb{L}}$. Isto é equivalente a dizer que existe um conjunto da forma $\{C(n, m) : (n, m) \in \mathbb{L} \text{ e } C(n, m) \in \mathcal{C}(n, m)\}$, que facilmente se prova ser uma base numerável de $(X, \mathcal{T})$.

(ii)$\Rightarrow \mathbf{CC}(\mathbb{R})$ A proposição 2.1.4 diz-nos que é suficiente mostrar que todo o espaço denso em $\mathbb{R}$ é separável.

Seja A um espaço denso em $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{A} := \{(a, b) : a, b \in A,\, a < b\}$ é uma base para os abertos de $\mathbb{R}$ porque A é denso em $\mathbb{R}$. Por hipótese existe uma base numerável $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ contida em $\mathcal{A}$. O conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é numerável e denso em A, logo A é separável. ∎

O Teorema 3.2.1 fornece uma definição alternativa para o Segundo Axioma da Numerabilidade que, na ausência do Axioma da Escolha, não se mantém equivalente à definição habitual. Esse facto serviu de motivação à introdução de uma "nova" definição em ZF.

Definição 3.2.3 Um espaço topológico tem *sempre base numerável* (SBN) se toda a base contém uma base numerável.

Os resultados seguintes fazem um paralelo com alguns dos resultados da primeira secção deste capítulo. Nomeadamente, são comparadas as classes de espaços separáveis e de espaços de Lindelöf com a classe que acabámos de definir.

Corolário 3.2.4 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) $\mathbb{R}$ *tem SBN;*

(ii) *todo o espaço (pseudo)métrico separável tem SBN.*

Este resultado é consequência imediata do Teorema 3.2.2 e de que todo o espaço pseudométrico separável tem uma base numerável (Lema 3.1.1).

A condição *todo o espaço topológico (ou pseudométrico) que tem SBN é separável* é equivalente a **CC**. A demonstração é idêntica à que foi feita para espaços com uma base numerável (3.1.5). Atendendo à maneira como o Teorema 3.2.2 foi demonstrado, talvez não seja surpreendente que, para subespaços de $\mathbb{R}$, este resultado seja demonstrável em ZF.

Teorema 3.2.5 *Todo o subespaço de* $\mathbb{R}$ *que tem SBN é separável.*

Demonstração: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um espaço que tem SBN. Sem perda de generalidade, suponhamos que todos os elementos de A são pontos de acumulação à esquerda e à direita de A.

O conjunto $\mathcal{A} := \{(a,b) \cap A : a, b \in A,\ a < b\}$ é uma base para os abertos de A. Como A tem SBN, existe uma base numerável $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ contida em $\mathcal{A}$. O conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é numerável e denso em A, logo A é separável. ■

Na demonstração que acabámos de fazer, se A tiver elementos que não sejam pontos de acumulação à esquerda e à direita de A, a construção da base $\mathcal{A}$ tem que ser alterada, mas a demonstração permanece essencialmente a mesma.

A demonstração de que *todo o espaço métrico com uma base numerável é separável* implica $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ (ver 3.1.4) usa o facto de esse resultado não ser válido para subespaços de $\mathbb{R}$. Temos assim que essa demonstração não pode ser adaptada para espaços que têm SBN. Fica portanto por saber se existe algum espaço métrico que tem SBN mas não é separável.

Teorema 3.2.6 *Todo o subespaço real de Lindelöf tem SBN se e só se* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ *se verifica.*

Demonstração: Se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verifica, então, pelo Teorema 3.2.2, todo o subespaço de $\mathbb{R}$ tem SBN.

Pode-se provar, de maneira semelhante à demonstração do Teorema 3.2.2, que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é equivalente à afirmação: *o intervalo fechado* $[0,1]$ *tem* SBN.

Como [0,1] é de Lindelöf, por hipótese tem SBN o que implica $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$. ■

Corolário 3.2.7 *Se todo o espaço métrico de Lindelöf tem SBN, então* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ *verifica-se.*

Para terminar vê-se facilmente que a condição *Todo o espaço que tem SBN é de Lindelöf* é equivalente a $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$, uma vez que $\mathbb{N}$ tem SBN.

Uma questão ainda em aberto é a de saber quando é que a propriedade de ter SBN é hereditária. De momento não é inclusive conhecido se a hereditariedade de ter SBN é provável em ZF.

3.3 Produtos de espaços separáveis e com uma base numerável

Em ZFC o produto numerável de espaços com uma base numerável tem ainda uma base numerável, e o produto de uma família de espaços separáveis cujo índice tem cardinal inferior ou igual a $2^{\aleph_0}$ é separável. A primeira destas propriedades e a restrição da segunda ao produto numerável de espaços de Hausdorff separáveis foram consideradas por K. Keremedis [33], que provou que cada uma delas implica o Axioma da Escolha Numerável para famílias de conjuntos numeráveis ($\mathbf{CC}(\aleph_0)$). Nesta secção vamos mostrar que esses resultados podem ser melhorados, sem no entanto serem dadas respostas definitivas, pois não é conhecida uma condição de Teoria dos Conjuntos equivalente a qualquer das propriedades estudadas por Keremedis. No caso mais geral para espaços separáveis, atrás referido, temos uma resposta mais satisfatória.

Lema 3.3.1 *Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de conjuntos numeráveis.*

A união $\bigcup_n X_n$ é numerável se e só se existe uma família numerável de funções injectivas $(f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{N})_n$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Por hipótese, $X := \bigcup_n X_n$ é numerável, logo existe $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ injectiva. Obviamente as restrições $f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{N}$ da função f fornecem a família $(f_n)_n$ pretendida.

($\Leftarrow$) Se existir uma família $(f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{N})_n$, então pode-se construir uma função injectiva $f : \bigcup_n (X_n \times \{n\}) \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $f(x, n) := (f_n(x), n)$. Conclui-se primeiramente que a união disjunta dos X_n's é numerável. Definem-se agora $k(x) := \min\{n \in \mathbb{N} : x \in X_n\}$, para cada $x \in X = \bigcup_n X_n$, e $g : X \longrightarrow \bigcup (X_n \times \{n\})$ com $g(x) := (x, k(x))$. A função g é injectiva e portanto X é numerável. ■

Proposição 3.3.2 ([17]) *Se o produto numerável de espaços com uma base numerável tem uma base numerável, então* **CUC** *verifica-se.*

Demonstração: Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de conjuntos numeráveis não vazios. Pelo Lema 3.3.1 é suficiente provar que existe uma família de funções injectivas $(f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{N})_n$. Consideremos ainda os espaços topológicos discretos $Y_n := X_n \cup \{n\}$.

Cada espaço Y_n tem uma base numerável, logo $Y := \prod_n Y_n \neq \emptyset$ tem uma base numerável. Se $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ for base de Y, como as projecções são sobrejecções abertas, então $\{p_n(B_k) : k \in \mathbb{N}\}$ é uma base para Y_n. Para cada $x \in X_n$, $\{x\}$ é um elemento de qualquer base de Y_n. Existem então funções $f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{N}$ definidas por $f_n(x) := \min\{k \in \mathbb{N} : p_n(B_k) = \{x\}\}$, o que conclui a demonstração. ∎

Proposição 3.3.3 *Se o produto numerável de espaços separáveis de Hausdorff é separável, então* **CUC** *verifica-se.*

Demonstração: Considera-se o espaço produto Y definido como na demonstração da Proposição 3.3.2. Por hipótese Y é separável, logo existe D numerável e denso em Y, e consequentemente $p_n(D)$ é denso em Y_n, ou seja $p_n(D) = Y_n$. Uma bijecção entre D e $\mathbb{N}$ induz, para cada n, uma função injectiva de X_n para $\mathbb{N}$. ∎

Corolário 3.3.4 *Se o produto* $\prod_{i \in \mathbb{R}} X_i$ *de uma família* $(X_i)_{i \in \mathbb{R}}$ *de espaços separáveis de Hausdorff é separável, então para toda a família* $(Y_i)_{i \in \mathbb{R}}$ *de conjuntos numeráveis existe uma família de funções injectivas* $(f_i : Y_i \longrightarrow \mathbb{N})_{i \in \mathbb{R}}$.

A demonstração segue os mesmos passos que a da proposição precedente, apenas com uma alteração de cardinal.

Proposição 3.3.5 *Se* $\mathbf{CC}(2^{\aleph_0})$ *se verifica, então o produto numerável de espaços com uma base numerável tem uma base numerável.*

Demonstração: Seja $(X_n, \mathcal{T}_n)$ uma família de espaços topológicos com base numerável. Precisamos de mostrar que $\prod_n (X_n, \mathcal{T}_n)$ tem uma base numerável.

Pelo Lema 1.2.9, sabemos que $|\mathcal{T}_n| \leq 2^{\aleph_0}$ para cada n. Consideremos os conjuntos $C_n := \{(f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{T}_n) : f(\mathbb{N}) \text{ é uma base de } (X_n, \mathcal{T}_n)\}$. Para cada n, $|C_n| \leq |(\mathcal{T}_n)^{\mathbb{N}}| \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, e por $\mathbf{CC}(2^{\aleph_0})$ existe $(f_n)_n$ tal que f_n é um elemento de C_n.

É agora claro que $\mathcal{C} := \{p_n^{-1}(f_n(k)) : n, k \in \mathbb{N}\}$ é uma sub-base numerável do espaço produto, e a base gerada por $\mathcal{C}$ é também numerável. ∎

Corolário 3.3.6 *O produto numerável de espaços com topologias finitas tem uma base numerável se e só se o Axioma da Escolha numerável é válido para famílias de conjuntos finitos (*$\mathbf{CC}(\text{fin})$*).*

A demonstração deste corolário é imediata a partir das Proposições 3.3.2 e 3.3.5, tendo em conta que $\mathbf{CC}(\text{fin})$ é equivalente a $\mathbf{CUC}(\text{fin})$ (Lema 1.1.20).

Teorema 3.3.7 *O produto* $\prod\limits_{i \in \mathbb{R}} X_i$ *de uma família* $(X_i)_{i \in \mathbb{R}}$ *de espaços separáveis é separável se e só se o Axioma da Escolha é válido para famílias cujo índice tem cardinal igual a* $2^{\aleph_0}$.

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Para provar esta implicação vamos seguir a demonstração de [10, 2.3.15], tendo apenas o cuidado de adaptar essa demonstração à hipótese do nosso Teorema.

Seja $(X_i)_{i \in \mathbb{R}}$ uma família de espaços topológicos separáveis. Consideremos para cada $i \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_i := \{(f : \mathbb{N} \longrightarrow X_i) : f(\mathbb{N}) \text{ é denso em } X_i\}$. Por hipótese existe $(f_i)_{i \in \mathbb{R}}$ tal que $f_i \in A_i$ e o espaço $\prod_i f_i(\mathbb{N})$ é denso em $\prod_i X_i$. É portanto suficiente provar que $\prod_i f_i(\mathbb{N})$ é separável. A partir deste momento, segue-se a demonstração que está feita em [10].

$(\Rightarrow)$ Seja $(X_i)_{i \in \mathbb{R}}$ uma família de conjuntos não vazios e definam-se os espaços topológicos $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, com $Y_i := X_i \dot{\cup} \{i\}$ e $\mathcal{T}_i := \{\emptyset, X_i, Y_i\}$. Cada um dos espaços Y_i é separável e portanto $Y := \prod_i Y_i$ é também separável. Ou seja existe $D := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ numerável e denso em Y. Para cada $i \in \mathbb{R}$, tomemos

$k(i) := \min\{k \in \mathbb{N} : p_i(x_k) \neq i\}$, que existe porque $p_i(D)$ tem que ser denso em Y_i. A função de escolha pretendida é induzida por $(p_i(x_{k(i)}))_{i\in\mathbb{R}}$. ■

Se em vez de considerarmos famílias de cardinal $2^{\aleph_0}$ considerarmos famílias numeráveis, a demonstração permanece essencialmente igual.

Corolário 3.3.8 *O produto numerável de espaços separáveis é separável se e só se o Axioma da Escolha Numerável é válido.*

Na demonstração do Teorema 3.3.7 é evidente que podemos considerar apenas o produto de topologias finitas. Para termos um paralelo com o Corolário 3.3.6, devemos considerar espaços finitos.

Corolário 3.3.9

(a) *O produto* $\prod_{i\in\mathbb{R}} X_i$ *de uma família* $(X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ *de espaços com topologias finitas é separável se e só se o Axioma da Escolha é válido para famílias cujo índice tem cardinal igual a* $2^{\aleph_0}$.

(b) *O produto numerável de espaços com topologias finitas é separável se e só se* **CC** *se verifica.*

(c) *O produto* $\prod_{i\in\mathbb{R}} X_i$ *de uma família* $(X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ *de espaços finitos é separável se e só se* **AC**(fin) *é válido para famílias cujo índice tem cardinal igual a* $2^{\aleph_0}$

(d) *O produto numerável de espaços finitos é separável se e só se* **CC**(fin) *se verifica.*

Para demonstrar (c) e (d) basta recordar, uma vez mais, que **CC**(fin) é equivalente a **CUC**(fin) e proceder de maneira idêntica às demonstrações da Proposição 3.3.3 e da primeira parte do Teorema 3.3.7.

3.4 Produtos de espaços de Lindelöf

Depois de na secção precedente termos analisado em que condições se verificam certos resultados sobre o produto de espaços separáveis e com uma base numerável, vamos agora olhar para os produtos de espaços de Lindelöf. É no entanto do conhecimento geral que o produto de apenas dois espaços de Lindelöf pode não ser de Lindelöf. H. Herrlich [21] provou contudo que neste caso são os contra-exemplos que não podem prescindir de "alguma" forma de escolha.

Os principais resultados desta secção estão em [21].

Vamos começar pelo resultado que serviu de base aos resultados aqui apresentados e que é uma generalização do Teorema 2.1.9.

Teorema 3.4.1 ([21]) *Existe um espaço T_1 de Lindelöf e não compacto se e só se* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ *se verifica.*

Demonstração: Depois do Teorema 2.1.9, apenas precisamos de mostrar que a existência de um espaço T_1 de Lindelöf e não compacto implica $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$. Seja então X um espaço nessas condições. Como X é de Lindelöf, mas não compacto, tem uma cobertura aberta $\mathcal{U} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ numerável sem subcobertura finita. Sem perda de generalidade, podemos considerar $U_n \subset U_m$, para $n < m$. Definem-se $A_1 := U_1$ e $A_n := U_n \setminus U_{n-1} \neq \emptyset$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Consideramos ainda os conjuntos $B(n, x) := U_n \setminus \{x\}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in A_n$, e a cobertura aberta de X

$$\mathcal{V} := \{B(n, x) : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in A_n\}.$$

Como X é de Lindelöf, $\mathcal{V}$ tem uma subcobertura numerável $\mathcal{W} := \{W_k : k \in \mathbb{N}\}$. Claramente $\mathbb{M} := \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N}) W_k = B(n, x) \text{ para algum } x \in A_n\}$ é infinito porque caso contrário $\mathcal{W}$ não seria cobertura de X. Podemos assim definir, para cada $m \in \mathbb{M}$, $k(m) := \min\{k \in \mathbb{N} : W_k = B(m, x) \text{ para algum } x \in A_m\}$ e x_m como sendo o único elemento de A_m tal que $W_{k(m)} = B(m, x_m)$. O subespaço $Y := \{x_m : m \in \mathbb{M}\}$ de X é infinito numerável e discreto, uma vez que Y é ainda T_1 e cada x_m pertence a um conjunto finito aberto em Y, $\{x_n : n \leq m\} = U_m \cap Y$.

Para finalizar conclui-se que Y é de Lindelöf porque é fechado em X, e é homeomorfo a $\mathbb{N}$. Portanto $\mathbb{N}$ é de Lindelöf, o que é suficiente para concluir a demonstração, tendo em conta o Teorema 2.1.5. ∎

Os dois resultados seguintes são muito conhecidos pelo que são deixados sem demonstração. Note-se que a demonstração habitual do Lema 3.4.3 é válida em ZF.

Teorema 3.4.2 ([38, 37, 20]) *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *o produto de espaços compactos de Hausdorff é compacto;*

(ii) 2^I *é compacto para qualquer* I*, sendo* 2 *o espaço discreto com* 2 *pontos;*

(iii) *o Teorema do Ultrafiltro.*

Como já foi referido no final da Secção 1.1, o Teorema do Ultrafiltro é equivalente ao Teorema do Ideal Booleano Primo.

Lema 3.4.3 (e.g., [43, 103.6], [21]) $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ *não é de Lindelöf.*

Teorema 3.4.4 ([21]) *O produto de espaços que são de Lindelöf e de Hausdorff é de Lindelöf se e só se o Teorema do Ultrafiltro é válido e* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ *não.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ não é de Lindelöf, por hipótese $\mathbb{N}$ também não pode ser, logo pelo Teorema 2.1.5 $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não se verifica. Temos então que o Teorema 3.4.1 diz que os espaços de Lindelöf que são de Hausdorff são exactamente os compactos. É agora imediato, a partir do Teorema 3.4.2, que o Teorema do Ultrafiltro é válido.

($\Leftarrow$) Se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não é válido, então o Teorema 3.4.1 diz que os espaços de Lindelöf e de Hausdorff são exactamente os compactos. Como por hipótese o Teorema do Ultrafiltro é válido, uma vez mais o Teorema 3.4.2 permite concluir a demonstração. ∎

Existem de facto modelos onde UFT é válido e $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não (Modelo Básico de Cohen – $\mathcal{M}1$ em [28]).

Ao contrário do que acontece para produtos arbitrários, o produto de espaços finitos é de Lindelöf, em ZFC, uma vez que é compacto. É evidente a partir do Teorema 3.4.2 que este resultado pode ser provado a partir do Teorema do Ultrafiltro. Não é conhecida a situação da implicação inversa, mas apenas um resultado mais fraco.

Proposição 3.4.5 *Se 2^I é de Lindelöf para qualquer I, então ou se verifica* **UFT** *ou se verifica* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

Demonstração: Se, para qualquer I, 2^I é compacto, então pelo Teorema 3.4.2 **UFT** verifica-se. Se, pelo contrário, existe I tal que 2^I não é compacto, então por hipótese 2^I é um espaço de Lindelöf e não compacto. Como 2^I é um espaço T_1, pelo Teorema 3.4.1 $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é válido. ■

No Modelo de Truss I ($\mathcal{M}12(\aleph)$ em [28]), existe um conjunto I tal que 2^I não é de Lindelöf, dado que nem **UFT** nem $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verificam.

Para mais informações sobre o produto de espaços de Lindelöf em ZF, deverá consultar [21].

Capítulo 4

Espaços definidos por limites

Um assunto que é normalmente incluído num livro introdutório de Topologia é o estudo de limites e dos espaços que podem ser caracterizados através deles. Neste capítulo vamos ver que alguns dos resultados habitualmente estudados nesse contexto dependem do uso de "alguma" escolha. Vamos nomeadamente considerar limites de sucessões –como anteriormente para $\mathbb{R}$– e de ultrafiltros e as classes de espaços que podem ser definidas através dos seus limites, como por exemplo os espaços de Fréchet-Urysohn e os sequenciais.

4.1 Espaços definidos por sucessões

Como já vimos o espaço topológico $\mathbb{R}$ pode não ser um espaço sequencial (2.2.1), o que implica, naturalmente, que o teorema de ZFC *todo o espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é de Fréchet-Urysohn* não seja um Teorema de ZF. Claro que, entre $\mathbb{R}$ e a classe dos espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade, existem muitas outras classes que é interessante comparar com a classe dos espaços de Fréchet-Urysohn ou dos espaços sequenciais, nomeadamente as seguintes classes:

(a) espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade,

(b) espaços (pseudo)métricos,

(c) espaços com base numerável,

(d) espaços T_0 com base numerável,

(e) espaços métricos com base numerável,

(f) subespaços de $\mathbb{R}$.

Enquanto que para os espaços de Fréchet-Urysohn algumas destas questões já foram estudadas (e.g., [12, 23]), muito pouco se sabe sobre as relações entre o Axioma da Escolha (Numerável) e os resultados correspondentes para espaços sequenciais. Tal como no caso dos números reais, vamos também estudar simultaneamente a classe dos espaços que têm o fecho sequencial idempotente, por estar naturalmente relacionada com as outras duas classes.

Teorema 4.1.1 *Todo o espaço métrico é sequencial se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Na demonstração habitual de que todo o espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é de Fréchet-Urysohn ([10, 1.6.14]), a única escolha utilizada é **CC**.

($\Rightarrow$) Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família numerável de conjuntos não vazios. A Proposição 1.1.10 diz que é suficiente provar que existe uma sucessão que toma valores em X_n para um número infinito de valores de n.

Considera-se $Y := \bigcup_n (X_n \times \{n\}) \cup \{(*,\infty)\}$. A função $d : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, como em 3.1.7, por

$$d((x,n),(y,m)) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x,n) = (y,m) \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{se } (x,n) \neq (y,m) \end{cases}$$

é uma métrica em Y. Por hipótese Y é um espaço sequencial e como $X := Y \setminus \{(*,\infty)\}$ não é fechado em Y, também não é sequencialmente fechado. Ou seja, existe uma sucessão em X que converge para $(*,\infty)$, intersectando portanto um número infinito dos conjuntos $X_n \times \{n\}$, o que completa a demonstração. ■

O espaço Y que considerámos nesta demonstração é completo, e por isso o resultado seguinte é imediato. Como iremos também ver noutros casos, este resultado é uma generalização do que acontece no espaço métrico real.

Corolário 4.1.2 *As condições seguintes são equivalentes a* **CC**:

(i) *todo o espaço métrico completo é sequencial;*

(ii) *todo o subespaço completo de um espaço métrico é fechado.*

Demonstração: **CC**$\Rightarrow$(ii) Esta implicação é imediata a partir do Teorema 4.1.1, tendo em conta que a Proposição 1.2.14 diz que todo o subespaço métrico completo é sequencialmente fechado.

(ii)$\Rightarrow$(i) A condição (ii), juntamente com o Corolário 1.2.16, implica que um subespaço de um espaço métrico completo é completo se e só se é fechado. Do Corolário 1.2.17 vem que X é sequencial.

(i)$\Rightarrow$**CC** O espaço métrico Y construído na demonstração do Teorema 4.1.1 é completo, e portanto essa demonstração permanece válida para espaços métricos completos. ■

Corolário 4.1.3 *As condições seguintes são equivalentes a* **CC**:

(i) *todo o espaço (pseudo)métrico é de Fréchet-Urysohn;*

(ii) *todo o espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é de Fréchet-Urysohn;*

(iii) *todo o espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é sequencial.*

A equivalência entre (i) e (ii) é parte da Proposição 5 em [23]. A demonstração do Teorema 4.1.1 é uma adaptação da demonstração dessa proposição.

Teorema 4.1.4 *Todo o espaço que tem uma base numerável é sequencial se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica.*

Demonstração: Uma das implicações já está clara. Para a outra implicação, consideram-se $(X_n)_n$ e Y como na demonstração do Teorema 4.1.1, e uma topologia em Y definida através da base numerável

$$\mathcal{B} := \{X_n \times \{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\bigcup_{k=n}^{\infty} (X_k \times \{k\}) \cup \{(*, \infty)\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tal como em 4.1.1, o conjunto $Y \setminus \{(*, \infty)\}$ não é fechado. A partir deste ponto a demonstração prossegue como a demonstração do Teorema 4.1.1. ■

Corolário 4.1.5 *Todo o espaço que tem uma base numerável é de Fréchet-Urysohn se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica.*

Teorema 4.1.6 *O fecho sequencial é idempotente para todos os espaços métricos se e só se é válido o Axioma da Escolha Numerável.*

Demonstração: Como em todos os espaços de Fréchet-Urysohn o fecho sequencial é idempotente, uma das direcções é imediata.

Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de conjuntos não vazios, tomemos $\frac{1}{\infty} = 0$ e defina-se

$$Y := \bigcup_n [X_n \times \mathbb{N} \times \{n\} \cup \{(*, \infty, n)\}] \cup \{(*, \infty, \infty)\}.$$

No conjunto Y definimos uma métrica da seguinte maneira:

$$d((x,m,n),(x',m',n')) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x,m,n) = (x',m',n') \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} + |\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}| & \text{se } (x,m,n) \neq (x',m',n'). \end{cases}$$

Como, para cada $x \in X_n$, a sucessão $((x,k,n))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $(*, \infty, n)$, o ponto $(*, \infty, n)$ está em $\sigma_Y(X_n \times \mathbb{N} \times \{n\})$. Temos então que, para $X := \bigcup_n X_n \times \mathbb{N} \times \{n\}$, $\{(*, \infty, n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma_Y(X)$. A sucessão $((*, \infty, n))_n$ converge para $(*, \infty, \infty)$ e portanto $(*, \infty, \infty) \in \sigma_Y(\sigma_Y(X))$.

Finalmente, tem-se que por hipótese $\sigma_Y^2 = \sigma_Y$, o que significa que existe uma sucessão em X que converge para $(*, \infty, \infty)$. É agora fácil concluir que existe uma sucessão que toma valores em X_n para um número infinito de valores de n, o que tendo em vista a Proposição 1.1.10 conclui a demonstração. ■

Corolário 4.1.7 *O fecho sequencial é idempotente para todos os espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade se e só se é válido o Axioma da Escolha Numerável.*

Teorema 4.1.8 *O fecho sequencial é idempotente para todos os espaços que têm uma base numerável se e só se é válido o Axioma da Escolha Numerável.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam $(X_n)_n$ uma família numerável de conjuntos não vazios, $Y_n := X_n \cup \{*\}$ e $Y := \bigcup_n (Y_n \times \{n\}) \cup \{(*, \infty)\}$ com $* \notin \bigcup_n X_n$. O conjunto

$$\mathcal{B} = \{Y_n \times \{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\bigcup_{k=n}^{\infty} (Y_k \times \{k\}) \cup \{(*, \infty)\} : n \in \mathbb{N}\}$$

é uma base numerável para uma topologia em Y.

Para cada $x \in X_n$, $(*, n)$ é o limite da sucessão constante $((x, n))_k$, e $((*, n))_n$ converge para $(*, \infty)$. Pode-se então concluir que para $X := \bigcup_n X_n \times \{n\}$, $(*, \infty) \in \sigma_Y^2(X)$. A demonstração é finalizada como a demonstração do Teorema 4.1.6. ■

Proposição 4.1.9 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o espaço T_0 que tem uma base numerável é de Fréchet-Urysohn;*

(ii) *o fecho sequencial é idempotente para todos os espaços T_0 com uma base numerável;*

(iii) *todo o espaço métrico que tem uma base numerável é de Fréchet-Urysohn;*

(iv) *o fecho sequencial é idempotente para todos os espaços métricos com uma base numerável;*

(v) *todo o subespaço de $\mathbb{R}$ é de Fréchet-Urysohn;*

(vi) *o fecho sequencial é idempotente para todos os subespaços de $\mathbb{R}$.*

Demonstração: É óbvio que (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(vi) e que (i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi).

$\mathbf{CC}(\mathbb{R})\Rightarrow$(i) Na demonstração de que *se um espaço X verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade, então é de Fréchet-Urysohn* apenas é feita uma escolha numerável numa família de subconjuntos de X ([10, 1.6.14]). Se X é um espaço T_0 com uma base numerável, então pelo Lema 1.2.9 $|X| \leq |\mathbb{R}|$, e portanto $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é suficiente para demonstrar (i).

(vi)$\Rightarrow\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ Se (vi) se verifica, então $\sigma_{\mathbb{R}}$ é idempotente, o que pelo Teorema 2.1.1 é equivalente a $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$. ∎

Como $\mathbb{R}$ *é sequencial* não é equivalente a $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ (Corolário 2.2.12), para obter para espaços sequenciais os resultados correspondentes aos resultados da Proposição 4.1.9 temos que provar primeiro o seguinte teorema.

Teorema 4.1.10 *Todo o subespaço de $\mathbb{R}$ é sequencial se e só se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é válido.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja (X_n) uma família numerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Pode-se considerar $X_n \subseteq (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ e define-se $X := \bigcup_n X_n \cup \{0\}$. O conjunto $X \setminus \{0\}$ não é fechado em X, logo também não é sequencialmente fechado em X, pois $X \subseteq \mathbb{R}$ é um espaço sequencial por hipótese. Temos então que 0 tem que ser o limite de uma sucessão $(x_k)_k$ em $X \setminus \{0\}$, o que implica que $(x_k)_k$ tome valores num número infinito de conjuntos X_n, o que por 1.1.10 é suficiente para provar $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$. ∎

Corolário 4.1.11 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o espaço* T_0 *que tem uma base numerável é sequencial;*

(ii) *todo o espaço métrico que tem uma base numerável é sequencial.*

É algo surpreendente que, para todas as classes que considerámos, exista um paralelo entre as condições que são necessárias para que cada uma delas esteja contida na classe dos espaços de Fréchet-Urysohn e na classe dos espaços sequenciais, respectivamente, ao contrário do que acontece com $\mathbb{R}$. Ou talvez o que surpreende é que $\mathbb{R}$ possa ser um espaço sequencial sem ser de Fréchet-Urysohn (Modelo de Feferman/Levy – Corolário 2.2.12).

4.2 Espaços compactos

Na ausência do Axioma da Escolha várias caracterizações e resultados usuais sobre espaços compactos não se mantêm válidos. Esse assunto é aliás um dos mais estudados em *topologia sem escolha* (e.g. [20, 8]).

Por estarem ligadas com as questões de que temos estado a falar, vamos centrar a nossa atenção em resultados que envolvam espaços sequencialmente compactos.

Tanto para espaços (pseudo)métricos como para espaços topológicos com uma base numerável as noções de espaço compacto e de espaço sequencialmente compacto coincidem em ZFC. Como iremos ver de seguida, o Axioma da Escolha Numerável é suficiente para provar essa equivalência. Por outro lado, já sabemos que podem existir subespaços de $\mathbb{R}$ sequencialmente compactos mas não compactos, e que portanto a equivalência não é válida em ZF. Ambas as noções coincidem para subespaços de $\mathbb{R}$ se e só se $\mathbb{R}$ é um espaço sequencial (2.2.5 e 2.2.6). Nesta Secção vamos investigar em que condições é que estas duas noções de compacidade coincidem nas referidas classes. Para espaços pseudométricos, H. L. Bentley e H. Herrlich [2] provaram que o Axioma da Escolha Numerável não só é suficiente como também necessário para demonstrar essa equivalência.

No entanto a demonstração que fizeram não pode generalizada para espaços métricos.

Seguindo o que fizemos para os números reais, vamos ainda analisar o efeito de substituir compacto por sequencialmente compacto em alguns resultados familiares.

Lema 4.2.1 *Se o Axioma da Escolha Numerável se verifica, então todo o espaço topológico sequencialmente compacto é numeravelmente compacto.*

Uma demonstração deste resultado pode ser vista em [46, Teorema 7.1.2].

Teorema 4.2.2 *Se o Axioma da Escolha Numerável se verifica, então um espaço com uma base numerável é compacto se e só se é sequencialmente compacto.*

Demonstração: Pelo Lema 4.2.1, se **CC** é válido, então todo o espaço sequencialmente compacto é numeravelmente compacto e todo o espaço numeravelmente compacto com uma base numerável é compacto.

Para a outra implicação basta usar a Proposição 1.2.8, que diz que todo o espaço compacto que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é sequencialmente compacto. ■

A demonstração de que todo o espaço (pseudo)métrico sequencialmente compacto é compacto nem sempre é escrita de forma explícita. Por esse motivo, na maioria dos livros de Topologia é difícil perceber que o Axioma da Escolha Numerável é suficiente para provar esse facto. Por isso é aqui incluída uma demonstração desse facto.

Teorema 4.2.3 *Se o Axioma da Escolha Numerável se verifica, então um espaço pseudométrico é compacto se e só se é sequencialmente compacto.*

Demonstração: Uma das implicações é consequência imediata da Proposição 1.2.8. Resta-nos portanto provar que todo o espaço pseudométrico sequencialmente compacto é compacto.

Seja (X, d) um espaço pseudométrico não compacto.

Suponhamos primeiro que existe $\delta > 0$ tal que a cobertura aberta das bolas abertas de raio δ $(B(x, \delta))_{x\in X}$ não tem nenhuma subcobertura finita. Temos então que cada um dos conjuntos

$$A_n := \{(x_1, .., x_n) \in X^n : i \neq j \Rightarrow d(x_i, x_j) \geq \delta\}$$

não é vazio. Usando o Axioma da Escolha Numerável, escolhe-se de cada A_n um elemento $a_n = (x_1^n, .., x_n^n)$. Define-se agora uma sucessão $(y_n)_n$ com $y_1 = x_1^1$ e $y_n = x_n^{i(n)}$ para $i(n) := \min\{j : d(x_j^n, y_k) \geq \frac{\delta}{2}$ para $k < n\}$. Esta sucessão não tem subsucessão convergente e portanto X não é sequencialmente compacto.

Suponhamos depois que, para todo o δ, a cobertura aberta $(B(x, \delta))_{x\in X}$ tem uma subcobertura finita. Como X não é compacto, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ sem subcobertura finita, o que implica que os conjuntos

$$Y_n := \{y : (\forall U \in \mathcal{U})\ B(y, 1/n) \not\subseteq U\}$$

sejam diferentes do vazio devido à nossa suposição. Por **CC** existe $(y_n)_n$ tal que cada y_n é elemento de Y_n. A sucessão (y_n) não tem nenhum ponto de acumulação e consequentemente nenhuma subsucessão convergente, logo X não é sequencialmente compacto. ∎

Proposição 4.2.4 *Todo o espaço topológico sequencialmente compacto é numeravelmente compacto se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica.*

Demonstração: Uma das implicações é o Lema 4.2.1.

Para provar a outra implicação, consideramos uma família numerável (X_n) de conjuntos não vazios e $X = \bigcup X_n \times \{n\}$. Em X considera-se a topologia que tem por base

$$\mathcal{B} := \{X_n \times \{n\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Com esta topologia X não é numeravelmente compacto, e portanto não é sequencialmente compacto. Isto significa que existe em X uma sucessão sem subsucessão convergente. Tal sucessão tem que tomar valores num número infinito dos conjuntos X_n, logo **CC** verifica-se pela Proposição 1.1.10. ∎

O espaço topológico X construído nesta demonstração tem uma base numerável e é pseudometrizável por $d((x,n),(y,m)) = |n-m|$. Estes factos juntamente com os Teoremas 4.2.2 e 4.2.3 e a Proposição 1.2.8 tornam imediato o próximo corolário.

Corolário 4.2.5 ([2]) *As condições seguintes são equivalentes a* **CC***:*

(i) *um espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é sequencialmente compacto se e só se é numeravelmente compacto;*

(ii) *um espaço com uma base numerável é sequencialmente compacto se e só se é (numeravelmente) compacto;*

(iii) *um espaço pseudométrico é sequencialmente compacto se e só se é (numeravelmente) compacto;*

(iv) *todo o espaço pseudométrico sequencialmente compacto é limitado.*

Para a classe dos espaços métricos não existem equivalências correspondentes às que acabámos de ver para espaços pseudométricos. É aliás normal que certos resultados para espaços métricos sejam menos evidentes do que para espaços pseudométricos, como ficou claro na Secção 3.1. No entanto podem-se provar alguns resultados parciais.

Teorema 4.2.6 *Se todo o espaço métrico sequencialmente compacto é limitado, então todo o conjunto infinito é Dedekind-infinito.*

Demonstração: Suponhamos que existe um conjunto infinito Dedekind-finito. Pelo teorema 1.1.17, sabemos que existe uma família $(X_n)_n$ de conjuntos não vazios Dedekind-finitos que não admite função de escolha. Logo, o conjunto $X := \bigcup X_n \times \{n\}$ também é Dedekind-finito, e portanto X é sequencialmente compacto para qualquer topologia definida em X.

Falta agora munir X de uma métrica ilimitada para completar a demonstração. Tal métrica pode ser a métrica d definida por

$$d((x,n),(y,m)) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x,n) = (y,m) \\ 1 & \text{se } x \neq y \text{ e } n = m \\ |n-m| & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

∎

Corolário 4.2.7 *Cada uma das seguintes condições implica que todo o conjunto infinito é Dedekind-infinito:*

(i) *todo o espaço métrico sequencialmente compacto é (numeravelmente) compacto;*

(ii) *todo o espaço métrico sequencialmente compacto é de Lindelöf;*

(iii) *todo o subespaço sequencialmente compacto de um espaço métrico é fechado.*

Demonstração: A implicação (i) é imediata porque todo o espaço numeravelmente compacto é limitado.

Para (ii), basta verificar que qualquer conjunto infinito Dedekind-finito munido da métrica discreta é sequencialmente compacto, mas não é de Lindelöf. Em particular, (X,d) da demonstração do Teorema precedente está nessas condições.

Para provar a última implicação, consideramos o conjunto X da demonstração do Teorema 4.2.6 como subespaço de um espaço topológico Y definido como na demonstração do Teorema 4.1.1. Como já foi referido, X é sequencialmente compacto mas não é fechado em Y. ∎

Proposição 4.2.8 *Todo o espaço sequencialmente compacto que tem uma base numerável é de Lindelöf se e só se o Axioma da Escolha Numerável é válido para famílias de subconjuntos de* $\mathbb{R}$.

Demonstração: Se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ se verifica , então pelo Corolário 2.1.6 todo o espaço com uma base numerável é de Lindelöf.

Suponhamos que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não se verifica. Ou seja existe uma família numerável $(X_n)_n$ de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ que não admite função de escolha. Tendo em conta a Proposição 1.1.10, podemos considerar $(X_n)_n$ tal que nenhuma sucessão toma valores em X_n para um número infinito de valores de n.

Constrói-se um espaço topológico X como na demonstração da Proposição 4.2.4. Este espaço tem uma base numerável. Como nenhuma sucessão em X toma valores em mais do que um número finito dos conjuntos $X_n \times \{n\}$, X é sequencialmente compacto. Por outro lado, é fácil verificar que X é de Lindelöf se e só se $\mathbb{N}$ é de Lindelöf. O Teorema 2.1.5 afirma que, se $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ não é verificado, então $\mathbb{N}$ não é de Lindelöf, e portanto X também não é de Lindelöf. ■

O espaço X que é utilizado nesta demonstração é pseudometrizável. Esse facto e o Corolário 4.2.7 permitem-nos chegar ao próximo Corolário.

Corolário 4.2.9 *Se todo o espaço pseudométrico sequencialmente compacto é de Lindelöf, então* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ *verifica-se e todo o conjunto infinito é Dedekind-infinito.*

Como já foi mencionado, para espaços topológicos que têm uma base numerável as noções de compacto e de numeravelmente compacto são coincidentes em ZF.

Para provar esta equivalência para espaços métricos, é suficiente o Axioma da Escolha Numerável (1.2.8 e 4.2.3). Vamos agora ver que ela não é um teorema de ZF.

Proposição 4.2.10 ([33]) *Se todo o espaço métrico numeravelmente compacto é compacto, então todo o conjunto infinito é a união infinita numerável de conjuntos disjuntos não vazios.*

Demonstração: Se X é um conjunto infinito, então X com a topologia discreta não é compacto. Por hipótese X tem uma cobertura numerável sem subcobertura finita. A partir desta cobertura facilmente se constrói uma partição infinita numerável de X. ■

No Modelo de Truss III ($\mathcal{M}37$ em [28]) existe um conjunto infinito que não é a união disjunta de dois conjuntos infinitos (e.g. [31, p.95], [28, Forma 64]), logo não é a união infinita numerável de conjuntos disjuntos não vazios. Ou seja, neste modelo não é válida a equivalência entre compacidade e compacidade numerável para espaços métricos.

Refira-se ainda que todo o conjunto Dedekind-infinito é a união infinita numerável de conjuntos disjuntos não vazios. Este facto é trivial, pois o conjunto dos números naturais tem a referida propriedade.

4.3 Espaços definidos por ultrafiltros

Na Secção 4.1 estudámos espaços que podem ser definidos através de sucessões. Os resultados correspondentes para espaços topológicos em geral são enunciados utilizando filtros (ou redes). Nomeadamente o fecho de um conjunto pode ser caracterizado através dos limites de filtros (e.g., [10, 1.6.9]). Esse resultado é válido em ZF sem haver necessidade de alterar a prova habitual, no entanto só é possível utilizar ultrafiltros em vez de filtros na presença do Teorema do Ultrafiltro (**UFT**), o que como iremos ver não pode ser evitado.

Sendo assim, o nosso primeiro objectivo vai ser mostrar que o seguinte Teorema de ZFC é equivalente a **UFT**.

Teorema 4.3.1 (ZFC) *O ponto $x \in X$ pertence ao fecho de A em X se e só se existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em X tal que $\mathcal{U}$ converge para x e $A \in \mathcal{U}$.*

De forma a facilitar a escrita e tal como fizemos no caso das sucessões, vamos considerar o operador de fecho u definido através de limites de ultrafiltros e $\hat{u}$ que é o menor operador de fecho idempotente maior ou igual a u.

Definições 4.3.2 Seja A um subespaço do espaço topológico X.

(a) $u_X(A) := \{x \in X : (\exists \mathcal{U}$ ultrafiltro em $X)[\mathcal{U}$ converge para x e $A \in \mathcal{U}]\}$.

(b) $\hat{u}_X(A) := \bigcap\{B : A \subseteq B$ e $u_X(B) = B\}$.

Podemos agora reescrever o Teorema 4.3.1 dizendo simplesmente que a igualdade $u_X = k_X$ é válida para qualquer espaço topológico X. Verifica-se facilmente que uma das desigualdades é sempre válida, ou melhor, que, para todo o $A \subseteq X$, $u_X(A) \subseteq \hat{u}_X(A) \subseteq k_X(A)$.

Fazendo um paralelo com o estudo da Secção 4.1, e usando desta vez o operador de fecho u, pode-se analisar quando é que se verificam as igualdades $u = k$[1] e $\hat{u} = k$[2] em cada uma das seguinte classes:

(a) espaços topológicos,

(b) espaços de Hausdorff,

(c) espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade,

(d) espaços (pseudo)métricos,

(e) espaços com uma base numerável,

(f) espaços T_0 com uma base numerável,

(g) espaços métricos com uma base numerável,

(h) subespaços de $\mathbb{R}$,

(i) $\{\mathbb{R}\}$.

Ao contrário do que foi feito com o fecho sequencial, a idempotência de u ($u = \hat{u}$) não pode – e não deve – ser estudada em conjunto com as outras duas propriedades. O seu estudo vai ser feito no final da secção.

[1] X é de Fréchet-Urysohn se e só se $k_X = \sigma_X$.
[2] X é sequencial se e só se $k_X = \hat{\sigma}_X$.

Teorema 4.3.3 *Os operadores de fecho $\hat{u}$ e k coincidem na classe dos espaços topológicos de Hausdorff se e só se o Teorema do Ultrafiltro (***UFT***) se verifica.*

Demonstração: Se **UFT** é válido, então a demonstração usual pode ser utilizada.

Provemos agora a implicação contrária. Sejam $\mathcal{F}$ um filtro livre num conjunto X e a um ponto fixo nesse conjunto. Considere-se em X a topologia definida pela base $\mathcal{B} := \{\{x\} : x \in X \setminus \{a\}\} \cup \{F \cup \{a\} : F \in \mathcal{F}\}$. Facilmente se verifica que a topologia definida desta maneira é de Hausdorff.

Como $\mathcal{F}$ é livre, existe um elemento B em $\mathcal{F}$ que não contém a. É imediato que $k_X(B) = B \cup \{a\}$ e portanto por hipótese $\hat{u}_X(B) = B \cup \{a\}$, ou seja existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ que converge para a e contém B. Falta agora apenas mostrar que $\mathcal{F}$ está contido em $\mathcal{U}$.

Para todo o conjunto F em $\mathcal{F}$, $F \cup \{a\} \in \mathcal{U}$ porque $\mathcal{U}$ converge para a, logo, como $B \in \mathcal{U}$, $B \cap (F \cup \{a\}) = B \cap F \in \mathcal{U}$, o que implica que F seja também um elemento de $\mathcal{U}$. ■

Corolário 4.3.4 *As condições seguintes são equivalentes a* **UFT***:*

(i) $u = k$ *na classe dos espaços topológicos;*

(ii) $\hat{u} = k$ *na classe dos espaços topológicos;*

(iii) $u = k$ *na classe dos espaços de Hausdorff.*

A condição (i) deste corolário é a Proposição 4.3.1.

Proposição 4.3.5 *As condições seguintes são equivalentes a* **CUF***:*

(i) $u = k$ *na classe dos espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade;*

(ii) $\hat{u} = k$ *na classe dos espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade;*

(iii) $u = k$ *na classe dos espaços métricos;*

(iv) $\hat{u} = k$ *na classe dos espaços métricos.*

Demonstração: As implicações (i)⇒(ii)⇒(iv) e (i)⇒(iii)⇒(iv) são evidentes. É portanto suficiente demonstrar que **CUF**⇒(i) e que (iv)⇒**CUF**.

CUF⇒(i) Sejam X um espaço topológico que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade, A um seu subconjunto e $x \in k_X(A)$. Se $(V_n)_n$ é um sistema fundamental de vizinhanças numerável de x, então $\{V_n \cap A : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de um filtro em X. Esse filtro converge para x porque x é um ponto de acumulação de A.

Finalmente, por hipótese, todo o filtro que tem uma base numerável pode ser estendido a um ultrafiltro, e por isso existe um ultrafiltro em A que converge para x.

(iv)⇒**CUF** Seja $(A_n)_n$ uma base para um filtro livre num conjunto X. Sem perda de generalidade, consideremos que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo o n e que $A_1 \neq X$. Seja agora $a \in X \setminus A_1$ e redefina-se $A_1 := X \setminus \{a\}$. A família $(A_n)_n$ é ainda uma base para o mesmo filtro.

Definem-se ainda os conjuntos $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como o filtro é livre, todos os elementos de $X \setminus \{a\}$ pertencem a algum dos conjuntos B_n. Sendo assim podemos definir uma métrica em X da seguinte maneira:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = a \text{ e } y \in B_n \\ \frac{1}{n} & \text{se } x \in B_n \text{ e } y = a \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{se } x \in B_n \text{ e } y \in B_m. \end{cases}$$

O ponto a é ponto de acumulação de A_1 e portanto A_1 não é fechado. Temos então que por hipótese existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em X tal que $A_1 \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ converge para um elemento que não está em A_1, ou seja converge para a. Todos os conjuntos $A_n \cup \{a\}$ são vizinhanças de a e portanto elementos de $\mathcal{U}$. Consequentemente, para todo o n, $A_n = (A_n \cup \{a\}) \cap A_1$ está em $\mathcal{U}$, o que significa que $\mathcal{U}$ é uma extensão do filtro gerado por (A_n). ∎

Proposição 4.3.6 *As condições seguintes são equivalentes a* **CUF***:*

(i) $u = k$ *na classe dos espaços que têm uma base numerável;*

(ii) $\hat{u} = k$ *na classe dos espaços que têm uma base numerável.*

Demonstração: Tendo em conta a Proposição 4.3.5, é suficiente mostrar que (i)$\Rightarrow$**CUF** .

Consideram-se $(A_n)_n$, $(B_n)_n$, a e X como na demonstração da Proposição 4.3.5, e é dada uma base numerável para uma topologia em X,

$$\mathcal{B} := \{A_n \cup \{a\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

A partir daqui a demonstração prossegue como a demonstração de 4.3.5. ■

Teorema 4.3.7 *Os operadores de fecho* u *e* k *coincidem em* $\mathbb{R}$ *se e só se* **CUF($\mathbb{R}$)** *é válido.*

Demonstração: Como vimos na Proposição 4.3.5, se **CUF** se verifica, então para todo o espaço X que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade tem-se que $u_X = k_X$. Na demonstração dessa Proposição vê-se que apenas é necessário aplicar **CUF** em X, ou seja **CUF($\mathbb{R}$)** é suficiente para demonstrar que $u_{\mathbb{R}} = k_{\mathbb{R}}$.

Seja agora $\mathcal{F}$ um filtro livre em $\mathbb{R}$ com uma base numerável. Sem perda de generalidade consideremos a base $(A_n)_n$ de $\mathcal{F}$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo o n e defina-se $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$. Podem-se construir funções bijectivas $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Definam-se $C_n := f_n(B_n) \subseteq (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ e $D := \bigcup_n C_n$. Como $\mathcal{F}$ é livre, $0 \in k_{\mathbb{R}}(D)$, e consequentemente $0 \in u_{\mathbb{R}}(D)$ por hipótese, o que significa que existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ convergente para 0 tal que $D \in \mathcal{U}$.

Consideramos agora a restrição $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ a D, que é um ultrafiltro em D e a função $t : D \longrightarrow A_1$ definida por $t(x) = f_n^{-1}(y)$ se $x \in C_n$. Pela maneira como as funções f_n e os conjuntos C_n e D foram definidos, t é uma função bijectiva e portanto $t(\mathcal{U}')$ é um ultrafiltro em A_1.

Como $\mathcal{U}$ converge para 0, $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{U}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k = D \cap (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{U}'$. Temos assim que

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} f_n^{-1}(C_k) = \bigcup_{k=n}^{\infty} t(C_k) = t(\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) \in t(\mathcal{U}')$$

e portanto o ultrafiltro em $\mathbb{R}$ gerado por $t(\mathcal{U}')$ contém $\mathcal{F}$. ∎

Corolário 4.3.8 *As condições seguintes são equivalentes a* **CUF($\mathbb{R}$)***:*

(i) *$u = k$ na classe dos espaços T_0 que têm uma base numerável;*

(ii) *$\hat{u} = k$ na classe dos espaços T_0 que têm uma base numerável;*

(iii) *$u = k$ na classe dos espaços métricos que têm uma base numerável;*

(iv) *$\hat{u} = k$ na classe dos espaços métricos que têm uma base numerável;*

(v) *$u = k$ na classe dos subespaços de $\mathbb{R}$;*

(vi) *$\hat{u} = k$ na classe dos subespaços de $\mathbb{R}$.*

Demonstração: É óbvio que (i)⇒(ii)⇒(iv)⇒(vi) e que (i)⇒(iii)⇒(v)⇒(vi).

CUF($\mathbb{R}$)⇒(i) Pelo Lema 1.2.9, se X é um espaço T_0 com uma base numerável, então $|X| \leq |\mathbb{R}|$. Sendo assim, **CUF($\mathbb{R}$)** é suficiente para mostrar que $u_X = k_X$.

(vi)⇒**CUF($\mathbb{R}$)** A demonstração é feita de modo análogo à do teorema precedente. Para tal consideramos o subespaço real $X := D \cup \{0\}$ e o seu subconjunto D. Como $0 \in k_X(D)$, logo $0 \in \hat{u}_X(D)$ por (vi). Mas pelo facto de 0 ser o único elemento de X que não está em D, 0 está em $u_X(D)$ e consequentemente $0 \in u_{\mathbb{R}}(D)$. A partir deste ponto a demonstração prossegue como a demonstração da Proposição 4.3.7. ∎

Lema 4.3.9 *Para todo o espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ tal que X não tem ultrafiltros livres e para todo $A \subseteq X$ tem-se que:*

$$u_X(A) = \bigcup_{a \in A} k_X(\{a\}).$$

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço T_1, então $u_X(A) = A$.

Demonstração: Vamos denotar por $\dot{a}$ o ultrafiltro fixo em a. O ultrafiltro $\dot{a}$ converge para $x \in X$ se e só se $V \in \dot{a}$ para toda a vizinhança V de x, isto é $a \in V$. Dito de outra maneira, $\dot{a}$ converge para x se e só se $x \in k_X(\{a\})$.

Como em X só existem ultrafiltros fixos, se $x \in u_X(A)$, então existe $a \in A$ tal que $\dot{a}$ converge para x, o que implica que $x \in k_X(\{a\})$.

Por outro lado, se $x \in k_X(\{a\})$, então $\dot{a}$ converge para x, e portanto $x \in u_X(A)$.

Para a segunda parte do lema, basta ver que, se $(X, \mathcal{T})$ for T_1, então, para todo o x em X, $k_X(\{x\}) = \{x\}$ e consequentemente u é discreto em X. ∎

Devemos referir neste ponto que há de facto modelos de ZF onde existem conjuntos sem ultrafiltros livres ou, mais ainda, não existem ultrafiltros livres. A. Blass [3] construiu um modelo ($\mathcal{M}15$ em [28]) onde todos os ultrafiltros são fixos. Para mais detalhes consultar também as Formas 63 e 206 de [28].

Proposição 4.3.10 *Se $\mathbb{R}$ não tem ultrafiltros livres, então $\hat{u}_{\mathbb{R}} \neq k_{\mathbb{R}}$.*

Esta Proposição é imediata a partir do Lema 4.3.9, uma vez que $\mathbb{R}$ é um espaço T_1, e portanto $u_{\mathbb{R}}$ é discreto quando $\mathbb{R}$ não tem ultrafiltros livres.

Podemos concluir que a igualdade $\hat{u}_{\mathbb{R}} = k_{\mathbb{R}}$ não é demonstrável em ZF.

Existem modelos de ZF onde $\mathbb{R}$ não tem ultrafiltros livres, mas existem ultrafiltros livres noutros conjuntos. O Modelo de Feferman é um exemplo disso, como já foi referido atrás (1.1.26).

É curioso reparar que, tal como para as sucessões, o caso da classe que tem como único elemento $\mathbb{R}$ representa uma excepção a um certo paralelismo que foi possível encontrar para as outras classes estudadas.

Analisemos agora o caso da idempotência do operador de fecho u, ou seja a igualdade $u = \hat{u}$. Ao contrário do que acontece para as igualdades $u = k$ e $\hat{u} = k$, não temos uma resposta definitiva, não sendo até conhecido se a idempotência de u pode ser demonstrada em ZF.

Chegados a este ponto, podemos ser levados a pensar que u e $\hat{u}$ coincidem na classe dos espaços topológicos se e só se o Teorema do Ultrafiltro é válido. O que vamos ver de seguida é que tal não se verifica, usando para tal o Lema 4.3.9.

Proposição 4.3.11 *Se em X todos os ultrafiltros são fixos, então u_X é idempotente.*

Demonstração: Imediato do Lema 4.3.9 e das propriedades do fecho de Kuratowski. ■

Corolário 4.3.12 *As seguintes afirmações são consistentes com* ZF.

(a) *$\hat{u} = u$ na classe dos espaços topológicos e* **UFT** *não é válido.*

(b) *$\hat{u} = u$ na classe dos espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade e* **CUF** *não é válido.*

(c) *$\hat{u}_{\mathbb{R}} = u_{\mathbb{R}}$ e* **CUF($\mathbb{R}$)** *não é válido.*

Estas três condições verificam-se no Modelo de Feferman/Blass ($\mathcal{M}$15 em [28]) onde todos os ultrafiltros são fixos, e portanto **UFT**, **CUF** e **CUF($\mathbb{R}$)** não são válidos.

Conclusões semelhantes podem ser tiradas para as outras classes que estudámos.

4.4 Espaços de Hausdorff

Os espaços de Hausdorff formam uma classe de espaços topológicos que pode ser caracterizada através de limites. Mais uma vez a pergunta é se isso será verdade na ausência do Axioma da Escolha.

A motivação inicial para o estudo presente nesta secção foi descobrir se – e quando – existem espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade e onde todas as sucessões têm no máximo um limite mas que não são de Hausdorff. Também aqui iremos analisar o que se passa com os limites de ultrafiltros.

Teorema 4.4.1 *O Axioma da Escolha Numerável é equivalente a:*

(i) *um espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é de Hausdorff se e só se todas as suas sucessões têm no máximo um limite.*

Demonstração: **CC**$\Rightarrow$(i) A condição (i) é a Proposição 1.6.17 de [10] e a demonstração que lá é apresentada não utiliza nenhuma condição mais forte do que o Axioma da Escolha Numerável.

(i)$\Rightarrow$**CC** Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de conjuntos disjuntos não vazios. Analogamente ao que fizemos anteriormente, definem-se os conjuntos $Y_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} X_k$ e ainda $Y := \bigcup_n X_n \cup \{a, b\}$, com $a \neq b$ dois pontos que não pertencem a $\bigcup_n X_n$. O seguinte sistema fundamental de vizinhanças

$$\mathcal{B}(x) := \begin{cases} \{\{x\}\} & \text{se } x \notin \{a, b\} \\ \{Y_n \cup \{x\} : n \in \mathbb{N}\} & \text{se } x \in \{a, b\} \end{cases}$$

define uma topologia em Y que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade.

Como a topologia não é de Hausdorff existe, por hipótese, pelo menos uma sucessão em Y que converge para dois pontos distintos. Pela maneira como a topologia foi definida, a única hipótese é existir uma sucessão a convergir simultaneamente para a e para b. A sucessão que convergir para estes dois pontos tem que intersectar um número infinito dos conjuntos disjuntos X_n, o que tendo em atenção a Proposição 1.1.10 completa a demonstração. ∎

Teorema 4.4.2 *O Axioma da Escolha Numerável para famílias de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *(*$\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*) é equivalente a:*

(i) *um espaço com base numerável é de Hausdorff se e só se todas as suas sucessões têm no máximo um limite.*

Demonstração: $\mathbf{CC}(\mathbb{R})\Rightarrow$(i) É um teorema de ZF que num espaço de Hausdorff todas as sucessões têm no máximo um limite (cf. [10, 1.6.7]). (Também é válido para redes e filtros.)

Seja agora X um espaço topológico que tem uma base numerável e onde nenhuma sucessão tem dois limites distintos. Como em X nenhuma sucessão tem mais do que um limite, X é um espaço T_1 (ver [10, 1.6.16]). Ou seja, X é um espaço T_1 com uma base numerável, e portanto o Lema 1.2.9 afirma que $|X| \leq |\mathbb{R}|$. A demonstração usual de (i) ([10, 1.6.17]) apenas usa uma escolha numerável numa família de subconjuntos de X, ou seja $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ é suficiente para provar (i).

(i)$\Rightarrow$$\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ Seja $(X_n)_n$ uma família de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Consideremos que cada X_n é um subconjunto de $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Definem-se os conjuntos Y e $(Y_n)_n$ como na demonstração do Teorema 4.4.1.

Tomemos em Y a topologia em que $Y \setminus \{a, b\}$ é aberto e tem a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$, e os elementos a e b têm as mesmas vizinhanças que anteriormente. Com esta topologia Y tem uma base numerável mas não é de Hausdorff.

A partir deste ponto, a demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.4.1. ∎

Como é do conhecimento geral a condição (i) do Teorema 4.4.1 pode ser generalizada para a classe dos espaços topológicos, substituindo sucessões por filtros, resultado esse que é válido em ZF.

Tal como na secção anterior, vamos ver qual é a situação quando em vez de filtros trabalhamos com ultrafiltros.

Teorema 4.4.3 *O Teorema do Ultrafiltro (*$\mathbf{UFT}$*) é equivalente a:*

(i) *um espaço topológico é de Hausdorff se e só se todos os seus ultrafiltros têm no máximo um limite.*

Demonstração: $\mathbf{UFT}$$\Rightarrow$(i) Em [10, 1.6.7], (i) é demonstrado para filtros e, se $\mathbf{UFT}$ é válido, então a mesma demonstração funciona no caso dos ultrafiltros.

(i)$\Rightarrow$$\mathbf{UFT}$ Sejam $\mathcal{F}$ um filtro livre em X e $a \neq b$ dois elementos de X. Vamos definir uma topologia em X através de um sistema fundamental de vizinhanças:

$$\mathcal{B}(x) := \begin{cases} \{\{x\}\} & \text{se } x \notin \{a, b\} \\ \{F \cup \{x\} : F \in \mathcal{F}\} & \text{se } x \in \{a, b\}. \end{cases}$$

Com esta topologia, X não é de Hausdorff, logo (i) diz que existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em X que converge para dois pontos diferentes. Esses pontos só podem ser a e b, logo, para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \cup \{a\}$ e $F \cup \{b\}$ são elementos de $\mathcal{U}$, donde facilmente se conclui que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. ∎

Corolário 4.4.4 *A condição seguinte é equivalente a* **CUF***:*

(i) *um espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade é de Hausdorff se e só se todos os seus ultrafiltros têm no máximo um limite.*

Demonstração: **CUF**$\Rightarrow$(i) Se x e y são dois pontos que não se podem separar num espaço que não é de Hausdorff e que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade, então facilmente se constrói uma base numerável de um filtro que converge para x e y. Na presença de **CUF** esse filtro pode ser estendido a um ultrafiltro que também converge para os mesmos dois pontos.

(i)$\Rightarrow$**CUF** Sejam $(Y_n)_n$ uma base para um filtro livre em Y e $a \neq b$ dois elementos de Y. Consideremos $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ para todo o n, e o conjunto Y munido de uma topologia como a definida na demonstração do Teorema 4.4.1.

De maneira idêntica ao que foi feito na demonstração do teorema precedente conclui-se que o filtro gerado por (Y_n) está contido num ultrafiltro. ∎

Corolário 4.4.5 *A condição seguinte é equivalente a* **CUF($\mathbb{R}$)***:*

(i) *um espaço com base numerável é de Hausdorff se e só se todos os seus ultrafiltros têm no máximo um limite.*

Demonstração: **CUF($\mathbb{R}$)**$\Rightarrow$(i) De modo análogo ao que foi feito na primeira parte da demonstração do Teorema 4.4.2, mostra-se que, se X é um espaço topológico com base numerável onde nenhum ultrafiltro tem dois limites distintos, então $|X| \leq |\mathbb{R}|$.

Não é difícil verificar que na demonstação usual de (i) apenas é utilizado o Teorema do Ultrafiltro para filtros em X e, tendo em conta o corolário anterior, **CUF($\mathbb{R}$)** é suficiente para demonstrar (i).

(i)$\Rightarrow$**CUF($\mathbb{R}$)** Tal como vimos na demonstração do Teorema 4.3.7, basta-nos considerar um filtro livre $\mathcal{F}$ com uma base numerável $(A_n)_n$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq (0, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $\mathcal{F}$ converge para 0.

Definem-se o conjunto $X := A_1 \cup \{a, b\}$, com $a \neq b$ dois elementos que não estão em A_1, e uma topologia em X tal que A_1 é aberto e tem a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$, e os pontos a e b têm um sistema fundamental de vizinhanças definido da mesma maneira que na demonstração do Teorema 4.4.3.

Com esta topologia, X não é de Hausdorff mas tem uma base numerável induzida pela base numerável de $\mathbb{R}$, logo por hipótese existe um ultrafiltro que converge para mais do que um ponto em X. Procedendo como anteriormente, conclui-se que esse ultrafiltro contém $\mathcal{F}$. $\blacksquare$

Capítulo 5

Espaços métricos completos

Os resultados apresentados neste capítulo, nomeadamente nas duas primeiras secções, são motivados pelo Corolário 4.1.2. Esse corolário afirma que *todo o espaço métrico completo é sequencial se e só se o Axioma da Escolha Numerável é válido.* Ou seja, na ausência do Axioma da Escolha Numerável existe um subespaço sequencialmente fechado e não fechado de um espaço métrico completo. Esse espaço, por exemplo X na demonstração do Teorema 4.1.1, tem dois completamentos não isométricos, pois a definição usual de completamento diz que Y é um completamento de X se for completo e X for isométrico a um subespaço denso de Y.

O que nos propomos fazer é estudar a existência e unicidade de completamentos de espaços métricos em ZF. Iremos estudar em que condições é que o completamento usual é único, e criar uma definição alternativa que recupere a noção intuitiva de que o completamento deve ser minimal. Esse completamento, além de minimal, deverá ser uma reflexão dos espaços métricos nos espaços métricos completos, o que se verifica em ZFC.

Na terceira secção voltamos a nossa atenção para os produtos de espaços métricos e de espaços métricos completos.

5.1 Completamentos

Além do problema da unicidade do completamento, propomo-nos também debater o problema da sua existência.

Uma das mais habituais provas da existência de completamento de um espaço métrico (X, d) consiste em considerar o conjunto $\mathcal{H}$ de todas as suas sucessões de Cauchy. Considera-se depois em $\mathcal{H}$ a relação de equivalência definida do seguinte modo: $(x_n)_n \sim (y_n)_n$ se $\lim d(x_n, y_n) = 0$. Define-se igualmente uma métrica $\tilde{d}$ em $\mathcal{H}/_\sim$ tal que $\tilde{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \lim d(x_n, y_n)$. É claro que X é isométrico a um subespaço denso em $\mathcal{H}/_\sim$. Para mostrar que o espaço métrico assim formado é completo necessitamos do Axioma da Escolha Numerável. Um exemplo disso é o espaço métrico X definido na demonstração do Teorema 4.1.6, onde se prova que o Axioma da Escolha Numerável é equivalente à idempotência de σ para espaços métricos (completos). Esta maneira de construir o completamento torna também imediata a sua unicidade.

Um caso particular da construção que acabámos de descrever é a construção dos números reais através das sucessões de Cauchy no conjunto dos números racionais. Nesse caso não existe nenhum problema de escolha porque $\mathbb{Q}$ é um conjunto numerável (e.g. [39]).

Deve-se chamar a atenção que uma iteração deste processo não produz automaticamente um espaço completo. Com efeito, M. Gitik [14] construiu um modelo onde todos os ordinais limite são o limite de uma sucessão de ordinais inferiores. Portanto, em teoria, construções deste tipo podem ser prolongadas indefinidamente (ver também [28, Forma 182]).

Pelo que vimos até aqui, a unicidade do completamento resulta da igualdade $\hat{\sigma} = k$, enquanto que pelo menos uma das construções conhecidas de completamento resulta da igualdade $\sigma = \hat{\sigma}$. É exactamente por isso que em ZFC o completamento existe e é único, pois os espaços métricos são de Fréchet-Urysohn, isto é $\sigma = k$.

Vamos agora introduzir três definições de completamento, para de seguida estudarmos as condições de existência e unicidade para cada uma delas. Os completamentos deverão ser considerados a menos de uma isometria.

Definições 5.1.1 Sejam X um espaço métrico completo e A um seu subespaço. Diz-se que X é um:

(a) σ-completamento de A se $\sigma_X(A) = X$;

(b) $\hat{\sigma}$-completamento de A se $\hat{\sigma}_X(A) = X$;

(c) k-completamento de A se $k_X(A) = X$.

A definição de k-completamento é precisamente a definição usual.

Um σ-completamento só existe quando a construção que referimos anteriormente produz um espaço completo.

Uma vez que os subespaços sequencialmente fechados de um espaço métrico completo X são precisamente os seus subespaços completos (Proposição 1.2.15), se $\hat{\sigma}_X(A) = X$, não existe nenhum espaço completo entre A e X. Temos assim que um $\hat{\sigma}$-completamento é um completamento minimal.

Proposição 5.1.2 *Todo o espaço métrico tem um $\hat{\sigma}$-completamento.*

Esta demonstração é uma adaptação da demonstração do Teorema 4.3.14 de [10].

Demonstração: Sejam (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas de X para $\mathbb{R}$. Se munirmos $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ com a métrica do supremo, ele é um espaço métrico completo.

Defina-se depois uma função i de X para $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ que a cada $x \in X$ associa a função

$$\begin{array}{rcl} i_x : X & \longrightarrow & \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & d(y, x) - d(y, a), \end{array}$$

com a um elemento fixo de X. As funções i_x são limitadas e i é uma isometria. Identificando X com $i(X)$, podemos afirmar que $\hat{\sigma}_{\mathcal{B}(X,\mathbb{R})}(X)$ é um $\hat{\sigma}$-completamento de X. ∎

Corolário 5.1.3 *Todo o espaço métrico tem um k-completamento.*

Como $\hat{\sigma} \leq k$, todo o $\hat{\sigma}$-completamento é também um k-completamento, ou seja $\hat{\sigma}_{\mathcal{B}(X,\mathbb{R})}(X)$ é um k-completamento de X. Mais geralmente, se Y é um conjunto tal que $\hat{\sigma}_{\mathcal{B}(X,\mathbb{R})}(X) \subseteq Y \subseteq k_{\mathcal{B}(X,\mathbb{R})}(X)$, então Y é um k-completamento de X.

Para provar a unicidade do $\hat{\sigma}$-completamento, vamos necessitar de um resultado auxiliar que vai permitir generalizar a construção que foi feita em ZFC.

Definição 5.1.4 Sejam X um espaço topológico e A um seu subespaço. Para um qualquer ordinal α, define-se:

$$\sigma_X^\alpha(A) := \begin{cases} \sigma_X(A) & \text{se } \alpha = 1 \\ \sigma_X(\sigma_X^\beta(A)) & \text{se } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup\{\sigma_X^\beta(A) : \beta < \alpha\} & \text{se } \alpha \text{ é um ordinal limite.} \end{cases}$$

Proposição 5.1.5 *Sejam X um espaço topológico e A um seu subespaço.*

$$\hat{\sigma}_X(A) = \sigma_X^\alpha(A), \text{ para } \alpha := \min\{\beta : \sigma_X^{\beta+1}(A) = \sigma_X^\beta(A)\}.$$

Demonstração: Primeiro vamos demonstrar que existe um α tal que $\sigma_X^\alpha(A)$ é sequencialmente fechado. Suponhamos que não existia nenhum α nessas condições. Então para dois ordinais $\beta \neq \gamma$, $\sigma_X^\beta(A) \neq \sigma_X^\gamma(A)$, ou seja os conjuntos $\sigma_X^\alpha(A)$ seriam todos diferentes. Nesse caso seria possível associar a cada ordinal α o subconjunto $\sigma_X^\alpha(A)$ de X, definindo uma função injectiva da classe dos números ordinais em $\mathcal{P}(X)$. Mas, como a classe dos ordinais é uma classe própria, essa injecção não pode existir. Concluímos assim que existe um ordinal α tal que $\sigma_X^\alpha(A)$ é sequencialmente fechado, e portanto $\hat{\sigma}_X(A) \subseteq \sigma_X^\alpha(A)$.

Por outro lado, como $\hat{\sigma}_X(A)$ é sequencialmente fechado em X, $\sigma_X^\alpha(\hat{\sigma}_X(A)) = \hat{\sigma}_X(A)$ e consequentemente $\sigma_X^\alpha(A) \subseteq \hat{\sigma}_X(A)$. ∎

O essencial nesta demonstração é que a iteração é feita dentro de um conjunto, e por isso não pode ser prolongada indefinidamente.

Teorema 5.1.6 *O $\hat{\sigma}$-completamento de um espaço métrico é único.*

Demonstração: Sejam A um espaço métrico e $(X, d), (Y, d')$ dois $\hat{\sigma}$-completamentos de A. Pretende-se mostrar que X e Y são isométricos.

Começa-se por definir uma função $f^1 : \sigma_X(A) \longrightarrow \sigma_Y(A)$ com $f^1(x) = x$ se $x \in A$ e, se $x = \lim a_n$, então $f^1(x) = \lim a_n$, considerando os limites da sucessão $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ em X e em Y, respectivamente.

Como Y é completo, a imagem de todos os pontos está definida, e dualmente a completude de X implica a sobrejectividade da função. Tem-se ainda que, se (a_n) e (b_n) são duas sucessões em A convergindo para dois pontos em X, x_1 e x_2, respectivamente, então

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(\lim a_n, \lim b_n) = \lim d(a_n, b_n) = \\ \lim d'(a_n, b_n) &= d'(\lim a_n, \lim b_n) = d'(f^1(x_1), f^1(x_2)). \end{aligned}$$

Esta igualdade mostra não só que f^1 é unívoca, mas também que é uma isometria.

Para um ordinal $\alpha = \beta + 1$ define-se uma isometria $f^\alpha : \sigma_X^\alpha(A) \longrightarrow \sigma_Y^\alpha(A)$ a partir de f^β de modo idêntico ao que foi feito para f^1.

Seja agora α um ordinal limite. Se $x \in \sigma_X^\alpha(A)$, então existe $\gamma < \alpha$ tal que $x \in \sigma_X^\gamma(A)$. Define-se então $f^\alpha : \sigma_X^\alpha(A) \longrightarrow \sigma_Y^\alpha(A)$ com $f^\alpha(x) := f^\gamma(x)$ se $x \in \sigma_X^\gamma(A)$. A função f^α assim definida é uma isometria, pois todas as funções f^γ para $\gamma < \alpha$ também o são.

Da Proposição 5.1.5 vem que $X = \sigma_X^\alpha(A)$ para algum α. Se Y não fosse igual a $\sigma_Y^\alpha(A)$, então f^α seria uma isometria de X para $\sigma_Y^\alpha(A) \neq Y$. Mas X é completo e portanto $\sigma_Y^\alpha(A)$ seria completo, o que implicaria que $Y \neq \hat{\sigma}_Y(A)$. Temos assim $Y = \sigma_Y^\alpha(A)$ e por conseguinte f^α é uma isometria entre (X, d) e (Y, d'). ■

Corolário 5.1.7 *Sejam A um espaço métrico e X o seu $\hat{\sigma}$-completamento.*

Se f é uma função não expansiva[1] *de A para um espaço métrico completo*

[1] $f : (A, d) \longrightarrow (B, d')$ é não expansiva se $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

B, então existe uma única função não expansiva $\hat{f}$ de X para B tal que a sua restrição a A é f.

A demonstração é feita seguindo o mesmo raciocínio que foi aplicado na demonstração do Teorema 5.1.6.

O que este corolário diz é que os espaços métricos completos formam uma subcategoria reflexiva da categoria dos espaços métricos e das funções não expansivas.

Este resultado é também válido quando os morfismos são as funções uniformemente contínuas. Ou mais geralmente, quando são as funções sequencialmente contínuas que preservam as sucessões de Cauchy.

Proposição 5.1.8 *Todo o espaço métrico tem um k-completamento único se e só se o Axioma da Escolha Numerável se verifica.*

Demonstração: Se **CC** se verifica, então pelo Corolário 4.1.2 todo o espaço métrico completo é sequencial. Sendo assim o k-completamento coincide com o $\hat{\sigma}$-completamento.

Se **CC** não se verificar, o espaço X na demonstração do Teorema 4.1.1 tem dois completamentos não isométricos. ■

Proposição 5.1.9 *Todo o espaço métrico tem um σ-completamento se e só se o Axioma da Escolha Numerável é válido. Se o σ-completamento existir, ele é único.*

Demonstração: Como $\sigma \leq \hat{\sigma}$, se o σ-completamento existir, coincide com o $\hat{\sigma}$-completamento, e portanto é único.

Se **CC** se verifica, então $\sigma = \hat{\sigma}$ e portanto o σ-completamento existe.

Se **CC** falhar, para os espaços métricos X e Y definidos na demonstração do Teorema 4.1.6, $\sigma_Y(X) \neq \sigma_Y^2(X) = Y$. Ou seja, como Y é completo, ele é o $\hat{\sigma}$-completamento de X, mas não é o seu σ-completamento. Isto mostra que X não tem σ-completamento, pois se este existisse teria que ser igual ao seu $\hat{\sigma}$-completamento. ■

5.2 Espaços f-completos

Como já foi referido anteriormente, os limites de filtros caracterizam totalmente os espaços topológicos. Também no caso dos espaços métricos completos e dos completamentos de espaços métricos, as dificuldades criadas pela ausência do Axioma da Escolha podem ser torneadas substituindo sucessões por filtros.

Essa é, aliás, a abordagem escolhida para a definição de espaço uniforme completo. Os espaços uniformes não são, em geral, sequenciais, mesmo em ZFC, e por isso a utilização de sucessões não é aconselhável. Como em ZF os espaços métricos podem não ser sequenciais, é natural considerar os espaços métricos *completos para filtros* ou *f-completos*. Este paralelismo permite-nos tirar algumas conclusões para espaços uniformes completos, assunto esse que não vai ser aprofundado.

Definição 5.2.1 Um espaço métrico é *f-completo* se todo o seu *filtro de Cauchy*[2] é convergente.

Proposição 5.2.2 *Um subespaço de um espaço métrico f-completo é f-completo se e só se é fechado.*

Comparando esta Proposição com o Corolário 1.2.15, é claro qual deve ser a definição de completamento para filtros ou f-completamento.

Definição 5.2.3 Sejam X um espaço métrico f-completo e $A \subseteq X$. Diz-se que X é um f-completamento de A se $k_X(A) = X$.

Teorema 5.2.4 *Todo o espaço métrico tem um f-completamento único.*

Demonstração: Seja X um espaço métrico. O espaço $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é um espaço métrico f-completo. Na demonstração do Teorema 5.1.2 vimos que X pode ser considerado como subespaço de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. É então imediato que $k_{\mathcal{B}(X,\mathbb{R})}(X)$ é um f-completamento de X.

[2]O filtro $\mathcal{F}$ é de Cauchy se, para todo o n, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\mathsf{diam}(F) < \frac{1}{n}$.

A unicidade, a menos de isometria, resulta da Proposição 5.2.2 e de que, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são dois filtros de Cauchy em X, então $d(\lim \mathcal{F}, \lim \mathcal{G}) = \lim d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, onde $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é o filtro em $\mathbb{R}$ constituído pelos elementos $\{d(x, y) : x \in F,\ y \in G\}$ para todo o $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{G}$. Ou seja, $d(\lim \mathcal{F}, \lim \mathcal{G})$ é independente do espaço onde X está incluído e portanto o f-completamento é único. ∎

É fácil verificar que, a partir do filtro $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ definido em $\mathbb{R}$ para dois filtros de Cauchy $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ num espaço métrico, é possível definir uma relação de equivalência nos filtros de Cauchy desse espaço métrico, e uma distância entre as suas classes de equivalência. O f-completamento pode ser construído dessa maneira.

Este tipo de construção é utilizado para demonstrar que todo o espaço uniforme tem um completamento, que é único na classe dos espaços uniformes separados (ver [30, p.155]).

Uma outra demonstração da existência de completamento de espaços uniformes é feita a partir do facto de que *todo o espaço uniforme é uniformemente equivalente a um subespaço de um produto de espaços uniformes metrizáveis* (e.g. [10, 8.2.3]). No entanto o Axioma da Escolha Múltipla Dependente é utilizado na demonstração deste facto. Se considerarmos a definição de espaço uniforme que é feita utilizando famílias de pseudométricas num dado conjunto, esta abordagem é a mais correcta. Isto é uma consequência de não ser conhecido se ambas as definições são equivalentes em ZF.

Corolário 5.2.5 *O Axioma da Escolha Numerável é equivalente a:*

(i) *um espaço métrico é completo se e só se é f-completo.*

Demonstração: **CC**$\Rightarrow$(i) Um espaço f-completo é sempre completo.

Seja X um espaço métrico completo e Y o seu f-completamento. Como Y é completo e o Axioma da Escolha Numerável é válido, o Corolário 4.1.2 afirma que X é fechado em Y. Pela Proposição 5.2.2, X é f-completo.

(i)$\Rightarrow$**CC** Se os espaços métricos completos e f-completos coincidem, então o f-completamento é igual ao k-completamento. Isto significa que o

k-completamento é único, e portanto o Axioma da Escolha Numerável é válido (5.1.8). ■

O resultado que acabámos de ver dá-nos a ideia de que os filtros que têm uma base numerável podem ser suficientes para caracterizar os espaços f-completos. Além de provar esse facto, vamos também ver que a propriedade de completude que Cantor provou existir em $\mathbb{R}$ é equivalente à noção de espaço f-completo.

Definição 5.2.6 Um espaço métrico X é *Cantor-completo* se, para toda a família $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos não vazios e fechados em X tal que $F_{n+1} \subseteq F_n$ e $\lim\limits_n \mathsf{diam}(F_n) = 0$, $\bigcap\limits_n F_n \neq \emptyset$.

Teorema 5.2.7 *Para um espaço métrico X as condições seguintes são equivalentes:*

(i) *X é f-completo;*

(ii) *todo o filtro de Cauchy em X com uma base numerável é convergente;*

(iii) *X é Cantor-completo.*

Demonstração: É imediato que (i) implica (ii).

(ii)⇒(iii) Uma família $(F_n)_n$ nas condições da definição de espaço Cantor-completo é uma base de um filtro de Cauchy. Portanto é convergente por hipótese. Esse limite é um elemento de $\bigcap_n F_n$.

(iii)⇒(i) Seja $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy num espaço X Cantor-completo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se $A(n) := \bigcup\{F \in \mathcal{F} : \mathsf{diam}(F) < \frac{1}{n}\}$. Os conjuntos $A(n)$ não são vazios porque $\mathcal{F}$ é de Cauchy.

Para cada n, $F_n := k_X(A(n))$ tem diâmetro menor ou igual a $\frac{2}{n}$ e $F_{n+1} \subseteq F_n$. Por hipótese $\bigcap F_n \neq \emptyset$, ou seja existe $x \in \bigcap F_n$. O filtro $\mathcal{F}$ converge para x e portanto X é f-completo. ■

Tome-se em atenção que, em geral, $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma base para o filtro $\mathcal{F}$.

5.3 Produtos

Os produtos de espaços (pseudo)métricos podem ser formados tendo em conta a sua estrutura topológica, uniforme ou métrica. Nos dois primeiros casos esses produtos podem não ser metrizáveis, enquanto no terceiro eles nem sempre existem.

Vamos investigar questões relacionadas com a existência da métrica produto, assim como a estabilidade dos espaços (pseudo)métricos completos para a formação desse produto.

Dada um família numerável de espaços métricos $((X_n, d_n))_n$, o seu produto topológico é um espaço metrizável. Este resultado é válido em ZF, no entanto o mesmo não é verdade para espaços metrizáveis, onde a demonstração usual precisa de uma escolha numerável (múltipla).

Proposição 5.3.1 ([33]) *Se o Axioma da Escolha Numerável Múltipla (***CMC***) se verifica, então o produto numerável de espaços metrizáveis é metrizável.*

Demonstração: Seja $((X_n, \mathcal{T}_n))_n$ uma família de espaços topológicos metrizáveis. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto A_n de todas as métricas em X_n que induzem $\mathcal{T}_n$. Por **CMC**, existe uma escolha múltipla $(F_n)_n$ em $(A_n)_n$. Ou seja, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq F_n \subseteq A_n$ e F_n é finito. Define-se então em cada X_n uma métrica d_n com

$$d_n(x, y) := \min\{\sum_{d \in F_n} d(x, y), 1\}.$$

A métrica d_n origina a topologia $\mathcal{T}_n$, e d definida por

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$$

é uma métrica no produto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ que induz a topologia produto. ■

Proposição 5.3.2 ([33]) *Se o produto numerável de espaços metrizáveis é metrizável, então* $\mathbf{CMC}(\aleph_0)$ *verifica-se.*

Demonstração: Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de conjuntos numeráveis não vazios. Consideremos cada X_n munido da topologia discreta e $Y_n := X_n \dot{\cup} \{n\}$ a sua compactificação de Alexandroff. Os espaços Y_n são metrizáveis pois são homeomorfos ao subespaço de $\mathbb{R}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Por hipótese $Y := \prod_n Y_n$ é metrizável. Seja d uma métrica em Y que induz a topologia produto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, e com $y = (n)_n$, define-se $k(n) := \min\{k \in \mathbb{N} : p_n(B(y, \frac{1}{k})) \neq Y_n\}$. Os números $k(n)$ existem porque $(p_n(B(y, \frac{1}{k})))_k$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $n \in Y_n$. A família $(X_n \setminus p_n(B(y, \frac{1}{k(n)})))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma escolha múltipla em $(X_n)_n$. ■

Existem resultados similares aos das duas proposições anteriores para espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade ([33]).

Em geral, podemos considerar a numerabilidade de uma família de espaços métricos não vazios não só uma condição suficiente mas também necessária para que o seu produto topológico seja metrizável. Ou seja, se o produto de uma família de espaços metrizáveis não vazios é metrizável, então todos excepto uma quantidade numerável dos factores são espaços triviais. No entanto, em ZF esta condição pode não ser verdadeira pois é equivalente ao Axioma da Escolha, como facilmente se verifica. O caso é diferente quando analisamos apenas os produtos não vazios.

Proposição 5.3.3 *Sejam* $(X_i)_{i \in I}$ *uma família de conjuntos não vazios e não singulares e, para cada* $i \in I$, $\mathcal{T}_i$ *uma topologia metrizável em* X_i. *Se* $\mathbf{CC}(\text{fin})$ *se verifica,* $\prod X_i \neq \emptyset$ *e* $\prod (X_i, \mathcal{T}_i)$ *é metrizável, então* $|I| \leq \aleph_0$.

Demonstração: Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família nas condições do enunciado da proposição. Por hipótese existem $x = (x_i)_i \in X := \prod_i X_i$ e uma métrica d em X que induz a topologia produto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se o conjunto

$I(n) := \{i \in I : p_i(B(x, \frac{1}{n})) \neq X_i\}$. Como $B(x, \frac{1}{n})$ é aberto na topologia produto, $I(n)$ é finito. Se **CC**(fin) se verifica, pelo Lema 1.1.20 $\bigcup_n I(n)$ é numerável.

Mas, se I não é numerável, existe $j \in I \setminus \bigcup_n I(n)$. Por outro lado, como X_j é metrizável, existe U aberto em X_j tal que $x_j \in U \neq X_j$. Claramente $p_j^{-1}(U)$ não contém nenhuma das bolas abertas $B(x, \frac{1}{n})$, o que não pode acontecer porque $p_j^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x. Sendo assim $I = \bigcup_n I(n)$ e portanto $|I| \leq \aleph_0$.

■

Dada uma família numerável de espaços métricos completos $((X_n, d_n))_n$, o seu produto topológico é metrizável por uma métrica que torna o espaço completo. Dito de outra maneira, o seu produto uniforme é um espaço uniforme completo. Este resultado é mais geral pois o produto uniforme de espaços uniformes separados completos é um espaço uniforme completo.[3]

Na categoria dos espaços métricos e das funções não expansivas, os produtos (métrica do supremo) nem sempre estão definidos. Apesar disso, quando estão definidos também preservam a completude.

Como iremos ver de seguida, na ausência do Axioma da Escolha, estes resultados não podem ser extendidos para os espaços pseudométricos e para os espaços uniformes não separados.

Teorema 5.3.4 *Os produtos existentes de espaços pseudométricos completos são completos se e só se o Axioma da Escolha é válido.*

Demonstração: Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos não vazios. Para cada $i \in I$, considere-se o espaço pseudométrico (Y_i, d_i) definido por $Y_i := X_i \dot{\cup} \mathbb{N}$ e

[3]Este resultado também é válido para espaços uniformes sequencialmente completos.

$$d_i(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x,y \in X_i \\ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| & \text{se } x,y \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{N} \text{ e } y \in X_i \\ \frac{1}{y} & \text{se } x \in X_i \text{ e } y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Cada um dos espaços pseudométricos Y_i é completo. Como todas as métricas d_i são limitadas por 1, para todo o $a = (a_i)_i \in \prod Y_i$ e para todo o $b = (b_i)_i \in \prod Y_i$, $\sup\{d_i(a_i, b_i) : i \in I\} \in \mathbb{R}$. Ou seja, o produto pseudométrico existe e, por hipótese, é completo.

A sucessão $(y_n)_n$ definida no espaço produto por $y_n(i) := n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $i \in I$, é uma sucessão de Cauchy. Como o espaço produto é completo, esta sucessão tem um limite, que é um elemento de $\prod_i X_i$. Temos assim que o Axioma da Escolha é válido. ∎

Corolário 5.3.5 ([40]) *O produto uniforme de espaços uniformes completos é completo se e só se o Axioma da Escolha é válido.*

A demonstração desenrola-se de modo semelhante à do Teorema 5.3.4, apesar de a uniformidade produto não coincidir com a uniformidade originada pela métrica produto.

Capítulo 6

O Primeiro Axioma da Numerabilidade

Um espaço topológico verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade se existe um *Sistema Fundamental de Vizinhanças* (SFV) numerável para cada um dos seus pontos (Definição 1.2.7). Em geral, ou seja, na presença do Axioma da Escolha, esta definição é clara e não suscita duas interpretações diferentes. Mas o que acontece quando o Axioma da Escolha não é válido? A primeira consequência é que não temos garantia da existência, em simultâneo, de um SFV para cada um dos pontos de um dado espaço que verifique o Primeiro Axioma da Numerabilidade. Aliás, a existência de solução para problemas deste tipo é uma das justificações para a utilização do Axioma da Escolha.

Uma breve análise a livros de introdução à Topologia permite-nos chegar à conclusão que, em todos os exemplos apresentados de espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade, é possível construir um SFV em cada ponto do espaço. Como exemplo, podemos reparar que as bolas abertas de raio $1/n$ formam um SFV em cada ponto de um dado espaço métrico. Neste caso, como na maioria dos exemplos conhecidos, é ainda possível construir, ao mesmo tempo, uma função sobrejectiva do conjunto dos números naturais para um SFV em cada ponto. Do que acabámos de dizer fica patente a possibilidade de definir o Primeiro Axioma da Numerabilidade de três maneiras diferentes.

Neste capítulo propomo-nos analisar as diferenças entre estas definições alternativas do Primeiro Axioma da Numerabilidade, e outras que irão ser introduzidas, assim como estudar a existência de condições necessárias e/ou suficientes para a sua equivalência.

6.1 Definições

Vamos começar por trabalhar com três condições, todas equivalentes ao Primeiro Axioma da Numerabilidade em ZFC. Elas vão ser denominadas por A, B e C, denominando A a definição usual. A denominação das condições que serão introduzidas mais tarde seguirá igualmente a ordem alfabética. Para facilitar a compreensão das novas definições, e a sua comparação, elas são apresentadas em linguagem simbólica.

Definições 6.1.1 Seja X um espaço topológico. Dizemos que X satisfaz:

A se $(\forall x \in X)\,(\exists \mathcal{B}(x))\ |\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{B}(x)$ é um SFV de x;

B se $(\exists (\mathcal{B}(x))_{x\in X})\,(\forall x \in X)\ |\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{B}(x)$ é um SFV de x;

C se $(\exists \{B(n,x) : n \in \mathbb{N},\, x \in X\})\,(\forall x)\ \{B(n,x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de x.

Nas definições de A, B e C pode-se exigir que as vizinhanças sejam abertas, sem com isso alterar o valor lógico das definições. Esta ressalva é feita pois iremos ver situações em que tal não é o caso.

Lema 6.1.2

(a) *Se um espaço topológico satisfaz* B*, então satisfaz* A.

(b) *Se um espaço topológico satisfaz* C*, então satisfaz* B.

Proposição 6.1.3 *Todo o espaço métrico ou com uma base numerável satisfaz* C*, e consequentemente* B *e* A.

A primeira ideia intuitiva que certamente teremos é que a equivalência entre A e B necessita do Axioma da Escolha, tal é a semelhança formal de A$\Rightarrow$B com o Axioma da Escolha. É no entanto possível provar que A é equivalente a B a partir de um princípio de escolha mais fraco do que **AC**.

Teorema 6.1.4 ([17]) *Se* $\mathbf{MC}_\omega$ *se verifica, então um espaço topológico satisfaz* A *se e só se satisfaz* B.

Demonstração: Basta mostrar que A implica B, uma vez que a outra implicação é sempre verdadeira. Seja X um espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade, ou seja satisfaz A. Consideremos o conjunto $\mathsf{L}(x)$ de todas as funções $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tais que $f(\mathbb{N})$ é um SFV de $x \in X$. Como X satisfaz A, $(\mathsf{L}(x))_{x\in X}$ é uma família de conjuntos não vazios. Logo, por $\mathbf{MC}_\omega$ existe $(\mathsf{M}(x))_{x\in X}$ com $\mathsf{M}(x)$ numerável e $\emptyset \neq \mathsf{M}(x) \subseteq \mathsf{L}(x)$ para cada x em X.

Usando o argumento da diagonal de Cantor, mostramos que cada um dos conjuntos $\mathcal{B}(x) := \{f(n) : f \in \mathsf{M}(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ é numerável, uma vez que $\mathsf{M}(x)$ também é numerável. Tem-se assim que $\mathcal{B}(x)$ é um SFV numerável de x, para cada elemento x de X. ■

Existem vários modelos de ZF onde **AC** não se verifica, mas $\mathbf{MC}_\omega$ é válido, como por exemplo no Modelo de Cohen/Pincus ($\mathcal{M}1(<\omega_1>)$ em [28]).

Infelizmente não é conhecido se a equivalência entre A e B é ou não demonstrável em ZF.

Proposição 6.1.5 *Se* $\mathbf{MC}(2^{\aleph_0})$ *se verifica, então um espaço topológico satisfaz* B *se e só se satisfaz* C.

Demonstração: Seja X um espaço topológico que satisfaz B. Da definição de B vem que que existe $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ tal que $\mathcal{B}(x)$ é um SFV numerável de x. Definem-se os conjuntos

$$\mathsf{L}(x) := \{(f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{B}(x)) : f \text{ é uma sobrejecção}\}.$$

Cada um dos conjuntos $\mathsf{L}(x)$ é diferente do vazio e tem cardinal inferior a $2^{\aleph_0}$, uma vez que $|\mathsf{L}(x)| \leq |\mathcal{B}(x)^{\mathbb{N}}| \leq {\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Por $\mathbf{MC}(2^{\aleph_0})$ existe uma família $(\mathsf{M}(x))_{x\in X}$ tal que, para todo o x, $\mathsf{M}(x)$ é finito, diferente do vazio e está contido em $\mathsf{L}(x)$.

Finalmente, $\{B(n,x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de x, com $B(n,x) := \bigcap_{f\in\mathsf{M}(x)} f(n)$.

■

Lema 6.1.6 *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}(\aleph_0)$*;*

(ii) *para toda a família de conjuntos numeráveis $(X_i)_{i\in I}$ existe uma família de funções $(f_i)_{i\in I}$ tal que f_i é uma bijecção entre um ordinal α_i e X_i.*

Demonstração: (ii)⇒(i) Dada uma família $(X_i)_{i\in I}$ de conjuntos numeráveis não vazios, por hipótese existe $(f_i : \alpha_i \longrightarrow X_i)_{i\in I}$ com f_i bijectiva e α_i um ordinal. A escolha pretendida é $(f_i(0))_{i\in I}$

(ii)⇒(i) Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos numeráveis. Podemos supor que $X_i \neq \emptyset$ porque para o conjunto vazio só existe uma bijecção possível.

A família $\mathcal{F} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(X_i) \setminus \{\emptyset\}$ é uma família de conjuntos numeráveis não vazios, logo existe $(e(F))_{F\in\mathcal{F}}$ onde $e(F)$ é um elemento de F.

Define-se então para cada $i \in I$

$$f(i,\alpha) := \begin{cases} e(X_i) & \text{se } \alpha = 0 \\ e(X_i \setminus \{f(i,\beta) : \beta < \alpha\}) & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \{f(i,\beta) : \beta < \alpha\} \neq X_i. \end{cases}$$

Como todos os conjuntos X_i são numeráveis, a função $g : I \longrightarrow \omega_1$ com $g(i) := \min\{\alpha : X_i = \{f(i,\beta) : \beta < \alpha\}\}$ está bem definida, e portanto as funções $f_i : g(i) \longrightarrow X_i$ com $f_i(\alpha) = f(i,\alpha)$ são as funções desejadas. ■

Corolário 6.1.7 *Se* $\mathbf{AC}(\aleph_0)$ *e* $\mathbf{AC}(\mathbb{R})$ *se verificam, então para toda a família de conjuntos numeráveis $(X_i)_{i\in I}$ existe uma família de funções $(f_i)_{i\in I}$ tal que f_i é uma injecção de X_i para $\mathbb{N}$.*

Demonstração: Para os conjuntos finitos X_i, sabemos do lema precedente que existe uma bijecção entre um ordinal n e X_i, o que induz uma função injectiva de X_i para $\mathbb{N}$.

Consideremos agora os conjuntos X_i infinito numeráveis. O conjunto de todas as re-ordenações de $\mathbb{N}$ bem-ordenadas tem o mesmo cardinal que $\mathbb{R}$ ([6]). Usando $\mathbf{AC}(\mathbb{R})$ podemos escolher uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e cada ordinal numerável infinito. O Lema 6.1.6 diz que, se $\mathbf{AC}(\aleph_0)$ se verifica, então podemos construir uma bijecção entre cada X_i e um ordinal, necessariamente numerável, o que conclui a demonstração. ∎

Tendo em atenção este corolário e o Lema 3.3.1, pode-se concluir o seguinte resultado.

Corolário 6.1.8 *Se* $\mathbf{AC}(\aleph_0)$ *e* $\mathbf{AC}(\mathbb{R})$ *se verificam, então a união numerável de conjuntos numeráveis é numerável (***CUC***).*

Corolário 6.1.9 *Se* $\mathbf{AC}(\aleph_0)$ *e* $\mathbf{AC}(\mathbb{R})$ *se verificam, então um espaço topológico satisfaz* B *se e só se satisfaz* C*.*

Para que B implique C é suficiente que dada uma família de conjuntos numeráveis não vazios se possa estabelecer uma injecção entre cada um deles e $\mathbb{N}$. Sendo assim, este Corolário é consequência imediata de 6.1.7.

Note-se que escolher uma função injectiva de $\mathcal{B}(x)$ para $\mathbb{N}$, para toda a família $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ de SFV numeráveis de um espaço topológico, é equivalente à tese do Corolário 6.1.7.

Realce-se ainda que esta afirmação não diz o mesmo que "B implica C", visto que os SFV considerados nas definições de B e C podem ser diferentes.

Proposição 6.1.10 *Se um espaço topológico satisfaz* B *se e só se satisfaz* C*, então* $\mathbf{MC}(\aleph_0)$ *verifica-se.*

Demonstração: Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos numeráveis infinitos e não vazios.

Consideremos cada X_i munido da topologia discreta, $X_i \dot{\cup} \{i\}$ a sua compactificação de Alexandroff e a união disjunta $X := \bigcup (X_i \cup \{i\})$ com a topologia da união. Como $|X_i| = \aleph_0$, $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(X_i)| = \aleph_0$ e portanto cada $i \in I$ tem um SFV numerável. Temos assim que X satisfaz B e por hipótese também C. Existe portanto um SFV $(B(n,i))_{n \in \mathbb{N}}$ para cada i. Sem perda de generalidade, podemos supor $B(1,i) \neq X_i$, e consequentemente $(X_i \setminus B(1,i))_{i \in I}$ é uma escolha múltipla em $(X_i)_{i \in I}$. ■

É de salientar que uma iteração deste processo permite escrever cada X_i como união numerável de conjuntos finitos. Este facto tem óbvias relações com o Corolário 6.1.7 e com a caracterização de Lévy (Proposição 1.1.7).

6.2 Caracterizações

A motivação para o estudo presente nesta secção foi a tentativa de generalizar o resultado do Teorema 3.2.2 para espaços que verificam o Primeiro Axioma da Numerabilidade. Ou seja, saber quais as condições em que se pode extrair um SFV numerável de um qualquer SFV num espaço que verifique o Primeiro Axioma da Numerabilidade.

Seguindo o que feito na secção anterior, existem de imediato três hipóteses de o fazer: uma local e duas globais, de acordo com cada uma das definições A, B e C.

Tal como foi feito na Secção 3.2, começamos por enunciar o resultado que dá a caracterização em ZFC.

Teorema 6.2.1 (ZFC) *Todo o Sistema Fundamental de Vizinhanças de um ponto num espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade contém um Sistema Fundamental de Vizinhanças numerável.*

Esta é a versão habitual do Teorema. No entanto o Primeiro Axioma da Numerabilidade é desnecessário na hipótese, uma vez que é suficiente que o ponto considerado tenha um SFV numerável. Por isso talvez faça mais sentido considerar uma versão global do Teorema.

De modo a fazermos um estudo geral de vários casos, vamos introduzir várias caracterizações do Primeiro Axioma da Numerabilidade em ZFC, mas que iremos ver serem bastante diferentes em ZF.

Definições 6.2.2 Seja X um espaço topológico. Dizemos que X satisfaz:

D se $(\forall x)(\forall \mathcal{V}(x)$ SFV abertas de $x)\,(\exists \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x))\ |\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{B}(x)$ é um SFV de x;

E se $(\forall(\mathcal{V}(x))_{x\in X}$ com $\mathcal{V}(x)$ SFV abertas de $x)\,(\exists(\mathcal{B}(x))_{x\in X})$ $(\forall x)\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$, $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{B}(x)$ é um SFV de x;

F se $(\forall(\mathcal{V}(x))_{x\in X}$ com $\mathcal{V}(x)$ SFV abertas de $x)\,(\exists\{B(n,x) : n \in \mathbb{N},\, x \in X\})$ $(\forall x)[(\forall n)B(n,x) \in \mathcal{V}(x)$ e $\{B(n,x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de $x]$;

G se $(\forall x)(\forall \mathcal{V}(x)$ SFV de $x)\,(\exists \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x))\ |\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{B}(x)$ é um SFV de x;

H se $(\forall(\mathcal{V}(x))_{x\in X}$ com $\mathcal{V}(x)$ SFV de $x)\,(\exists(\mathcal{B}(x))_{x\in X})$ $(\forall x)\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$, $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{B}(x)$ é um SFV de x;

I se $(\forall(\mathcal{V}(x))_{x\in X}$ com $\mathcal{V}(x)$ SFV de $x)\,(\exists\{B(n,x) : n \in \mathbb{N},\, x \in X\})$ $(\forall x)[(\forall n)B(n,x) \in \mathcal{V}(x)$ e $\{B(n,x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de $x]$.

Juntamente com as três definições G–I que pretendem traduzir em ZF a caracterização que está em 6.2.1, são também incluídas três definições em que os elementos do SFV dado têm que ser abertos.

Proposição 6.2.3 *Para as classes* A–I, *são verdadeiras as inclusões:*

(a) $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$;

(b) $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{E} \subseteq \mathrm{D}$;

(c) $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$;

(d) $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{D} \subseteq \mathrm{A}$;

(e) $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{E} \subseteq \mathrm{B}$;

(f) $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{F} \subseteq \mathrm{C}$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, Rightarrow] & H \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & I \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
D \arrow[d, Rightarrow] & E \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & F \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
A & B \arrow[l, Rightarrow] & C \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Lema 6.2.4 *Todo o espaço topológico com uma topologia numerável satisfaz F, e consequentemente E e D.*

Teorema 6.2.5 ([17]) *As condições seguintes são equivalentes a* **CC***:*

(i) *se, num espaço topológico, x tem um SFV numerável, então todo o SFV de x contém um SFV numerável;*

(ii) *um espaço topológico satisfaz* A *se e só se satisfaz* G*;*

(iii) *um espaço topológico satisfaz* A *se e só se satisfaz* D*;*

(iv) *um espaço topológico satisfaz* D *se e só se satisfaz* G.

Repare-se que a condição (ii) é o Teorema 6.2.1.

Demonstração: A demonstração de que **CC** implica (i) é a usual e pode ser vista em [9, 2.4.12]. As implicações (i)⇒(ii)⇒(iii) e (ii)⇒(iv) são evidentes.

Falta portanto mostrar que (iii)⇒**CC** e que (iv)⇒**CC**.

Suponhamos que **CC** não é válido. Pela Proposição 1.1.10, existe uma família $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos não vazios tal que nenhuma sucessão toma valores num número infinito dos conjuntos X_n.

Definem-se os conjuntos $X := (\bigcup X_n)\dot{\cup}\{\infty\}$ e $Y_n := (\bigcup_{k\geq n+1} X_k)\dot{\cup}\{\infty\}$. Consideremos duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ em X, sendo $\mathcal{T}_1$ definida pela base $\mathcal{B}_1$:

$$\mathcal{B}_1 := \{\{x\} : x \in X \setminus \{\infty\}\} \cup \{Y_n : n \in \mathbb{N}\};$$

$$\mathcal{T}_2 := \{Y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

O espaço $(X, \mathcal{T}_1)$ satisfaz A e $(X, \mathcal{T}_2)$ satisfaz D porque tem uma topologia numerável. Por outro lado $\mathcal{V} := \{Y_n \cup \{x\} : x \in X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de ∞ que não contém nenhum SFV numerável porque, caso contrário, existiria uma sucessão a convergir para ∞, o que não acontece por hipótese. Temos por isso que $(X, \mathcal{T}_2)$ não satisfaz G; e que $(X, \mathcal{T}_1)$ não satisfaz D, uma vez que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_1$. ■

Como a topologia $\mathcal{T}_1$ é metrizável pela métrica definida na demonstração da Proposição 3.1.7 e $|\mathcal{T}_2| = \aleph_0$, chegamos ao próximo corolário.

Corolário 6.2.6 *As condições seguintes são equivalentes a* **CC***:*

(i) *todo o espaço métrico satisfaz* G *(respectivamente* D*);*

(ii) *todo o espaço topológico com uma base numerável satisfaz* G*;*

(iii) *todo o espaço topológico com uma topologia numerável satisfaz* G.

Passamos de seguida a considerar as duas hipóteses, de que falámos anteriormente, de enunciar de um modo global (em ZF) o resultado do Teorema 6.2.1.

Proposição 6.2.7 ([17]) *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathbf{MC}_\omega$ *e* **CC***;*

(ii) $\mathbf{MC}_\omega$ *e* **CUC***;*

(iii) $\mathbf{MC}_\omega$ *e* $\mathbf{CC}(\aleph_0)$*;*

(iv) *um espaço topológico satisfaz* B *se e só se satisfaz* H*;*

(v) *um espaço topológico satisfaz* B *se e só se satisfaz* E*;*

(vi) *um espaço topológico satisfaz* E *se e só se satisfaz* H*.*

Demonstração: Pelo Lema 1.1.20 sabemos que $\mathbf{CC}\Rightarrow\mathbf{CUC}\Rightarrow\mathbf{CC}(\aleph_0)$. Se $\mathbf{MC}_\omega$ é válido, então $\mathbf{CC}$ é equivalente a $\mathbf{CC}(\aleph_0)$, logo (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii).

As implicações (iv)$\Rightarrow$(v) e (iv)$\Rightarrow$(vi) são óbvias, pelo que é suficiente mostrar que (ii)$\Rightarrow$(iv), que (v)$\Rightarrow$(i) e que (vi)$\Rightarrow$(i).

(ii)$\Rightarrow$(iv) Sejam $(\mathcal{V}(x))_{x\in X}$ uma família de SFV e $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ uma família de SFV numeráveis num espaço topológico X.

Definem-se o conjunto $I := \bigcup_{x\in X}(\mathcal{B}(x)\times\{x\})$, e, para cada $(B,x)\in I$, os conjuntos $\mathcal{L}(B,x) := \{V\in\mathcal{V}(x) : V\subseteq B\}$. Como $\mathcal{V}(x)$ é um SFV e B uma vizinhança de x, os elementos da família $(\mathcal{L}(B,x))_{(B,x)\in I}$ são não vazios. Por $\mathbf{MC}_\omega$ existe $(\mathcal{M}(B,x))_{(B,x)\in I}$ tal que cada $\mathcal{M}(B,x)$ é numerável não vazio e está contido em $\mathcal{L}(B,x)$. Por hipótese $\mathbf{CUC}$ é válida e portanto os conjuntos $\mathcal{D}(x) := \bigcup_{B\in\mathcal{B}(x)}\mathcal{M}(B,x)$ são numeráveis.

Finalmente, $(\mathcal{D}(x))_{x\in X}$ é uma família de conjuntos numeráveis com $\mathcal{D}(x)\subseteq\mathcal{V}(x)$, uma vez que $\mathcal{M}(B,x)\subseteq\mathcal{L}(B,x)\subseteq\mathcal{V}(x)$ para cada $(B,x)\in I$. Pela maneira como foram construídos, os conjuntos $\mathcal{D}(x)$ são um SFV de x.

(v)$\Rightarrow$(i) e (vi)$\Rightarrow$(i) Do Teorema 6.2.5 é (quase) imediato que cada uma das condições (v) e (vi) implica $\mathbf{CC}$.

Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos considerar a família disjunta e a sua união disjunta de I. Definem-se os conjuntos $X := \bigcup_i((X_i\times\mathbb{N})\cup\{(i,\infty)\})$ e
$Y_n := \{(x,k) : x\in X_i \text{ para algum } i\in I,\ k>n\}\cup(I\times\{\infty\})$.

Consideremos duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ em X, sendo $\mathcal{T}_1$ definida através da base $\mathcal{B}_1$:

$$\mathcal{B}_1 := \{\{(x,n)\} : x\notin I,\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{Y_n : n\in\mathbb{N}\};$$

$$\mathcal{T}_2 := \{Y_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

Das definições das duas topologias é imediato que $\mathcal{T}_1$ satisfaz B e que $\mathcal{T}_2$ satisfaz E. Como em ambos os casos cada elemento $(x,n) \notin I \times \{\infty\}$ tem um SFV só com um elemento, podemos ignorar esses pontos. Temos que $\mathcal{V}(i) := \{Y_n \cup \{(x,n)\} : x \in X_i,\ n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de (i,∞) para as duas topologias, e que $\mathcal{V}(i) \subseteq \mathcal{T}_1$. Por hipótese verifica-se (v) ou (vi), conforme o caso, e portanto existe $(\mathcal{B}(i))_{i\in I}$ tal que cada $\mathcal{B}(i)$ é um SFV numerável de (i,∞) e está contido em $\mathcal{V}(i)$.

Os conjuntos $A_i := \{x \in X_i : (\exists B \in \mathcal{B}(i))\, B \setminus Y_n = \{(x,n)\} \text{ para algum } n\}$ são numeráveis, o que completa a demonstração. ∎

Corolário 6.2.8 *Todo o espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade (i.e satisfaz* A*) satisfaz H se e só se* $\mathbf{MC}_\omega$ *e* **CC** *são simultaneamente válidos.*

Esta é uma possível alternativa, em ZF, para o Teorema 6.2.1.

Corolário 6.2.9 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{MC}_\omega$ *e* **CC***:*

(i) *todo o espaço métrico satisfaz* H *(respectivamente* E*);*

(ii) *todo o espaço topológico com uma base numerável satisfaz* H*;*

(iii) *todo o espaço topológico com uma topologia numerável satisfaz* H.

Demonstração: É imediato que $\mathbf{MC}_\omega$+**CC**⇔(ii)⇔(iii), por a topologia $\mathcal{T}_2$ definida na demonstração de 6.2.7 ser numerável, e que (i)⇒**CC** pelo Corolário 6.2.6.

Para mostrar que (i)⇒$\mathbf{MC}_\omega$, considera-se a família $(X_i)_{i\in I}$ como na demonstração de (v)⇒(i) da Proposição 6.2.7. Definem-se o espaço métrico (X,d) com $X := \bigcup_i (X_i \times \mathbb{N} \times \{i\} \cup \{(i,\infty,i)\})$ e

$$d((x,n,i),(y,m,j)) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x,n,i) = (y,m,j) \\ 2 & \text{se } i \neq j \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{se } i = j \text{ e } (x,n) \neq (y,m), \end{cases}$$

e os conjuntos $Y(i,n) := \{(i,\infty,i)\} \cup \bigcup_{k\geq n+1} (X_i \times \{k\} \times \{i\})$.

Para cada $i \in I$, $\mathcal{V}(i) := \{Y(i,n) \cup \{(x,n)\} : x \in X_i,\ n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de (i, ∞, i). A partir deste ponto, a demonstração segue como a demonstração de 6.2.7. ■

Proposição 6.2.10 *As condições seguintes são equivalentes ao Axioma da Escolha:*

(i) *todo o espaço que verifica o Primeiro Axioma da Numerabilidade (*≡A*) satisfaz* I*;*

(ii) *um espaço topológico satisfaz* C *se e só se satisfaz* I*;*

(iii) *um espaço topológico satisfaz* C *se e só se satisfaz* F*;*

(iv) *um espaço topológico satisfaz* F *se e só se satisfaz* I.

Demonstração: Uma vez que A, C, F e I são equivalentes em ZFC, **AC** implica cada uma das condições (i)–(iv).

É simples verificar que (i)⇒(ii)⇒(iii) e que (ii)⇒(iv).

Para provar que (iii)⇒**AC** e que (iv)⇒**AC**, usamos os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ definidos na demonstração da Proposição 6.2.7. Esta demonstração é semelhante a essa, mas a sobrejecção existente de $\mathbb{N}$ para cada $\mathcal{B}(i)$ permite escolher um elemento de cada um dos conjuntos A_i. ■

A condição (i) deste Teorema é outra alternativa ao enunciado do Teorema 6.2.1.

Corolário 6.2.11 *As condições seguintes são equivalentes a* **AC***:*

(i) *todo o espaço métrico satisfaz* I *(respectivamente* F*);*

(ii) *todo o espaço topológico com uma base numerável satisfaz* I*;*

(iii) *todo o espaço topológico com uma topologia numerável satisfaz* I.

A demonstração pode ser feita a partir da demonstração do Corolário 6.2.9, tendo em atenção o que foi dito na demonstração anterior.

É de certo modo surpreendente que a condição (iii), que é aparentemente tão fraca, possa ser equivalente ao Axioma da Escolha.

Proposição 6.2.12 *Se* $\mathbf{MC}_\omega$ *se verifica, então:*

(a) *um espaço topológico satisfaz* D *se e só se satisfaz* E*;*

(b) *um espaço topológico satisfaz* G *se e só se satisfaz* H*.*

A demonstração é em tudo idêntica à demonstração do Teorema 6.1.4.

Corolário 6.2.13 *Se o Axioma da Escolha Numerável é válido, então as condições seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathbf{MC}_\omega$*;*

(ii) *um espaço topológico satisfaz* D *se e só se satisfaz* E*;*

(iii) *um espaço topológico satisfaz* G *se e só se satisfaz* H*.*

Demonstração: A Proposição anterior diz que (i) implica (ii) e (iii). As implicações contrárias demonstram-se de modo similar, pelo que vamos demonstrar apenas uma delas.

(ii)⇒(i) Se D é equivalente a E e **CC** é válido, então A é equivalente a E pelo Teorema 6.2.5. Como B implica A, B implica E e portanto $\mathbf{MC}_\omega$ verifica-se pelo Teorema 6.2.7. ∎

Proposição 6.2.14 *Se* E *é equivalente a* F *ou* H *é equivalente a* I*, então* $\mathbf{MC}(\aleph_0)$ *é válido.*

Se $\mathbf{MC}(\aleph_0)$ não é válido, então o espaço topológico construído na demonstração da Proposição 6.1.10 satisfaz E e H, mas não satisfaz F e I.

6.3 Os números reais

Ao longo das secções anteriores, juntamente com o estudo de algumas das implicações entre as diferentes caracterizações do Primeiro Axioma da Numerabilidade, vimos em que condições é que certas classes satisfazem cada uma dessas caracterizações. Agora vamos estudar em que condições é que elas são satisfeitas pelo espaço topológico real. Recordemos que $\mathbb{R}$ satisfaz cada uma das três primeiras definições.

À medida que este estudo for feito, resultados sobre outras classes surgirão de forma natural.

Teorema 6.3.1 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o espaço topológico que tem uma base numerável satisfaz* D*;*

(ii) $\mathbb{R}$ *satisfaz* D.

Demonstração: $\mathbf{CC}(\mathbb{R})\Rightarrow$(i) Basta seguir a demonstração usual, tomando em consideração que a topologia de um espaço que tem uma base numerável tem cardinal inferior a $\mathbb{R}$ (Lema 1.2.9).

(ii)$\Rightarrow\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ Seja $(X_n)_n$ uma família numerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tal que $X_n \subseteq (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Consideremos ainda o SFV $\mathcal{V} := \{(-\frac{1}{n}, x) : n \in \mathbb{N},\ x \in X_n\}$ de 0. Por hipótese, existe um SFV $\mathcal{B} := \{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ de 0 que está contido em $\mathcal{V}$. Define-se $s(k) := \sup B_k$. Pela maneira como $\mathcal{V}$ foi definido, $s(k) \in X_n$ para algum n. Por outro lado, $\mathcal{B}$ é um SFV e por isso $\{s(k) : k \in \mathbb{N}\}$ tem que intersectar um número infinito dos conjuntos X_n. A Proposição 1.1.10 diz que isso é suficiente para provar $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

■

Lema 6.3.2 *Se X é um espaço topológico T_1 que tem SBN (toda a base contém uma base numerável), então X satisfaz D.*

Demonstração: Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico T_1, $x \in X$ e $\mathcal{V}(x)$ um SFV abertas de x. Como X é T_1, $\mathcal{B} := \{U \in \mathcal{T} : x \notin U \text{ ou } U \in \mathcal{V}(x)\}$ é uma base para os abertos de X. Por hipótese existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{C}| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{C}$ é uma base. Por fim $\mathcal{C} \cap \mathcal{V}(x)$ é um SFV numerável de x. ■

Neste ponto podemos verificar que o Teorema 3.2.2 poderia ser facilmente demonstrado a partir do Teorema 6.3.1 e do Lema 6.3.2.

Proposição 6.3.3 *As condições seguintes são equivalentes ao Axioma da Escolha Numerável para famílias de subconjuntos de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *(*$\mathbf{CC}(\mathcal{P}\mathbb{R})$*):*

(i) *todo o espaço* T_0 *que tem uma base numerável satisfaz* G*;*

(ii) $\mathbb{R}$ *satisfaz* G*.*

Demonstração: $\mathbf{CC}(\mathcal{P}\mathbb{R}) \Rightarrow$(i) Se X é um espaço topológico T_0 com uma base numerável, então $|X| \leq |\mathbb{R}|$, e para provar (i) é suficiente fazer uma escolha numerável numa família de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$.

(ii)$\Rightarrow \mathbf{CC}(\mathcal{P}\mathbb{R})$ Seja $(X_n)_n$ uma família de subconjuntos não vazios de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e consideremos $X_n \subseteq \mathcal{P}((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}))$. Define-se um SFV $\mathcal{V} := \{(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}) \cup A : n \in \mathbb{N},\ A \in X_n\}$ de 0. Se $\mathbb{R}$ satisfaz G, então existe $\mathcal{B} := \{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ e $\mathcal{B}$ é um SFV de 0. A existência de $\mathcal{B}$ implica a existência de uma sucessão que toma valores em X_n para um número infinito de conjuntos X_n, o que completa a demonstração. ■

Proposição 6.3.4 *Todo o espaço que tem uma base numerável satisfaz* F *se e só se o Axioma da Escolha é válido em* $\mathbb{R}$ *(*$\mathbf{AC}(\mathbb{R})$*).*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sua base. Pelo Lema 1.2.9, $|\mathcal{T}| \leq |\mathbb{R}|$ e, de $\mathbf{AC}(\mathbb{R})$ vem que $\mathbb{R}$ é bem ordenado e portanto $\mathcal{T}$ é também bem ordenado.

Consideremos a família $(\mathcal{V}(x))_{x \in X}$ em que cada $\mathcal{V}(x)$ é um SFV abertas de x. Para $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$, define-se $\mathcal{C}(n, x) := \{V \in \mathcal{V}(x) : V \subseteq B_n\}$. Se $x \in B_n$, então $\mathcal{C}(n, x) \neq \emptyset$, e porque $\mathcal{T}$ tem uma boa ordem pode-se definir $B(n, x) := \min \mathcal{C}(n, x)$. O conjunto $\mathcal{B}(x) = \{B(n, x) : n \in \mathbb{N},\ x \in B_n\}$ é um SFV de x.

($\Rightarrow$) Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Consideremos $I \cap \mathbb{R} = \emptyset$ e $Y := \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup I$ munido da topologia inicial em relação à função

$$\begin{array}{rcl} f : Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } y \in I \\ y & \text{se } y \notin I. \end{cases} \end{array}$$

Como $\mathbb{R}$ tem uma base numerável, Y tem uma base numerável.

Consideremos as bijecções $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ e definamos $X_{in} := f_n(X_i)$. Para cada $i \in I$, $\mathcal{V}(i) := \{I \cup (-\frac{1}{n}, 0) \cup (0, x) : x \in X_{in},\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T}_Y$ é um SFV de i. Por hipótese existe $\{B(k,i) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{V}(i)$ que é um SFV de i.

Por fim, para cada $i \in I$, $\sup B(1,i)$ é um elemento de X_{in} para algum n e X_{in} está em bijecção com X_i, o que fornece a a escolha pretendida. ∎

Corolário 6.3.5 *O espaço topológico* $\mathbb{R}$ *satisfaz* F *se e só se o Axioma da Escolha é válido para famílias* $(X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ *de subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Basta retomar a demonstração anterior, verificando que, para $X = \mathbb{R}$, $|X \times \mathbb{N}| = 2^{\aleph_0}$.

($\Rightarrow$) Seja $(X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ uma família de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. A demonstração é idêntica à demonstração da Proposição 6.3.4, com $Y = \mathbb{R}$, $X_{in} \subseteq (i + \frac{1}{n+1}, i + \frac{1}{n})$ e $\mathcal{V}(i) := \{(i - \frac{1}{n}, x) : x \in X_{in},\ n \in \mathbb{N}\}$. ∎

Tendo em conta as demonstrações das Proposições 6.2.7, 6.3.3 e 6.3.4 e do Corolário 6.3.5, e que $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ (respectivamente $\mathbf{CC}(\mathcal{P}\mathbb{R})$) implica que *a união numerável de subconjuntos numeráveis de* $\mathbb{R}$ *(respectivamente* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$*) é numerável*, podemos deduzir os próximos resultados.

Corolário 6.3.6 *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathbf{MC}_\omega(\mathbb{R})$ *e* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*;*

(ii) *todo o espaço com uma base numerável satisfaz* E.

Corolário 6.3.7 *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathbf{MC}_\omega$ *é válido para famílias* $(X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ *de subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ *também é válido;*

(ii) $\mathbb{R}$ *satisfaz* E.

Corolário 6.3.8 *O espaço topológico* $\mathbb{R}$ *satisfaz* I *se e só se o Axioma da Escolha é válido para famílias* $(X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ *de subconjuntos não vazios de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Para provar que $\mathbb{R}$ satisfaz I procede-se da maneira usual, tendo em atenção que $|\mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. Portanto, dado um SFV $\mathcal{V}(x)$ de $x \in \mathbb{R}$,
$|\{(f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{V}(x)) : f(\mathbb{N}) \text{ é um SFV de } x\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

Para a outra implicação usa-se uma conjunção de argumentos do tipo dos usados nas demonstrações de 6.3.3 e 6.3.5.

Corolário 6.3.9 *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathbf{MC}_\omega$ *é válido para famílias* $(X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ *de subconjuntos não vazios de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *e* $\mathbf{CC}(\mathcal{P}\mathbb{R})$ *também é válido;*

(ii) $\mathbb{R}$ *satisfaz* H.

Na segunda secção deste capítulo provámos que o Axioma da Escolha é uma condição necessária para que *todo o espaço com uma topologia numerável satisfaça* I. Tal como foi feito noutras situações, vamos agora estudar o caso em que os espaços, além de terem uma topologia numerável, são T_0. Os resultados apresentados são algo surpreendentes, principalmente por serem idênticos para as classes G, H e I.

Proposição 6.3.10 *As condições seguintes são equivalentes a* $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$*:*

(i) *todo o espaço topológico* T_0 *com uma topologia numerável satisfaz* I*;*

(ii) *todo o espaço topológico* T_0 *com uma topologia numerável satisfaz* H*;*

(iii) *todo o espaço topológico* T_0 *com uma topologia numerável satisfaz* G.

Demonstração: As implicações (i)⇒(ii)⇒(iii) são evidentes (6.2.3).

$\mathbf{CC}(\mathbb{R})$⇒(i) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico T_0 tal que $|\mathcal{T}| \leq \aleph_0$. Como $(X, \mathcal{T})$ é T_0, $|X| \leq |\mathcal{T}| \leq \aleph_0$ e consequentemente $|\mathcal{P}(X)| \leq 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$. Consideremos ainda a família $(\mathcal{V}(x))_{x \in X}$ tal que $\mathcal{V}(x)$ é um SFV de x.

Define-se $\mathbb{M} := \{(x, A) : x \in A \in \mathcal{T}\}$ e, para cada par (x, A) em $\mathbb{M}$, $\mathcal{L}(x, A) := \{V \in \mathcal{V}(x) : V \subseteq A\}$. Como $|\mathbb{M}| \leq |X \times \mathcal{T}| \leq \aleph_0$ e $\mathcal{V}(x)$ é um SFV de x, $(\mathcal{L}(x, A))_{(x,A) \in \mathbb{M}}$ é uma família numerável de subconjuntos não vazios de $\mathcal{P}(X)$.

Por hipótese $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ verifica-se e por isso podemos escolher um elemento $V(x, A)$ de cada $\mathcal{L}(x, A)$. O conjunto $\mathcal{B}(x) := \{V(x, A) : x \in A\}$ é um SFV de x. O facto de $\mathbb{M}$ ser numerável permite-nos construir simultaneamente uma função injectiva de cada $\mathcal{B}(x)$ para $\mathbb{N}$.

(iii)⇒$\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ Consideremos o conjunto $X := [0, \omega^2]$, onde ω é o primeiro ordinal infinito, munido da topologia $\mathcal{T} := \{(\alpha, \omega^2] : \alpha \in \omega^2\} \cup \{\emptyset, X\}$. Como ω^2 é numerável, $\mathcal{T}$ é numerável. A topologia $\mathcal{T}$ é também T_0.

Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Uma vez que $\mathbb{R}$ está em bijecção com $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e facilmente se constrói uma função bijectiva entre $\mathbb{N}$ e $((n-1)\omega, n\omega)$, consideremos $X_n \subseteq \mathcal{P}(((n-1)\omega, n\omega))$.

O conjunto $\mathcal{V} := \{(n\omega, \omega^2] \cup A : A \in X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é um SFV de ω^2. Por hipótese existe um SFV $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ de ω^2 que está contido em $\mathcal{V}$. Define-se então $\varphi(k) := \min\{n \in \mathbb{N} : (n\omega, \omega^2] \subseteq B_k\}$ e $A_k := B_k \setminus (\varphi(k)\omega, \omega^2] \subseteq X_{\varphi(k)}$.

Como $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ é um SFV, $(\varphi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para ω, e temos assim que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão que toma valores num número infinito dos conjuntos X_n, o que completa a demonstração pela Proposição 1.1.10. ∎

Índice de notações

Bibliografia

[1] B. Banaschewski, *The Axiom of Countable Choice and Pointfree Topology*, Categorical Methods in Algebra and Topology, Mathematik-Arbeitspapier, vol. **48**, Universität Bremen, 1997, pp. 27–38.

[2] H. L. Bentley e H. Herrlich, *Countable choice and pseudometric spaces*, Topology Appl. **85** (1997), 153–164.

[3] A. Blass, *A model without ultrafilters*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math Astron. Phys. **25** (1977), 329–331.

[4] N. Brunner, *Lindelöf Räume und Auswahlaxiom*, Anz. Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **119** (1982), 161–165.

[5] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten V*, Math. Annalen **21** (1883), 545–591.

[6] A. Church, *Alternatives to Zermelo's Assumption*, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), 178–208.

[7] P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York, 1966.

[8] O. De la Cruz, E. Hall, P. Howard, J. E. Rubin e A. Stanley, *Definitions of compactness and the axiom of choice*, J. Symb. Logic **67** (2002), 143–161.

[9] Á. Császár, *General topology*, Adam Hilger Ltd, Bristol, 1978.

[10] R. Engelking, *General Topology,* revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[11] S. Feferman e A. Levy, *Independence results in set theory by Cohen's method*, Notices of Amer. math. Soc. **10** (1963), 593.

[12] W. Felschner, *Naive mengen und abstrakte zahlen III – transfinite methoden*, Bibliographisches Institut, 1979.

[13] A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel e A. Levy, *Foundations of set theory,* second revised edition, North-Holland Publ. Co., Amsterdam London, 1973.

[14] M. Gitik, *All uncountable cardinals can be singular*, Israel Journal of Mathematics **35** (1980), 61–88.

[15] C. Good e I. J. Tree, *Continuing horrors in topology without choice*, Topology Appl. **63** (1995), 79–90.

[16] G. Gutierres, *Sequential topological conditions in $\mathbb{R}$ in the absence of the axiom of choice*, Math. Log. Quart. **49** (2003), 293–298.

[17] ______, *On first and second countable spaces and the axiom of choice*, Topology Appl. **143** (2004), 93–103.

[18] ______, *On countable choice and sequential spaces*, Preprint, 2004.

[19] H. Herrlich, *Topologie I: Topologische Räume*, Heldermann Verlag, Berlin, 1986.

[20] ______, *Compactness and the Axiom of Choice*, Appl. Categ. Structures **4** (1996), 1–14.

[21] ______, *Products of Lindelöf T_2-spaces are Lindelöf – in some models of* ZF, Comment. Math. Univ. Carolinae **43** (2002), 319–333.

[22] H. Herrlich e K. Keremedis, *The Baire Category Theorem and choice*, Topology Appl. **108** (2000), 157–167.

[23] H. Herrlich e J. Steprāns, *Maximal filters, continuity and choice principles*, Quaest. Math. **20** (1997), 697–705.

[24] H. Herrlich e G. E. Strecker, *When* $\mathbb{N}$ *is Lindelöf?*, Comment. Math. Univ. Carolinae **38** (1997), 553–556.

[25] P. Howard, K. Keremedis, H. Rubin e J. E. Rubin, *Disjoint Unions of Topological Spaces and Choice*, Math. Log. Quart. **44** (1998), 493–508.

[26] P. Howard, K. Keremedis, J. E. Rubin e A. Stanley, *Paracompactness of Metric Spaces and the Axiom of Multiple Choice*, Math. Log. Quart **46** (2000), 219–232.

[27] P. Howard, K. Keremedis, J. E. Rubin, A. Stanley e E. Tachtsis, *Non-constructive Properties of the Real Numbers*, Math. Log. Quart **47** (2001), 423–431.

[28] P. Howard e J. E. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice*, Mathematical surveys and monographs, vol. **59**, American Mathematical Society, 1998.

[29] ______, *Consequences of the Axiom of Choice Project Homepage*, http://www.math.purdue.edu/∼ jer/cgi-bin/conseq.html .

[30] I. M. James, *Topological and Uniform spaces*, Undergraduate Texts in Mathmatics, Springer Verlag.

[31] T. J. Jech, *The Axiom of Choice*, Studies in Logic and the foundations of Mathematics, vol. **75**, North-Holland Publ. Co., Amsterdam London, 1973.

[32] J. L. Kelley, *Tychonoff's theorem implies* AC, Fund. Math. **37** (1950), 75–76.

[33] K. Keremedis, *Disasters in topology without the axiom of choice*, Arch. Math. Logic **40** (2001), 569–580.

[34] A. Lévy, *Axioms of multiple choice*, Fund. Math. **50** (1962), 475–483.

[35] P. A. Loeb, *A new proof of the Tychonoff theorem*, Am. Math. Monthly **72** (1965), 711–717.

[36] G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice – It's Origins, Development and Influence*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. **8**, Springer–Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.

[37] J. Mycielski, *Two remarks on Tychonoff's product theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math Astron. Phys. **12** (1964), 439–441.

[38] H. Rubin e D. Scott, *Some topological theorems equivalent to the Boolean prime ideal theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **60** (1954), 389.

[39] J. Rubin, *Set theory for the mathematician*, Holden-Day series in Mathematics, Holden-Day, 1967.

[40] E. Schechter, *Two topological equivalents of the axiom of choice*, Z. Math. Logic Grund. Math. **38** (1992), 555–557.

[41] W. Sierpiński, *Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'Analyse moderne*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences, Paris **193** (1916), 688–691.

[42] ______, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie, Cl. Sci. Math., Sér. A (1918), 97–152.

[43] L. A. Steen e J. A. Seebach Jr., *Counterexamples in Topology,* Second edition, Springer–Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1978.

[44] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Clarendon Press, Oxford, 1973.

[45] A. Tychonoff, *Über die topologische erweiterung von räume*, Math. Annalen **92** (1930), 275–293.

[46] A. Wilansky, *Topology for Analysis*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1983.

[47] S. Willard, *General Topology*, Addison Wesley Publishing Company, 1983.

[48] E. Zermelo, *Beweis, dass jede Menge Wohlgeordnet werden kann*, Math. Annalen **59** (1904), 514–516.

[49] ———, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordung*, Math. Annalen **65** (1908), 107–128.

[50] ———, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Math. Annalen **65** (1908), 261–281.

Índice remissivo