Gonçalo Gutierres da Conceição

CONEXIDADE EM CATEGORIAS

Universidade de Coimbra
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática
1997

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do programa de Mestrado em Matemática, área de especialização em Matemática Pura, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Agradecimentos

Desejo agradecer à Professora Doutora Maria Manuel Clementino pela permanente dedicação e disponibilidade demonstrada no acompanhamento deste trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e ao Centro de Matemática da Universidade de Coimbra agradeço as condições de trabalho que me disponibilizaram durante a preparação desta dissertação.

Ao projecto PCEX/P/MAT/46/96/ACL agradeço o apoio financeiro concedido.

Quero ainda expressar o meu agradecimento a todos os que me apoiaram durante este período.

Índice Geral

Introdução

Nesta dissertação pretende-se fazer uma síntese de duas maneiras diferentes de estender a uma categoria os conceitos de espaço conexo e espaço totalmente desconexo, estudados em Topologia.

A primeira dessas abordagens é baseada no estudo das conexões e das desconexões em espaços topológicos, que foi iniciado por Preuβ [19] e Herrlich [16] em finais da década de 60, sendo mais tarde aprofundado por Arhangel'skiĭ e Wiegandt [2] em 1975. Esta abordagem tem ainda como caso particular as subcategorias de torsão e as subcategorias sem torsão estudadas em Álgebra, que foram introduzidas por Dickson em 1966 ([10]). Os conceitos de conexão e desconexão foram posteriormente generalizados para uma qualquer categoria por Petz [18] e por Clementino [4].

A introdução, no artigo *Closure operators I* [11] de Dikranjan e Giuli, da definição de operador de fecho numa categoria permitiu fazer outro tipo de estudo sobre a conexidade e a separação em geral e que engloba as noções usuais para espaços topológicos.

A caracterização dos espaços de Hausdorff como os espaços com a diagonal fechada, que pode ser formulada em categorias munidas de um operador de fecho, motivou o estudo dos objectos separados numa categoria em relação a um operador de fecho. Os objectos separados e as subcategorias plenas dos objectos separados foram estudados intensamente nos anos 80. Embora Dikranjan e Giuli tenham referido em [11], conjuntamente com a definição de objecto separado, a possiblidade de estudar os objectos com a diagonal densa, este estudo só se iniciou recentemente, com a publicação de [23] e [13]. Ele tem como motivação o facto de estes objectos na categoria dos espaços topológicos, relativamente a determinados operadores de fecho (diferentes do de Kuratowski), serem exactamente os espaços conexos, e por isso se designam por objectos conexos. Em [7] pode ser encontrada uma análise do comportamento dos objectos conexos e das subcategorias por eles definidas em paralelo com o comportamento dos objectos separados e dos objectos separados.

Sobre certas condições estas duas abordagens de conexidade são paralelas, como foi provado por Clementino e Tholen em [7].

O problema da caracterização das subcategorias de objectos separados (subcategorias delta) e das subcategorias de objectos conexos (subcategorias nabla) está directamente relacionado com o estudo de operadores de fecho especiais: os operadores de fecho regulares e corregulares, respectivamente. Os operadores de fecho regulares foram pela primeira vez estudados por Salbany [21] na categoria dos espaços topológicos, tendo sido desde então estudados e usados na resolução de diversos problemas, nomeadamente no estudo de epimorfismos e boa copotenciação. Por outro lado, os operadores de fecho corregulares foram introduzidos apenas recentemente (ver [7]), com o objectivo de caracterizar subcategorias nabla. Em [7] Clementino e Tholen apresentam alguns exemplos de operadores de fecho corregulares. Neste trabalho investigamos alguns outros exemplos, nomeadamente na categoria dos espaços topológicos, que nos permitem obter novos resultados sobre subcategorias nabla de $\mathcal{T}$op.

Este trabalho inicia-se com algumas definições básicas e resultados elementares, que serão usadas ao longo dos restantes capítulos, e que constituem o Capítulo 0. São abordados, nomeadamente, sistemas de factorização, objectos terminais e pré-terminais, e operadores de fecho em categorias.

O Capítulo 1 começa com a definição de morfismo constante. Contrariamente ao que sucede com muitas outras noções matemáticas cuja a formulação categórica é clara, não há uma noção única de morfismo constante. Há de facto várias formulações de constante em categorias, sendo talvez a mais conhecida a de Herrlich [16], que apresentamos na definição 1.6. Na secção 1.1 indicamos diversos conceitos de morfismo constante e estabelecemos relação entre eles. A definição aqui usada é um caso particular da definição de Petz [18]. Os resultados do Capítulo 3 justificam claramente a nossa escolha.

Dispondo de um conceito de morfismo constante, diversos autores estudam as subcategorias constantes à esquerda e à direita de uma categoria, que são ao mesmo tempo uma generalização das conexões e desconexões em Topologia e das subcategorias de torsão e subcategorias sem torsão em Álgebra. Arhangel'skiĭ e Wiegandt caracterizam em [2] as subcategorias na categoria dos espaços topológicos e Dickson [10] caracteriza as teorias de torsão em categorias abelianas. Generalizações destes resultados podem ser encontrados na literatura, sendo de salientar [20], [24], [22], [4] e [7]. No final do Capítulo 1 apresentamos condições necessárias para que uma subcategoria seja constante à esquerda ou à direita.

No Capítulo 2 são introduzidas as noções de objecto separado e objecto conexo em relação a um operador de fecho. Estes objectos são definidos como sendo os objectos com a diagonal fechada e a diagonal densa, por esta ordem. As subcategorias delta, dos objectos separados, e as subcategorias nabla, dos objectos conexos, são completamente definidas pelos operadores de fecho regulares e corregulares. Os operadores de fecho regulares e corregulares são aqui definidos como em [7].

Na secção 2.3, denominada Teoremas da diagonal, são enunciadas condições sob as quais uma subcategoria é delta se e só se é fechada para monofontes. Este teorema está provado em [13] num contexto algébrico e em [15] num contexto topológico. A versão topológica é provada com base na Proposição 2.16, que serve para caracterizar as subcategorias delta em categorias com pontos suficientes. A Proposição 2.26 dá-nos uma caracterização do mesmo género para as subcategorias nabla.

No terceiro capítulo são relacionados os dois estudos de conexões apresentados nos capítulos anteriores. Na Proposição 3.5 e no Corolário 3.6 mostra-se que para uma categoria com pontos suficientes todas as subcategorias constantes à esquerda são do tipo nabla, e todas as subcategorias constantes à direita são do tipo delta. Este resultado foi provado em [7] num contexto um pouco mais geral, em que apenas é necessário ter quasipontos suficientes.

No último capítulo são apresentados alguns exemplos, com especial incidência na categoria dos espaços topológicos que foi a motivadora de grande parte destes resultados. A teoria também é ilustrada com exemplos em categorias de módulos, na categoria dos grupos e na categoria dos grafos. É ainda referida, e brevemente exemplificada, a hipótese deste estudo se alargar aos morfismos usando para isso as categorias fibradas, o que é feito em [8] por Clementino e Tholen.

De entre os exemplos, considero com especial interesse a ordenação de diversos operadores de fecho corregulares na categoria dos espaços topológicos, e a relação existente entre as subcategorias delta e nabla dos operadores de fecho induzidos por um pré-radical r e os r-módulos livres e de torsão.

Ao longo de todo o trabalho é suposto um conhecimento prévio de Teoria das Categorias. Para mais detalhes sobre Categorias, ver por exemplo [1], [3] ou [17], de onde foi retirada a maioria da notação categórica utilizada.

Capítulo 0

Conceitos básicos

Ao longo de todo o trabalho $\mathcal{X}$ representa uma categoria com limites finitos.

Vamos considerar $\mathcal{X}$ munida de um *sistema de factorização* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (ver por exemplo [1] e [14]).

Definição 0.1 *Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{M}$ duas classes de morfismos de $\mathcal{X}$. O par $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é um sistema de factorização de $\mathcal{X}$ se verifica as seguintes condições:*

1. *As classes $\mathcal{E}$ e $\mathcal{M}$ são fechadas para a composição e para a composição com isomorfismos.*
2. *Todo o morfismo f em $\mathcal{X}$ tem uma factorização $f = m \cdot e$, com $m \in \mathcal{M}$ e $e \in \mathcal{E}$.*
3. *Quaisquer dois morfismos m em $\mathcal{M}$ e e em $\mathcal{E}$ são ortogonais; isto é, se existem morfismos f e g tais que $m \cdot f = g \cdot e$, então existe um único morfismo t tal que: $m \cdot t = g$ e $t \cdot e = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "t"'] \\ M \arrow[r, "m"] & Z \end{tikzcd}$$

A 3 chama-se *propriedade da diagonalização,* e em vez dela pode-se escrever que a factorização de 2 é única, a menos de isomorfismo.

Vamos considerar ainda que o *sistema de factorização* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ de $\mathcal{X}$ é *próprio,* isto é, $\mathcal{M} \subseteq Mono(\mathcal{X})$ e $\mathcal{E} \subseteq Epi(\mathcal{X})$. Dizer que $\mathcal{E}$ é uma classe de epimorfismos é equivalente a dizer que todos os monomorfismos regulares estão em $\mathcal{M}$.

Vamos, além disso, assumir que $\mathcal{X}$ é $\mathcal{M}$-*completa,* ou seja, $\mathcal{X}$ tem limites de cofontes de morfismos em $\mathcal{M}$, que ainda pertencem a $\mathcal{M}$, e $\mathcal{M}$ é estável para produtos fibrados.

Nestas condições, a factorização estende-se a uma factorização $(\mathbb{E},\mathcal{M})$ para cofontes. Os elementos $(e_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{E}$ são as cofontes ortogonais a todo o morfismo $m \in \mathcal{M}$, isto é, se $v \cdot e_i = m \cdot u_i$ para todo o $i \in I$ então existe um único morfismo t tal que $m \cdot t = v$ e $t \cdot e_i = u_i$ para todo $i \in I$ (ver [13]).

É de notar que toda a cofonte de $\mathbb{E}$ é uma epicofonte.

Se $m \cdot f \in \mathcal{M}$ e $m \in \mathcal{M}$ então $f \in \mathcal{M}$, e se $g \cdot e \in \mathcal{E}$ e $e \in \mathcal{E}$ então $g \in \mathcal{E}$. Para uma família $(m_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{M}$, $\prod\limits_{i\in I} m_i$ pertence a $\mathcal{M}$.

A um morfismo $m : M \longrightarrow X$ de $\mathcal{M}$ chama-se *subobjecto* de X e os subobjectos de um determinado X formam uma classe pré-ordenada, que se representa por sub$X$, onde a relação de pré-ordem é definida por

$$m \leq n :\Leftrightarrow (\exists\, t \in \mathcal{M}) \,:\, m = n \cdot t\,.$$

Para uma categoria $\mathcal{M}$-completa existem supremos e ínfimos em sub$X$, a que chamaremos *união* e *intersecção*, respectivamente. Consideremos $(m_i : M_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ uma cofonte de elementos de sub$X$. A intersecção de $(m_i)_{i\in I}$ é dada pelo seu limite, e representa-se por $\bigwedge\limits_{i\in I} m_i : \bigwedge\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow X$. A união de $(m_i)_{i\in I}$ representa-se por $\bigvee\limits_{i\in I} m_i : \bigvee\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow X$, e é definida por $\bigvee\limits_{i\in I} m_i = \bigwedge\{m \in \text{sub}X \,|\, m \geq m_i \text{ para todo } i \in I\}$. A cofonte induzida pela união $(e_i : M_i \longrightarrow \bigvee\limits_{i\in I} M_i)_{i\in I}$ tal que $(\bigvee m_i) \cdot e_i = m_i$ para todo $i \in I$ é uma cofonte de $\mathbb{E}$.

Para $f : X \longrightarrow Y$ e $(m : M \longrightarrow X) \in \text{sub}X$, define-se $f(m)$, a *imagem* de m por f, como sendo a parte em $\mathcal{M}$ da factorização $(\mathcal{E},\mathcal{M})$

de $f \cdot m$, e o domínio de $f(m)$ é denotado por $f(M)$. No caso $m = 1_X$, a $f(1_X)$ chama-se simplesmente *imagem de* f e a $f(X)$ *imagem de* X *por* f ($X \xrightarrow{e} f(X) \xrightarrow{f(1_X)} Y$).

O functor imagem directa $f(-) : \text{sub}X \longrightarrow \text{sub}X$ tem como adjunto à direita o functor *imagem inversa* $f^{-1}(-)$, que está definido através do produto fibrado. Isto é, para $f : X \longrightarrow Y$, se $n \in \text{sub}Y$, $f^{-1}(n) \in \text{sub}X$ é o produto fibrado de n através de f.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(N) \arrow[r, "f^{-1}(n)"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "n"] & Y
\end{tikzcd}$$

Para $f : X \longrightarrow Y$, $m, (m_i)_{i \in I} \in \text{sub}X$ e $n, (n_i)_{i \in I} \in \text{sub}Y$, das propriedades desta adjunção concluímos que:

1. $m \leq f^{-1}(n) \Longleftrightarrow f(m) \leq n$
2. $m \leq f^{-1}(f(m))$ e $f(f^{-1}(n)) \leq n$
3. $f(\bigvee\limits_{i \in I} m_i) \cong \bigvee\limits_{i \in I} f(m_i)$
4. $f^{-1}(\bigwedge\limits_{i \in I} n_i) \cong \bigwedge\limits_{i \in I} f^{-1}(n_i)$.

Para mais pormenores sobre imagens e imagens inversas, consultar [11] e [13].

0.1 Objectos pré-terminais

Objecto pré-terminal é todo o objecto P tal que $\mathcal{X}(X, P)$ tem no máximo um morfismo para todo o $X \in \mathcal{X}$. Designemos por $\mathcal{P}$ a subcategoria plena de $\mathcal{X}$ dos objectos pré-terminais. Recordemos que $\mathcal{P}$ é fechada para monofontes, em particular para limites.

Os morfismos em $\mathcal{M}$ de domínio em $\mathcal{P}$ e codomínio em $X \in \mathcal{X}$ são denominados *pré-pontos* de X, e a classe dos pré-pontos de X é designada por $\mathrm{ppt}X$. Todo o pré-ponto cujo domínio é um objecto terminal diz-se um *ponto* de X, e a classe de todos os pontos de X é representada por $\mathrm{pt}X$. Ficam assim definidas duas inclusões para cada objecto X de $\mathcal{X}$:

$$\mathrm{pt}X \subseteq \mathrm{ppt}X \subseteq \mathrm{sub}X.$$

Diz-se que $X \in \mathcal{X}$ tem *pontos suficientes* se

$$\bigvee\{x \mid x \in \mathrm{pt}X\} = \bigvee \mathrm{pt}X \cong 1_X,$$

e que $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes se todos os seus objectos os têm.

O *objecto* G de $\mathcal{X}$ é *gerador* de $\mathcal{X}$ quando a cofonte de todos os morfismos de G em X é uma epicofonte para todo o objecto X de $\mathcal{X}$.

Designemos por 1 o objecto terminal de $\mathcal{X}$.

Se $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes então o seu objecto terminal é gerador. De facto, se $\bigvee \mathrm{pt}X \cong 1_X$, então a cofonte $(x : 1 \longrightarrow X)_{x \in \mathrm{pt}X}$ é a cofonte induzida pela união, logo está em $\mathbb{E}$, e todos os elementos de $\mathbb{E}$ são epicofontes.

Para $(m : M \longrightarrow X) \in \mathcal{M}$ define-se o conjunto dos pontos de m:

$$\mathrm{pt}(m) = \{x \in \mathrm{pt}X \mid x \leq m\}.$$

Uma cofonte $(m_i)_{i \in I}$ de subobjectos de X tem um ponto comum se $\bigcap\limits_{i \in I} \mathrm{pt}(m_i) \neq \emptyset$.

Esta definição pode-se generalizar para cofontes em geral. Diz-se que uma cofonte em $\mathcal{X}$ tem um ponto em comum se a sua parte em $\mathcal{M}$ tiver um ponto em comum.

Os *pontos detectam monofontes* se uma fonte $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$ em $\mathcal{X}$ é uma monofonte sempre que

$$(\forall i \in I \;\; f_i \cdot x = f_i \cdot y) \Longrightarrow x = y \;\text{ para }\; x, y \in \mathrm{pt}X.$$

Existem definições de pré-pontos suficientes, de pré-ponto comum e de pré-pontos que detectam monofontes, semelhantes às que foram dadas para pontos.

Proposição 0.2 *Se $\mathcal{X}$ tem terminal gerador então os pontos detectam monofontes.*

Demonstração: Seja $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$ uma fonte em $\mathcal{X}$ tal que $x = y$ sempre que $f_i \cdot x = f_i \cdot y$ para todo i em I, onde x e y são pontos de X. Consideremos ainda dois morfismos $g, h : Z \longrightarrow X$ de $\mathcal{X}$ tais que $f_i \cdot g = f_i \cdot h$, para todo i em I. Esta igualdade implica que $f_i \cdot g \cdot z = f_i \cdot h \cdot z$, para todo $i \in I$ e todo $z \in \mathrm{pt}Z$

Como para todo o z em pt$Z$ os morfismos $g \cdot z$ e $h \cdot z$ são pontos de X, então por hipótese $(g \cdot z = h \cdot z)_{z \in \mathrm{pt}Z}$ e finalmente $g = h$, por pt$Z$ ser uma epicofonte. Se Z não tiver pontos então a hipótese de 1 ser gerador implica que Z é pré-inicial, e portanto $g = h$ do mesmo modo. Ou seja $(f_i)_{i \in I}$ é uma monofonte. ■

0.2 Operadores de fecho

Vamos optar por utilizar apenas a definição local de *operador de fecho,* em contraponto à definição functorial, que pode ser vista em [11] e [13]. De seguida serão referidos alguns resultados básicos, dos quais omitiremos as demonstrações, que podem ser estudadas em [11] e [13].

Definição 0.3 *Um operador de fecho c na categoria $\mathcal{X}$ em relação ao sisfema de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é definido por uma classe de funções $(c_X : \mathrm{sub}X \longrightarrow \mathrm{sub}X)_{X \in \mathcal{X}}$ tais que:*

1. *$m \leq c_X(m)$ para todo $m \in \mathrm{sub}X$;*
2. *se $m_1 \leq m_2$ então $c_X(m_1) \leq c_X(m_2)$ para todo $m_1, m_2 \in \mathrm{sub}X$;*
3. *$f(c_X(m)) \leq c_Y(f(m))$ para todo $m \in \mathrm{sub}X$ e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de $\mathcal{X}$.*

Ou seja um operador de fecho c é extensivo, monótono e todos os morfismos são contínuos em relação a c.

Em vez de 3 pode-se escrever que $c_X(f^{-1}(n)) \leq f^{-1}(c_Y(n))$ para todo o n em sub$Y$ e $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{X}$.

Para $(m : M \longrightarrow X) \in$ sub$X$, o domínio de $c_X(m)$ vai ser denotado por $c_X(M)$; designaremos por j_m o morfismo tal que $m = c_X(m) \cdot j_m$.

Por vezes, escreve-se $c(m)$ em vez de $c_X(m)$ e $c(M)$ em vez de $c_X(M)$.

Lema 0.4 *Sejam m, n morfismos em $\mathcal{M}$ e f, g morfismos em $\mathcal{X}$ tais que $f \cdot m = n \cdot g$. Então existe um único morfismo $t : c(M) \longrightarrow c(N)$ para o qual $t \cdot j_m = j_n \cdot g$ e $f \cdot c(m) = c(n) \cdot t$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_m"'] & N \arrow[d, "j_n"] \\
c(M) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "c(m)"'] & c(N) \arrow[d, "c(n)"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Definições 0.5 *Sejam $(m : M \longrightarrow X) \in \mathcal{M}$ e $f \in \mathcal{X}(X, Y)$.*

(i) *Se $c(m) \cong m$, diz-se que m é c-*fechado.

(ii) *Se $c_X(m) \cong 1_X$, diz-se que m é c-*denso.

(iii) *Se $c_Y(f(1_X)) \cong 1_Y$ então a f chama-se* morfismo c-denso.

Proposição 0.6

(i) *A imagem inversa preserva subobjectos c-fechados.*

(ii) *A imagem directa através de elementos de $\mathcal{E}$ preserva subobjectos c-densos. Em particular os morfismos de $\mathcal{E}$ são c-densos.*

(iii) *A intersecção de subobjectos c-fechados é c-fechada.*

(iv) *A união de subobjectos c-densos é c-densa.*

Proposição 0.7 *Sejam $m, n \in \mathcal{M}$ e f, g dois morfismos de $\mathcal{X}$.*

(i) *Se $m \cdot n$ é c-fechado então m é c-fechado.*

(ii) *Se $f \cdot g$ é c-denso então f é c-denso.*

É por vezes conveniente considerar operadores de fecho com propriedades adicionais, de entre as quais vamos destacar quatro.

Definições 0.8 *Consideremos c um operador de fecho em $\mathcal{X}$.*

1. *c é* idempotente *se $c(c(m)) \cong c(m)$, para todo o $m \in \mathcal{M}$.*
2. *c é* fracamente hereditário *se $c_{c(M)}(j_m) \cong 1_{c(M)}$, para todo o morfismo $m : M \longrightarrow X$ em $\mathcal{M}$.*
3. *c é* hereditário *se $c_N(m) \cong n^{-1}(c_X(n \cdot m))$, para quaisquer morfismos $m : M \longrightarrow N$, $n : N \longrightarrow X$ em $\mathcal{M}$.*
4. *c é* produtivo *se $c_X(\prod_{i \in I} m_i) = \prod_{i \in I} c_{X_i}(m_i)$, para qualquer família $(m_i : M_i \longrightarrow X_i)_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{M}$, com $X = \prod_{i \in I} X_i$.*

Proposição 0.9 *Sejam c um operador de fecho em $\mathcal{X}$ e m, n elementos de $\mathcal{M}$.*

1. *Se c é idempotente e m, n são c-densos, então $m \cdot n$ é c-denso.*
2. *Se c é fracamente hereditário e m, n são c-fechados, então $m \cdot n$ é c-fechado.*
3. *Se c é hereditário e idempotente e $m \cdot n$ é c-denso, então n é c-denso.*

O conglomerado dos operadores de fecho $CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ em $\mathcal{X}$ em relação ao sistema de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é parcialmente ordenado por

$$c \leq d :\Leftrightarrow c(m) \leq d(m) \text{ para todo } m \in \mathcal{M},$$

com $c, d \in CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$.

O conglomerado $CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ tem ínfimos e supremos, a que chamaremos intersecção e união, respectivamente. Seja $(c_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de $CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$. A *intersecção de* $(c_i)_{i\in I}$ é definida por

$$(\bigwedge_{i\in I} c_i)(m) = \bigwedge_{i\in I} c_i(m) \quad \text{para todo } m \in \mathcal{M},$$

e a *união de* $(c_i)_{i\in I}$ é definida por

$$(\bigvee_{i\in I} c_i)(m) = \bigvee_{i\in I} c_i(m) \quad \text{para todo } m \in \mathcal{M}.$$

Capítulo 1

Conexões e desconexões

A partir deste capítulo, sempre que nos referirmos a uma subcategoria de $\mathcal{X}$, ela é uma subcategoria plena fechada para isomorfismos.

1.1 Morfismos constantes

Um conceito que vai ser importante neste trabalho é o conceito de morfismo constante. Existem várias abordagens a este assunto mas a que vamos usar ao longo do trabalho é um caso particular das noção usada em [18]. Comecemos por dar uma definição geral.

Definição 1.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de objectos de $\mathcal{X}$. Um* morfismo $f : X \longrightarrow Y$ *é* $\mathcal{C}$-constante *se a sua factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é feita através de um objecto de $\mathcal{C}$, ou seja, $f(X) \in \mathcal{C}$. Aos* objectos *de $\mathcal{C}$ chama-se* constantes.

Proposição 1.2

1. *Seja $f = m \cdot e$, com m em $\mathcal{M}$ e e em $\mathcal{E}$. Então f é constante se e só se m é constante se e só se e é constante.*
2. *Se, para um morfismo $m \in \mathcal{M}$, $m \cdot f$ é um morfismo constante, então f é constante.*
3. *Se, para um morfismo $e \in \mathcal{E}$, $f \cdot e$ é um morfismo constante, então f é constante.*

Estes resultados provam-se facilmente, usando a definição de sistema de factorização.

Em [5] são impostas as duas condições seguintes à classe $\mathcal{C}$ dos objectos constantes:

1. $\mathcal{C}$ é fechada para subobjectos, isto é, se $m : M \longrightarrow C$ pertence a $\mathcal{M}$ e C está em $\mathcal{C}$ então M pertence a $\mathcal{C}$.

2. $\mathcal{C}$ é fechada para imagens, isto é, se $e : C \longrightarrow X$ pertence a $\mathcal{E}$ e C está em $\mathcal{C}$ então X pertence a $\mathcal{C}$.

A proposição que se segue clarifica o papel destas condições.

Proposição 1.3 *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de constantes.*

1. *As seguintes condições são equivalentes:*
   (i) *$\mathcal{C}$ é fechada para subobjectos;*
   (ii) *Se $g : X \longrightarrow Y$ é um morfismo constante então $g \cdot f$ é constante, qualquer que seja o morfismo $f : Z \longrightarrow X$ de $\mathcal{X}$.*

2. *As seguintes condições são equivalentes:*
   (i) *$\mathcal{C}$ é fechada para imagens;*
   (ii) *Se $f : Z \longrightarrow X$ é um morfismo constante então $g \cdot f$ é constante, qualquer que seja o morfismo $g : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{X}$.*

Estes dois resultados demonstram-se essencialmente da mesma maneira. Por isso, apenas se inclui a demonstração de 1.

Demonstração: (i)$\Rightarrow$(ii) Seja $g : X \longrightarrow Y$ um morfismo constante. Logo a sua factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ faz-se através dum objecto $C \in \mathcal{C}$: $X \xrightarrow{e} C \xrightarrow{m} Y$. Considere-se ainda $g \cdot f = Z \xrightarrow{e_1} W \xrightarrow{m_1} Y$, onde m_1 está em $\mathcal{M}$ e e_1 em $\mathcal{E}$.

A propriedade da diagonalização garante a existência de um morfismo $t : W \longrightarrow C$ tal que $t \cdot e_1 = e \cdot g$ e $m \cdot t = m_1$.

Da igualdade $m \cdot t = m_1$ e do facto de $m, m_1 \in \mathcal{M}$, vem que t pertence a $\mathcal{M}$. Como $C \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada para subobjectos, W pertence a $\mathcal{C}$ e, consequentemente, $g \cdot f$ é um morfismo constante.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[dd, "m_1"] \arrow[ddl, "t"'] \\
X \arrow[d, "e"'] & \\
C \arrow[r, "m"] & Y
\end{tikzcd}$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Para $\mathcal{C}$ ser fechada para subobjectos temos que provar que, para $(m : M \longrightarrow C) \in \mathcal{M}$, se $C \in \mathcal{C}$ então $M \in \mathcal{C}$. O objecto M está em $\mathcal{C}$ se e só se m é constante, mas como 1_C é constante, usando (ii) concluímos que $m = m \cdot 1_C$ também é constante. ∎

Mesmo verificando estas duas condições, as classes de constantes podem afastar-se da noção intuitiva de constante.

Uma classe de constantes que surge naturalmente é a classe dos objectos pré-terminais. Repare-se que a classe dos pré-terminais é sempre fechada para subobjectos, não sendo no entanto em geral fechada para imagens. Pode-se assim estabelecer uma noção de morfismo constante aplicável a qualquer categoria e definida de maneira única, ou seja, não dependente de $\mathcal{C}$.

Para ver que $\mathcal{P}$ nem sempre é fechada para imagens, basta tomar o contra-exemplo da categoria fibrada $\mathcal{H}\mathrm{aus}/S^1$, onde $\mathcal{H}\mathrm{aus}$ representa os espaços topológicos de Hausdorff, S^1 representa a circunferência unitária em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}$ é a classe dos epimorfismos. Os objectos pré-terminais em $\mathcal{H}\mathrm{aus}/S^1$ são os monomorfismos de $\mathcal{H}\mathrm{aus}$, e os epimorfismos de $\mathcal{H}\mathrm{aus}/S^1$ contêm as imersões densas, que são os epimorfismos em $\mathcal{H}\mathrm{aus}$. Sejam $f :]0,1[\longrightarrow S^1$ e $g : [0,1] \longrightarrow S^1$ dois objectos de $\mathcal{H}\mathrm{aus}/S^1$ definidos da seguinte maneira $f(t) = g(t) = (\cos t, \sin t)$, para t no domínio da respectiva função. A imersão $e :]0,1[\longrightarrow [0,1]$ é densa, $f \in \mathcal{P}$, pois f é um monomorfismo, mas $g \notin \mathcal{P}$.

Quando $\mathcal{C} = \mathcal{P}$ escrevemos *constante* em vez de $\mathcal{P}$-constante; isto é, $f : X \longrightarrow Y$ é constante se a sua factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é feita através de um objecto pré-terminal.

Proposição 1.4 *Se, para uma monofonte $(m_i)_{i\in I}$, $m_i \cdot f$ é um morfismo constante para todo $i \in I$, então f é um morfismo constante.*

Demonstração: Consideremos o morfismo $f : X \longrightarrow Y$, a monofonte $(m_i : Y \longrightarrow Z_i)_{i\in I}$ e as factorizações $f = n \cdot e$ e $(m_i \cdot f = n_i \cdot e_i)_{i\in I}$, onde $n, n_i \in \mathcal{M}$ e $e, e_i \in \mathcal{E}$. A propriedade da diagonalização diz-nos que existem morfismos $(t_i : f(X) \longrightarrow (f \cdot m_i)(X))_{i\in I}$ tais que $t_i \cdot e = e_i$ e $n_i \cdot t_i = m_i \cdot n$ para todo $i \in I$. A fonte $(m_i \cdot n)_{i\in I}$ é uma monofonte porque $(m_i)_{i\in I}$ é uma monofonte e n é um monomorfismo, logo $(t_i)_{i\in I}$ também é uma monofonte.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddr, "e_i"'] & & Y \arrow[r, "m_i"] & Z_i \\
& f(X) \arrow[ur, "n"'] \arrow[d, "t_i"] & & \\
& (f \cdot m_i)(X) \arrow[uurr, "n_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se todos os morfismos $f \cdot m_i$ são constantes, isto é, $(f \cdot m_i)(X) \in \mathcal{P}$ para todo o $i \in I$, então $f(X) \in \mathcal{P}$ uma vez que $\mathcal{P}$ é fechada para monofontes. ■

Definições 1.5

1. *Uma* fonte $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ detecta constantes *se sempre que os morfismos $f_i \cdot g$ forem constantes para todo o i em I então o morfismo g também é constante* (ver [5]).
2. *Por outro lado diz-se que* constantes detectam monofontes *se as únicas fontes que detectam constantes são as monofontes.*

Para o caso em que a monofonte só tem um elemento, diz-se que as *constantes detectam monomorfismos* se os únicos morfismos que detectam constantes são os monomorfismos.

Pode-se dar uma definição dual para *cofontes que detectam constantes,* isto é, a cofonte $(f_i : X_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$ detecta constantes se, sempre que os morfismos $(g \cdot f_i)$ forem constantes para todo o i em I, então o morfismo g é constante.

Noutros contextos foram estudadas outras definições de morfismo constante, de entre as quais aqui vão ser referidas duas que têm uma relação mais directa com a noção de que já falámos.

Definição 1.6 *Um* morfismo $f : X \longrightarrow Y$ *é* constante segundo Herrlich[16] *se co-igualiza qualquer par de morfismos de codomínio* X; *isto é,* $f \cdot a = f \cdot b$, *para todos os morfismos* $a, b \in \mathcal{X}(A, X)$, $A \in \mathcal{X}$.

Proposição 1.7 *Se um morfismo é constante então é constante segundo Herrlich.*

Demonstração: Sejam $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo cuja factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é feita através dum objecto pré-terminal, $X \xrightarrow{e} P \xrightarrow{m} Y$, e $a, b : A \longrightarrow X$ dois morfismos de $\mathcal{X}$. Logo $f \cdot a = m \cdot e \cdot a = m \cdot e \cdot b = f \cdot b$, uma vez que $e \cdot a = e \cdot b$ por P ser pré-terminal.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & Y \\
& & P \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

■

Apesar de na Proposição 1.7 considerarmos a classe de constantes $\mathcal{P}$, existe no entanto um outro resultado que nos permite determinar as outras classes de constantes para as quais a proposição ainda é válida.

Proposição 1.8 *As duas afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) *Todo o morfismo* $\mathcal{C}$*-constante co-igualiza qualquer par de morfismos.*

(ii) *Todo o objecto de* $\mathcal{C}$ *é pré-terminal* ($\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$).

Demonstração: Se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ então sai de imediato da Proposição 1.7 que todo o morfismo $\mathcal{C}$-constante co-iguala qualquer par de morfismos.

Para provar o recíproco consideram-se $C \in \mathcal{C}$ e $u, v : X \longrightarrow C$. Como 1_C é um morfismo $\mathcal{C}$-constante, por hipótese 1_C co-iguala u e v, o que significa que C está em $\mathcal{P}$. ■

Vamos agora referir a noção de morfismo constante introduzida por Tholen em [22], mas apenas para uma categoria $\mathcal{X}$ que seja $\mathcal{E}$-cocompleta.

Para tal é preciso considerar o colimite $\eta_X : X \longrightarrow TX$ da fonte de todos os morfismos em $\mathcal{E}$ com domínio X, que ainda pertence a $\mathcal{E}$.

Definição 1.9 *Um* morfismo $f : X \longrightarrow Y$ *é* constante segundo Tholen *se existe um morfismo* d *tal que* $f = d \cdot \eta_X$*.*

Proposição 1.10 *Consideremos a classe de constantes definida por* $\mathcal{C} = \{X \mid (\forall e : X \to Y), e \in \mathcal{E} \Rightarrow e \in Iso(\mathcal{X})\}$*. O morfismo* f *é* $\mathcal{C}$*-constante se e só se é constante segundo Tholen.*

Demonstração: Se f se factoriza através de um objecto $C \in \mathcal{C}$ então por

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddr, "\eta_X"'] & & Y \\
& C \arrow[ur, "m"'] \arrow[d, "g"] & \\
& TX &
\end{tikzcd}$$

definição de colimite existe $g : C \longrightarrow TX$ tal que $g \cdot e = \eta_X$. Logo g é um morfismo de $\mathcal{E}$ e, consequentemente, g é um isomorfismo. Portanto $f = (m \cdot g^{-1}) \cdot \eta_X$, o que prova a primeira implicação.

Considere-se agora $f = d \cdot \eta_X = m \cdot e$, onde $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}$. Usando a propriedade da diagonalização, prova-se que existe $a : TX \longrightarrow f(X)$ tal que $a \cdot \eta_X = e$. Como η_X é o colimite de todos os morfismos com codomínio X, existe $t : f(X) \longrightarrow TX$ tal que $t \cdot e = \eta_X$. Verifica-se facilmente que $t = a^{-1}$, portanto $TX \cong f(X)$. Agora, para completar a prova, basta ver que TX pertence a $\mathcal{C}$.

Seja $e : TX \longrightarrow Z$ um morfismo de $\mathcal{E}$. Como $e \cdot \eta_X$ ainda pertence a $\mathcal{E}$, existe $h : Z \longrightarrow TX$ tal que $h \cdot e \cdot \eta_X = \eta_X$. Então $h \cdot e = 1_{TX}$ por definição de colimite. Em suma, e é um isomorfismo porque é um epimorfismo e tem inverso à esquerda. ■

Para uma categoria com objecto terminal 1, η_X não é mais do que a imagem de 1_X através do único morfismo de X para 1.

Neste caso o objecto TX é pré-terminal e portanto, se f é constante segundo Tholen, então também é $\mathcal{P}$-constante, usando de novo o facto de TX ser isomorfo a $f(X)$.

1.2 Subcategorias constantes

Alguns dos resultados sobre subcategorias constantes, que vamos apresentar nesta secção e nas seguintes, não dependem da definição de morfismo constante que escolhemos.

Nos resultados desta secção e das duas seguintes segue-se basicamente [4], se bem que alguns resultados também estejam em [18].

A classe dos morfismos constantes vai servir para definir duas subcategorias de $\mathcal{X}$ associadas a cada subcategoria de $\mathcal{X}$.

Definição 1.11 *As* subcategorias constantes à direita e à esquerda de $\mathcal{X}$ definidas por $\mathcal{A}$ *são as subcategorias formadas pelos seguintes objectos, respectivamente:*

$$r(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{X} \mid (\forall A \in \mathcal{A})\ f \in \mathcal{X}(A, X) \Longrightarrow f \textit{ é constante}\} \textit{ e}$$

$$l(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{X} \mid (\forall A \in \mathcal{A})\ g \in \mathcal{X}(X, A) \Longrightarrow g \textit{ é constante}\}.$$

Diz-se que uma subcategoria $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$ é *constante à direita (à esquerda)* se $\mathcal{B}$ for igual a $r(\mathcal{A})$ ($l(\mathcal{A})$, respectivamente) para alguma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$.

Ficou assim definida uma correspondência de Galois para subcategorias de $\mathcal{X}$, segundo a definição de [9]. Os resultados da proposição seguinte são gerais para correspondências de Galois, dos quais o terceiro é uma consequência imediata dos anteriores.

Proposição 1.12 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ subcategorias de $\mathcal{X}$.*

1. *Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ então $l(\mathcal{B}) \subseteq l(\mathcal{A})$ e $r(\mathcal{B}) \subseteq r(\mathcal{A})$.*
2. *$\mathcal{A} \subseteq rl(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A} \subseteq lr(\mathcal{A})$.*
3. *$\mathcal{A}$ é constante à direita se e só se $\mathcal{A} = rl(\mathcal{A})$ e é constante à esquerda se e só se $\mathcal{A} = lr(\mathcal{A})$.*

Em [2] estuda-se o caso em que $\mathcal{X}$ é a categoria dos espaços topológicos[1], que inspira alguns resultados da teoria geral, e do qual veremos exemplos no último capítulo.

Proposição 1.13

1. *As subcategorias constantes à direita são fechadas para fontes que detectam constantes. Em particular são fechadas para monofontes e portanto para limites.*
2. *As subcategorias constantes à esquerda são cofechadas para cofontes que detectam constantes. Em particular são fechadas para imagens.*

Demonstração: Provemos apenas 1, uma vez que as duas provas são duais. Seja $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$ uma fonte que detecta constantes, com $Y_i \in r(\mathcal{A})$ para todo $i \in I$, e seja $g : A \longrightarrow X$ em que $A \in \mathcal{A}$. Como os objectos Y_i pertencem a $r(\mathcal{A})$, os morfismos $f_i \cdot g$ são constantes, e, consequentemente, g é constante pela definição de fonte que detecta constantes. Conclui-se assim que X está em $r(\mathcal{A})$. ■

[1]Nos espaços topológicos às subcategorias constantes à esquerda e à direita chama-se conexões e desconexões, respectivamente.

Proposição 1.14 *Para uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{A}$ é constante à direita;*

(ii) *$A \in \mathcal{A}$ se e só se, para cada morfismo $m : X \longrightarrow A$ em $\mathcal{M}$, se $X \in l\mathcal{A}$ então m é constante.*

Demonstração: Comecemos por considerar uma subcategoria $\mathcal{A}$ constante à direita. Se $A \in \mathcal{A}$ então $m : X \longrightarrow A$ é constante para $X \in l(\mathcal{A})$. Seja agora $f : X \longrightarrow A$ um morfismo de domínio em $l(\mathcal{A})$ com $f = m \cdot e$, $m \in \mathcal{M}$ e $e \in \mathcal{E}$. O objecto $f(X) \in l(\mathcal{A})$ porque as subcategorias constantes à esquerda são fechadas para imagens. Se m for constante, então por 1.2, f é constante e portanto $A \in rl(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, já que $\mathcal{A}$ é constante à direita.

Para provar a outra implicação tomemos uma subcategoria $\mathcal{A}$ nas condições de (ii). $\mathcal{A}$ é constante à direita se $rl(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Se $A \in rl(\mathcal{A})$ então todo o morfismo $m : X \longrightarrow A$ em $\mathcal{M}$, com $X \in l(\mathcal{A})$ é constante e de (ii) vem que $A \in \mathcal{A}$. ∎

Proposição 1.15 *Para uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{A}$ é constante à esquerda;*

(ii) *$A \in \mathcal{A}$ se e só se para cada morfismo $e : A \longrightarrow Y$ em $\mathcal{E}$, se $Y \in r\mathcal{A}$ então e é constante.*

A demonstração desta proposição é semelhante à demonstração anterior.

As proposições 1.14 e 1.15 são generalizações dos teoremas 2.1 e 3.1 de [2] e estão em [4].

Proposição 1.16 *Seja $\mathcal{P}$ fechada para imagens. Para uma subcategoria reflectiva $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, com reflexões $(\rho_X : X \to RX)_{X \in \mathcal{X}}$,*

$$l(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{X} \,|\, \rho_X \text{ é constante}\}.$$

Demonstração: Se $X \in l(\mathcal{A})$ então é imediato que ρ_X é constante. Sejam agora $\rho_X : X \to RX$ constante e $f : X \to A$ um morfismo de codomínio $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é reflectiva, existe $g : RX \to A$ tal que $f = g \cdot \rho_X$ e finalmente, pela Proposição 1.3(2), f é constante. ∎

Proposição 1.17 *Para uma subcategoria correflectiva $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$,*

$$r(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{X} \,|\, \varepsilon_X \text{ é constante}\},$$

onde $\varepsilon_X : CX \to X$ é a correflexão de X em $\mathcal{A}$.

A demonstração faz-se de modo análogo à da proposição anterior.

Proposição 1.18 *Sejam $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ e $\mathcal{A}$ subcategorias de $\mathcal{X}$.*

1. *$\mathcal{P} \subseteq r(\mathcal{A})$ e, se $\mathcal{P}$ é fechada para imagens, então $\mathcal{P} \subseteq l(\mathcal{A})$.*
2. *$\mathcal{A} \cap r(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{P}$ e $\mathcal{A} \cap l(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{P}$.*
3. *$r(\mathcal{A}) \cap lr(\mathcal{A}) = \mathcal{P}$, se $\mathcal{P}$ é fechada para imagens.*
4. *$\bigcap_{i\in I} r(\mathcal{A}_i)$ é constante à direita e $\bigcap_{i\in I} l(\mathcal{A}_i)$ é constante à esquerda.*

Demonstração: Para provar 1 basta atender à definição de subcategoria constante, para provar 2 usa-se o morfismo identidade e 3 resulta das duas primeiras.

Para provar 4, considera-se $\mathcal{D} = \bigcap_{i\in I} r(\mathcal{A}_i)$. Para mostrar que $\mathcal{D}$ é constante à direita basta verificar que $rl(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.

Como $\mathcal{D} \subseteq r(\mathcal{A}_i)$ para todo $i \in I$, usando a Proposição 1.12 tem-se que $rl(\mathcal{D}) \subseteq rlr(\mathcal{A}_i) = r(\mathcal{A}_i)$, para todo i em I. O que equivale a dizer que $rl(\mathcal{D}) \subseteq \bigcap_{i\in I} r(\mathcal{A}_i) = \mathcal{D}$. Para a intersecção de constantes à esquerda, a demonstração é análoga. ■

1.3 Subcategorias constantes à direita

Proposição 1.19 *Suponhamos que as constantes detectam monomorfismos. Então toda a subcategoria extremal-epirreflectiva $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ com reflexões estáveis para produtos fibrados ao longo de pré-pontos é constante à direita* (Prop. 2.4-[4]).

Demonstração: Seja $X \in rl(\mathcal{A})$ e seja $\rho_X : X \longrightarrow RX$ a sua reflexão em $\mathcal{A}$. Se ρ_X for um isomorfismo então $X \cong RX$ está em $\mathcal{A}$. Como ρ_X é um epimorfismo extremal, basta que ele seja um monomorfismo para ser um isomorfismo.

Vejamos então que ρ_X detecta constantes. Seja $c : P \longrightarrow RX$ um pré-ponto de RX. O morfismo $f : \rho_X^{-1}(P) \longrightarrow P$, que resulta do produto fibrado de ρ_X através de c, é uma reflexão por hipótese e o seu codomínio é um objecto pré-terminal, logo f é constante uma vez que f, por ser um epimorfismo extremal, pertence a $\mathcal{E}$. Isto significa, pela Proposição 1.16, que $\rho_X^{-1}(P) \in l(\mathcal{A})$ e consequentemente $\rho_X^{-1}(c) : \rho_X^{-1}(P) \longrightarrow X$ é constante. Para ver que ρ_X detecta constantes, considera-se agora $\rho_X \cdot g = c \cdot e$ constante, onde c está em $\mathcal{M}$ e e está em $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "e"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& \rho_X^{-1}(P) \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\rho_X^{-1}(c)"] & P \arrow[d, "c"] \\
& X \arrow[r, "\rho_X"] & RX
\end{tikzcd}$$

A propriedade universal dos produtos fibrados garante a existência de um morfismo t tal que $g = \rho_X^{-1}(c) \cdot t$ e, pela Proposição 1.3(1), sai de imediato que g é constante. ∎

Definição 1.20 ([5]) *A subcategoria $\mathcal{A}$ é* fechada superiormente *se X é um objecto de $\mathcal{A}$ sempre que exista um morfismo $f : X \longrightarrow A$ com $A \in \mathcal{A}$, tal que, para todo $c \in \mathrm{ppt}A$, o domínio de $f^{-1}(c)$ esteja em $\mathcal{A}$.*

A proposição que se segue foi provada em [5].

Proposição 1.21 *Toda a subcategoria constante à direita é fechada superiormente.*

Demonstração: Tomemos $\mathcal{A}$ constante à direita, $A \in \mathcal{A}$, $f : X \longrightarrow A$ e $g : Z \longrightarrow X$ com $Z \in l(\mathcal{A})$. Por conseguinte $f \cdot g$ é um morfismo constante; logo $f \cdot g = c \cdot e$ com $c : P \longrightarrow A$ um morfismo de $\mathcal{M}$ e e em $\mathcal{E}$.

Consideremos $g = m' \cdot e'$ a factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de g. Logo $(f \cdot m') \cdot e' = c \cdot e$ e a propriedade da diagonalização garante a existência de $t : g(Z) \longrightarrow P$, com $t \cdot e' = e$ e $c \cdot t = f \cdot m'$. Considerando o produto fibrado de c ao longo de f e usando, de seguida, a propriedade universal dos produtos fibrados, conclui-se que existe um morfismo h em $\mathcal{M}$ de $g(Z)$ para $f^{-1}(P)$.

$$
\begin{tikzcd}
g(Z) \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "t"] \arrow[ddr, "m'"'] & & Z \arrow[ll, "e'"'] \arrow[d, "e"] \\
& f^{-1}(P) \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}(c)"] & P \arrow[d, "c"] \\
& X \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}
$$

Considere-se $f^{-1}(P) \in \mathcal{A}$. As subcategorias constantes à direita são fechadas para morfismos em $\mathcal{M}$ e existe um morfismo em $\mathcal{M}$ de $g(Z)$ para $f^{-1}(P)$, logo $g(Z) \in \mathcal{A}$. Portanto $e' : Z \longrightarrow g(Z)$ é constante, pois $Z \in l(\mathcal{A})$, o que faz com que g seja constante, e portanto $X \in rl(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, por $\mathcal{A}$ ser constante à direita. Completa-se assim a prova de que $\mathcal{A}$ é fechada superiormente. ∎

Este resultado é de grande utilidade, pois por vezes é bastante mais fácil verificar se uma subcategoria é fechada superiormente do que se é constante à direita, o que permite em alguns casos descobrir subcategorias que não são constantes à direita.

1.4 Subcategorias constantes à esquerda

Definição 1.22 *Diz-se que a subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ é q-reversível se, para todo o epimorfismo regular $f : X \longrightarrow A$ com $A \in \mathcal{A}$ tal que, para $a \in \mathrm{pt}A$, o domínio de $f^{-1}(a)$ está em $\mathcal{A}$, então $X \in \mathcal{A}$.*

Proposição 1.23 *Se $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes então toda a subcategoria constante à esquerda é q-reversível.*

Demonstração: Um epimorfismo regular $f : X \longrightarrow A$ é o co-igualizador de dois morfismos $u, v : W \longrightarrow X$. Tomando $A \in \mathcal{A}$ e $f^{-1}(1) \in \mathcal{A}$, onde $f^{-1}(1)$ representa o domínio da imagem inversa de um (qualquer) ponto de A, para $\mathcal{A}$ ser q-reversível temos que provar que $X \in \mathcal{A} = lr\mathcal{A}$.

Considera-se um morfismo $g : X \longrightarrow Z$, com $Z \in r\mathcal{A}$. De seguida, vamos ver que $g \cdot u = g \cdot v$, e para tal basta que $g \cdot u \cdot w = g \cdot v \cdot w$ para todo o $w \in \mathrm{pt}W$, porque $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes, e, consequentemente, os pontos detectam monofontes (Prop. 0.2). O domínio de $a := (f \cdot u)(w) = (f \cdot v)(w)$ é terminal ($a : 1 \longrightarrow A$), pois a imagem de um objecto terminal é um objecto terminal. Por hipótese $f^{-1}(1) \in \mathcal{A}$ e, consequentemente, $g \cdot f^{-1}(a)$ é constante.

Pela propriedade universal dos produtos fibrados, sabemos que existem dois morfismos, u' e v', tais que:

$$u \cdot w = f^{-1}(a) \cdot u' \text{ e } v \cdot w = f^{-1}(a) \cdot v'.$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u'"] \arrow[ddr] & W \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] & A \\
& f^{-1}(1) \arrow[ur, "f^{-1}(a)"] \arrow[d] & & \\
& f \cdot u(1) \cong 1 \arrow[uurr, "a := (f \cdot u)(w)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Deste modo $g \cdot u \cdot w = g \cdot f^{-1}(a) \cdot u'$ e $g \cdot v \cdot w = g \cdot f^{-1}(a) \cdot v'$. De $g \cdot f^{-1}(a)$ ser constante vem que $g \cdot u \cdot w = g \cdot v \cdot w$, e por isso $g \cdot u = g \cdot v$.

Como $f = \mathrm{coig}(u, v)$, existe $h : A \longrightarrow Z$ tal que $g = h \cdot f$. Finalmente, h é constante porque $A \in \mathcal{A}$ e $Z \in r\mathcal{A}$ e portanto g é constante, por 1.3(1). ■

Corolário 1.24 *Seja $\mathcal{X}$ uma categoria com pontos suficientes.*

Se A pertence a uma subcategoria $\mathcal{A}$ constante à esquerda, então A^2 pertence a $\mathcal{A}$.

Demonstração: Seja $a : 1 \longrightarrow A$ um ponto de A. A projecção $p : A^2 \longrightarrow A$ tem inverso à esquerda e portanto é um epimorfismo regular. O domínio de $p^{-1}(a) \cong 1_A \times a$ é isomorfo a $A \in \mathcal{A}$. Pela proposição anterior sabemos que $\mathcal{A}$ é q-reversível e portanto $A^2 \in \mathcal{A}$, por ser o domínio de p. ■

$$\begin{tikzcd}
A \times 1 \arrow[r] \arrow[d, "1_A \times a"'] & 1 \arrow[d, "a"] \\
A \times A \arrow[r, "p"] & A
\end{tikzcd}$$

Se $(f_i = m_i \cdot e_i)_{i \in I}$ forem as factorizações dos morfismos da cofonte $(f_i)_{i \in I}$ então ela detecta constantes se e só se a cofonte $(m_i)_{i \in I}$ detectar constantes.

Em [4] temos o seguinte resultado.

Proposição 1.25 *Se uma cofonte em* $\mathbb{E}$ *tem um ponto em comum então detecta constantes.*

Demonstração: Pelo que ficou dito, basta considerar uma cofonte $(m_i : M_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ com $m_i \in \mathcal{M}$. Toma-se o ponto comum $x : 1 \longrightarrow X$ e portanto existem $x_i : 1 \longrightarrow M_i$ tais que $x = m_i \cdot x_i$ para todo o i em I. Considere-se um morfismo $g : X \xrightarrow{e} g(X) \xrightarrow{m} Y$, para o qual $g \cdot m_i$ é constante para todo $i \in I$.

O nosso objectivo é provar que g é constante, ou, equivalentemente, que $g(X)$ é um objecto pré-terminal.

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "m_i"] \arrow[dd, "e_i"'] & & X \arrow[r, "g"] \arrow[ddr, "e"] & Y \\
& 1 \arrow[ul, "x_i"'] \arrow[ur, "x"] \arrow[dl, "e_i \cdot x_i"] \arrow[drr, "e \cdot x"] & & \\
P_i \arrow[rrr, "c_i"'] & & & g(X) \arrow[uu, "m"']
\end{tikzcd}$$

Os morfismos $e \cdot m_i$ são constantes, e portanto factorizam-se através de objectos $P_i \in \mathcal{P}$ $(e \cdot m_i : M_i \xrightarrow{e_i} P_i \xrightarrow{c_i} g(X))_{i \in I}$. Mas existem morfismos $e_i \cdot x_i$ de 1 para P_i, o que torna cada $e_i \cdot t_i$ um isomorfismo. Todos os morfismos cujo o domínio é 1 estão em $\mathcal{M}$, logo $e \cdot x \in \mathcal{M}$.

Podemos então concluir que $c_i \cong e \cdot x$ para todo $i \in I$ e que $(e \cdot m_i = (e \cdot x) \cdot (e_i \cdot t_i)^{-1} \cdot e_i)_{i \in I}$. Como $(m_i)_{i \in I} \in \mathbb{E}$, existe portanto $k : X \longrightarrow 1$ tal que $(e \cdot x) \cdot k = e$. O morfismo $e \cdot x \in \mathcal{E}$ porque tanto e como k estão em $\mathcal{E}$. Ou seja, $e \cdot x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{E}$, o que o torna um isomorfismo. ■

Definição 1.26 ([24]) *Uma subcategoria de $\mathcal{X}$ é uma* subcategoria componente *se é fechada para cofontes em $\mathcal{X}$ que detectam constantes.*

Definição 1.27 ([7]) *Uma subcategoria de $\mathcal{X}$ é* 2-aditiva *se é fechada para cofontes em $\mathbb{E}$ com um ponto em comum.*

Pela Proposição 1.25, é evidente que se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria componente então é 2-aditiva.

Proposição 1.28 *Toda a subcategoria constante à esquerda é uma subcategoria componente.*

A demonstração é imediata a partir da Proposição 1.13.

Corolário 1.29 *Toda a subcategoria constante à esquerda é 2-aditiva.*

Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria 2-aditiva, pode-se formar a componente em $\mathcal{A}$ do ponto x de X :

$$comp_X^{\mathcal{A}}(x) := \bigvee\{m : A \longrightarrow X \mid m \in \mathcal{M},\ x \leq m \text{ e } A \in \mathcal{A}\}.$$

A componente está em $\mathcal{A}$ porque a cofonte induzida pela união está em $\mathbb{E}$, e neste caso tem x como ponto comum.

Os conceitos de subcategoria componente, 2-aditiva ou q-reversível servem, neste contexto, essencialmente para mostrar que certas subcategorias não são constantes à esquerda, usando para tal as Proposições 1.23 e 1.28.

Capítulo 2

Subcategorias delta e nabla

Ao longo de todo este capítulo $c = (c_X)_{X \in \mathcal{X}}$ é um operador de fecho em $\mathcal{X}$, em relação à factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

2.1 Objectos separados

Os resultados desta secção e das duas seguintes estão essencialmente em [6], [7], [13] e [15].

Ao morfismo $\delta_X :=< 1_X, 1_X >: X \longrightarrow X^2$ induzido por 1_X no produto chama-se *morfismo diagonal.*

Definição 2.1 *Um* objecto X *de* $\mathcal{X}$ *é* separado em relação a c *(ou abreviadamente c-separado) se* $c_{X^2}(\delta_X) = \delta_X$.

Definição 2.2 *À subcategoria* $\Delta(c)$ *dos objectos c-separados de* $\mathcal{X}$ *chama-se* subcategoria delta *induzida por* c; *isto é,*

$$\Delta(c) = \{X \mid c(\delta_X) = \delta_X\}.$$

Proposição 2.3 *Um objecto* X *de* $\mathcal{X}$ *é c-separado se e só se, para todos os morfismos* $f, g : Y \longrightarrow X$ *em* $\mathcal{X}$ *e* $m : M \longrightarrow Y$ *em* $\mathcal{M}$, *se tem que* $f \cdot c(m) = g \cdot c(m)$ *quando* $f \cdot m = g \cdot m$.

Demonstração: Sejam X um objecto c-separado e $f \cdot m = g \cdot m$, com m, f e g nas condições do enunciado da proposição.

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "<f,g>"'] \arrow[dr, shift left, "g"] \arrow[dr, shift right, "f"'] & \\
M \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "<f,g>\cdot m"] \arrow[dr, "f\cdot m = g\cdot m"'] & X^2 \arrow[r, "p_i"] & X \\
& X \arrow[u, "\delta_X"'] \arrow[ur, "1_X"'] &
\end{tikzcd}
$$

Da definição de produto vem que existe $< f, g >: Y \longrightarrow X \times X$, tal que $p_1\cdot < f, g >= f$ e $p_2\cdot < f, g >= g$ onde $p_1, p_2 : X \times X \longrightarrow X$ são as projecções. De seguida tem-se que $< f, g > \cdot m = \delta_X \cdot (f \cdot m)$, uma vez que $p_1\cdot < f, g > \cdot m = f \cdot m = p_1 \cdot \delta_X \cdot (f \cdot m)$ e $p_2\cdot < f, g > \cdot m = g \cdot m = p_2 \cdot \delta_X \cdot (f \cdot m)$. Pela propriedade 0.4 existe $t : c(M) \longrightarrow X \cong c_{X^2}(X)$ com $\delta_X \cdot t =<f, g> \cdot c(m)$. Finalmente $f \cdot c(m) = p_1\cdot <f, g> \cdot c(m) = p_1 \cdot \delta_X \cdot t = t$ e, da mesma maneira, $g \cdot c(m) = t$, o que completa a demonstração de uma das implicações.

Para mostrar a implicação contrária, faz-se $m := \delta_X$, $f := p_1$ e $g := p_2$. Como $p_1 \cdot \delta_X = p_2 \cdot \delta_X$, tem-se que por hipótese $p_1 \cdot c(\delta_X) = p_2 \cdot c(\delta_X)$. Agora, o facto de δ_X ser o igualizador de p_1 e p_2 obriga a que $c(\delta_X) \leq \delta_X$. Consequentemente $c(\delta_X) \cong \delta_X$ e portanto X é c-separado. ∎

Proposição 2.4 *Para todo o operador de fecho c na categoria $\mathcal{X}$, a subcategoria $\Delta(c)$ é fechada para monofontes em $\mathcal{X}$; em particular $\Delta(c)$ é fechada para limites.*

Demonstração: Consideremos a monofonte $(a_i : X \longrightarrow X_i)_{i\in I}$, com $X_i \in \Delta(c)$ para todo o $i \in I$. Sejam agora $f, g : Y \longrightarrow X$ e $m : M \longrightarrow Y$ com m em $\mathcal{M}$. Se $f \cdot m = g \cdot m$ então $(a_i \cdot f) \cdot m = (a_i \cdot g) \cdot m$. Como $X_i \in \Delta(c)$, da proposição anterior vem que $a_i \cdot f \cdot c(m) = a_i \cdot g \cdot c(m)$. Finalmente, por

$(a_i)_{i\in I}$ ser uma monofonte $f \cdot c(m) = g \cdot c(m)$, o que quer dizer que X está em $\Delta(c)$, usando novamente a mesma proposição. ■

2.2 Operador de fecho regular

Associado a cada subcategoria de $\mathcal{X}$ está um operador de fecho idempotente, designado por *operador de fecho regular.*

Definição 2.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$. O operador de fecho $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} := (\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X)_{X\in\mathcal{X}}$ é o operador de fecho regular de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$ e define-se localmente da seguinte maneira:*

$$\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X(m) := \bigwedge\{h^{-1}(\delta_A) \,|\, h : X \longrightarrow A^2, A \in \mathcal{A} \text{ e } h(m) \leq \delta_A\}.$$

Proposição 2.6 *Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria de $\mathcal{X}$, então o operador de fecho $(c_X)_{X\in\mathcal{X}}$ definido por*

$$c_X(m) = \bigwedge\{\mathrm{ig}(f,g) \,|\, f,g : X \longrightarrow A, A \in \mathcal{A} \text{ e } f \cdot m = g \cdot m\}$$

é o operador de fecho regular de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$.

Demonstração: Para $h : X \longrightarrow A^2$, $A \in \mathcal{A}$ e $h(m) \leq \delta_A$, é fácil ver que $h^{-1}(\delta_A)$ é o igualizador de $p_1 \cdot h$ e $p_2 \cdot h$, o que resulta de δ_A ser o igualizador de p_1 e p_2 e da definição de imagem inversa. Por outro lado, como $h(m) \leq \delta_A$, existe t tal que $h(m) = \delta_A \cdot t$. Nestas condições temos que $p_1 \cdot h \cdot m = p_1 \cdot h(m) \cdot e = p_1 \cdot \delta_A \cdot t \cdot e = t \cdot e$, com $e : M \to h(M)$ em $\mathcal{E}$, e, do mesmo modo, $p_2 \cdot h \cdot m = t \cdot e$. Assim, concluímos que $c_X(m) \leq \mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X(m)$.

Sejam agora $f, g : X \longrightarrow A$, $A \in \mathcal{A}$ e $<f,g>: X \longrightarrow A^2$ o morfismo que o par (f, g) induz no produto.

Para mostrar que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X(m) \leq c_X(m)$, vamos ver que se escolhermos $h =< f, g >$, então $h^{-1}(\delta_A) \cong \mathrm{ig}(f, g)$ e $h(m) \leq \delta_A$. Como vimos atrás, $<f,g>^{-1} (\delta_A) \cong \mathrm{ig}(p_1\cdot <f,g>, p_2\cdot <f,g>) = \mathrm{ig}(f,g)$.

Finalmente falta mostrar que $<f,g> (m) \leq \delta_A$. Mas como $f \cdot m = g \cdot m$, da definição de igualizador conclui-se que $m \leq \mathrm{ig}(f,g) \cong< f,g >^{-1} (\delta_A)$.

Logo $<f,g>(m) \leq <f,g>(<f,g>^{-1}(\delta_A)) \leq \delta_A$. As duas desigualdades concluem a prova. ■

A Proposição 2.6 dá-nos outra forma de determinar o operador de fecho regular.

Esta é a primeira definição que foi dada (para mais pormenores sobre esta abordagem, consultar [13]).

O conglomerado dos operadores de fecho $CL(\mathcal{X},\mathcal{M})$ numa categoria $\mathcal{X}$ em relação a uma factorização $(\mathcal{E},\mathcal{M})$, e o conglomerado $SUB(\mathcal{X})$ das subcategorias plenas de $\mathcal{X}$ formam dois conglomerados parcialmente ordenados. O operador de fecho regular e o operador Δ definem functores entre $CL(\mathcal{X},\mathcal{M})$ e $SUB(\mathcal{X})^{op}$. Mais concretamente, se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} \geq \mathrm{reg}^{\mathcal{B}}$ e, se $c \leq d$, então $\Delta(c) \supseteq \Delta(d)$, onde $\mathcal{A},\mathcal{B}$ são subcategorias de $\mathcal{X}$ e c,d são operadores de fecho em $\mathcal{X}$ relativamente à factorização $(\mathcal{E},\mathcal{M})$.

Proposição 2.7 *O functor Δ é o adjunto à esquerda de* reg.

Demonstração: Para demonstrar a existência desta adjunção, vamos demonstrar duas desigualdades que, em conjunto, lhe são equivalentes.

Para $\mathcal{A} \in SUB(\mathcal{X})$ e $c \in CL(\mathcal{X},\mathcal{M})$:

1. $\mathcal{A} \subseteq \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$;

2. $c \leq \mathrm{reg}^{\Delta(c)}$.

Para provar 1 , toma-se X como um objecto de $\mathcal{A}$. Da definição de operador de fecho regular vem que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X(\delta_X) \leq h^{-1}(\delta_A)$, onde $A \in \mathcal{A}$, h é um morfismo de X^2 em A^2 e $h(\delta_X) \leq \delta_A$. Fazendo $A = X$ e $h = 1_{X^2}$ (obviamente $1_{X^2}(\delta_X) \leq \delta_X$), conclui-se que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X(\delta_X) \leq 1^{-1}_{X^2}(\delta_X) \cong \delta_X$; isto é, X está em $\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$.

Vamos agora mostrar 2 . Sejam $m : M \longrightarrow X$ um morfismo em $\mathcal{M}$ e $h : X \longrightarrow A^2$ com $A \in \Delta(c)$ e $h(m) \leq \delta_A$.

Pela continuidade do operador de fecho, $h(c(m)) \leq c(h(m))$. Por outro lado $h(m) \leq \delta_A = c(\delta_A)$ pois A é c-separado. Conjugando as duas desigualdades resulta que $h(c(m)) \leq \delta_A$, e, aplicando a imagem inversa de h a ambos os membros da desigualdade, fica $c(m) \leq h^{-1}(h(c(m))) \leq h^{-1}(\delta_A)$. Provou-se assim que $c(m) \leq h^{-1}(\delta_A)$ para todo o m em $\mathcal{M}$ e todo o A em $\Delta(c)$. Portanto, pela definição de operador de fecho regular, $c(m) \leq \mathrm{reg}^{\Delta(c)}(m)$ para todo o m em $\mathcal{M}$. ∎

Atendendo a esta proposição, prova-se facilmente o seguinte corolário.

Corolário 2.8 *Para cada subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ têm-se as seguintes igualdades:*

$$\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} = \mathrm{reg}^{\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})} \quad e \quad \Delta(c) = \Delta(\mathrm{reg}^{\Delta(c)}).$$

O Corolário 2.8 diz-nos que todas as subcategorias delta são induzidas por um operador de fecho regular e *vice-versa*.

Outro facto que é equivalente à adjunção $\Delta \dashv \mathrm{reg}$, e que vai ser utilizado a seguir, é o seguinte:

$$\mathcal{A} \subseteq \Delta(c) \Longleftrightarrow c \leq \mathrm{reg}^{\mathcal{A}}. \qquad (*)$$

Este resultado vai-nos servir para provar que as subcategorias delta e os operadores de fecho regulares são fechados para a intersecção.

Corolário 2.9 *Sejam $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de $SUB(\mathcal{X})$ e $(c_j)_{j\in J}$ uma família de elementos de $CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$. Verificam-se as seguintes igualdades:*

1. $\mathrm{reg}^{(\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i)} = \bigwedge_{i\in I} reg^{\mathcal{A}_i}$
2. $\Delta(\bigvee_{j\in J} c_j) = \bigcap_{j\in J} \Delta(c_j)$.

Demonstração: 1. Atendendo a que o functor reg inverte a ordem, de $\mathcal{A}_i \subseteq \bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i$ conclui-se que $\mathrm{reg}^{(\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i)} \leq \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}$, para todo o i em I. Isto significa que $\mathrm{reg}^{(\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i)} \leq \bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}$.

Como $\bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i} \leq \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}$, $\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}) \subseteq \Delta(\bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})$, para todo $i \in I$. Por outro lado, pela adjunção (2.7), $\mathcal{A}_i \subseteq \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})$. Em conclusão, $\mathcal{A}_i \subseteq \Delta(\bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})$ para todo o $i \in I$, donde $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \subseteq \Delta(\bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})$.

Pelo resultado de $(*)$, $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \subseteq \Delta(\bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})$ se e só se $\mathrm{reg}^{(\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i)} \geq \bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}$, o que completa a demonstração de 1 .

Para 2 a demonstração é análoga. ■

Este corolário fala-nos das intersecções de subcategorias delta ou de operadores de fecho regulares. Parece assim pertinente ver o que acontece para os casos da união. Para tal, como já vimos, basta considerar as subcategorias delta originadas por operadores de fecho regulares e os operadores de fecho regulares originados por subcategorias delta.

Corolário 2.10 *Vamos considerar os operadores de fecho $(c_i)_{i\in I}$ e c, e as subcategorias $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ e $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$.*

1. *O conglomerado dos operadores de fecho regulares tem supremo, sendo $\sup_{i\in I}(\mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}) = \mathrm{reg}^{(\bigcap_{i\in I} \Delta(c_i))}$. Ou seja, $\mathrm{reg}^{(\bigcap \Delta(c_i))} \geq \bigvee \mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}$, e, se $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} \geq \bigvee \mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}$, então $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} \geq \mathrm{reg}^{(\bigcap \Delta(c_i))}$, onde $\bigvee$ representa o supremo em $CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$.*

2. *O conglomerado das subcategorias delta tem supremo, sendo $\sup_{i\in I}(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})) = \Delta(\bigwedge_{i\in I} \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})$. Ou seja, $\bigcup \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}) \subseteq \Delta(\bigwedge \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i})$, e se $\bigcup \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}) \subseteq \Delta(c)$ então $\Delta(\bigwedge \mathrm{reg}^{\mathcal{A}_i}) \subseteq \Delta(c)$.*

Demonstração: 1. Primeiro é preciso verificar que $\mathrm{reg}(\bigcap \Delta(c_i)) \geq \bigvee \mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}$. Vê-se facilmente que $\mathrm{reg}(\bigcap \Delta(c_i)) \geq \mathrm{reg}(\Delta(c_i))$ para todo i em I, o que origina o pretendido. Se $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} \geq \bigvee \mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}$ então $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} \geq \mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}$ para todo o i em I. Usando a adjunção, ou equivalentemente $(*)$, $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} \geq \mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}$ se e só se $\mathcal{A} \subseteq \Delta(\mathrm{reg}^{\Delta(c_i)}) = \Delta(c_i)$ e em consequência $\mathcal{A} \subseteq \bigcap \Delta(c_i)$. Finalmente, este facto implica que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} \geq \mathrm{reg}^{\bigcap \Delta(c_i)}$.

Para 2 a demonstração é em tudo semelhante. ■

Definição 2.11 *Para uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, consideremos a seguinte subcategoria*

$$S(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{X} \mid \textit{existe uma monofonte } (f_i : X \longrightarrow A_i)_{i\in I},\ \textit{com } A_i \in \mathcal{A}\}.$$

Quando a subcategoria $\mathcal{A}$ é reflectiva em $\mathcal{X}$, é determinada pelas reflexões, como indicamos de seguida.

Proposição 2.12 *Sejam $(\rho_X : X \longrightarrow RX)_{X\in\mathcal{X}}$ as reflexões de $\mathcal{X}$ numa sua subcategoria reflectiva $\mathcal{A}$. Tem-se que:*

$$S(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{X} \mid \rho_X \textit{ é um monomorfismo}\}.$$

Demonstração: Se ρ_X for um monomorfismo, em particular é uma monofonte de codomínio em $\mathcal{A}$, então $X \in S(\mathcal{A})$. Reciprocamente, se $X \in S(\mathcal{A})$ então existe uma monofonte $(m_i : X \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ com $A_i \in \mathcal{A}$. A definição de reflexão diz-nos que existem morfismos $(f_i : RX \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ tais que $f_i \cdot \rho_X = m_i$ para todo o i em I. Em suma, se $\rho_X \cdot g = \rho_X \cdot h$ então $f_i \cdot \rho_X \cdot g = f_i \cdot \rho_X \cdot h$, o que é equivalente a $m_i \cdot g = m_i \cdot h$, para todo $i \in I$. Como $(m_i)_{i\in I}$ é uma monofonte, tem-se que os morfismos g e h são iguais. ■

Proposição 2.13 *Para uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$ e $S(\mathcal{A})$ originam o mesmo operador de fecho regular em $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Como $\mathcal{A} \subseteq S(\mathcal{A})$ e o functor reg é contravariante, $\mathrm{reg}^{S(\mathcal{A})} \leq \mathrm{reg}^{\mathcal{A}}$.

Por outro lado, $S(\mathcal{A}) \subseteq \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$ porque as categorias delta são fechadas para monofontes. Portanto $\mathrm{reg}^{S(\mathcal{A})} \geq \mathrm{reg}^{\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})} = \mathrm{reg}^{\mathcal{A}}$. ■

Em sequência deste resultado verifica-se que, para identificarmos os operadores de fecho regulares em $\mathcal{X}$, basta tomar as subcategorias fechadas para monofontes. Aliás, esta conclusão resulta também directamente do facto das subcategorias delta definirem todos os operadores de fecho regulares, e serem fechadas para monofontes.

2.3 Teoremas da diagonal

Nesta secção vão ser apresentados vários resultados que nos permitem saber quando é que uma subcategoria é da forma delta. Vão ser apresentadas duas versões do *Teorema da Diagonal*, uma de índole algébrico e outra de índole topológico, e uma caracterização das subcategorias delta.

O Primeiro Teorema da Diagonal refere-se a uma categoria com objecto zero, e pode ser visto em [13]. Enquanto que o segundo diz respeito a uma categoria em que os pontos detectam monofontes e está provado em [15] e [7], sendo que em [15] a sua demonstração foi feita sem o conhecimento do resultado da Proposição 2.16 . Temos então que existe uma versão algébrica e outra topológica do Teorema da Diagonal.

Nos dois lemas e no teorema que se seguem, a categoria $\mathcal{X}$ tem objecto zero 0, isto é 0 é o objecto inicial e terminal; tem núcleos e conúcleos, que representaremos por ker e coker, respectivamente. O único morfismo de X para Y que se factoriza através do objecto 0 vai ser representado por 0_Y^X. Se $X = 0$ então o domínio do morfismo é omitido.

Lema 2.14 *Seja* $\mathcal{A}$ *uma subcategoria reflectiva de* $\mathcal{X}$ *com reflexões* $(\rho_X : X \longrightarrow RX)_{X\in\mathcal{X}}$. *Então* $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}(0_X) = \mathrm{ker}\rho_X$.

Demonstração: Vamos usar a Proposição 2.6 que nos dá uma definição alternativa de operador de fecho regular. A definição de núcleo diz que $\mathrm{ker}\rho_X = \mathrm{ig}(\rho_X, 0)$, o que implica que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}(0_X) \leq \mathrm{ker}\rho_X$.

Sejam $u, v : X \longrightarrow A$, dois morfismos de $\mathcal{X}$ com codomínio em $\mathcal{A}$. Estes morfismos factorizam-se pela reflexão, isto é, existem $u', v' : RX \longrightarrow A$ tais que $u' \cdot \rho_X = u$ e $v' \cdot \rho_X = v$. Concluímos então que $u \cdot \mathrm{ker}\rho_X = u' \cdot \rho_X \cdot \mathrm{ker}\rho_X = u' \cdot 0 = 0$ e de igual modo $v \cdot \mathrm{ker}\rho_X = 0$, ou seja $\mathrm{ker}\rho_X$ igualiza u e v, logo $\mathrm{ker}\rho_X \leq \mathrm{ig}(u, v)$. Pela Proposição 2.6 temos então que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}(0_X) \geq \mathrm{ker}\rho_X$. ■

Lema 2.15 *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma subcategoria regular-epirreflectiva de* $\mathcal{X}$ *e* $(\rho_X : X \longrightarrow RX)_{X\in\mathcal{X}}$ *as suas reflexões. Se* $\rho_X \cong \mathrm{coker}(\mathrm{ker}\rho_X)$ *então* $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X} : \mathrm{ker}\rho_X \cong 0_X\}$.

Demonstração: Seja $X \in \mathcal{A}$. Temos então que ρ_X é um isomorfismo, e portanto $\ker\rho_X \cong 0_X$. Consideremos $X \in \mathcal{X}$ tal que $\ker\rho_X \cong 0_X$. Como $\rho_X \cong \mathrm{coker}(\ker\rho_X) \cong \mathrm{coker}0_X$ e $\mathrm{coker}0_X \cong 1_X$, ρ_X é um isomorfismo e tem-se assim que $X \in \mathcal{A}$. ∎

Primeiro Teorema da Diagonal *Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria regular-epirreflectiva de $\mathcal{X}$ tal que para cada reflexão ρ_X se tem que $\rho_X \cong \mathrm{coker}(\ker\rho_X)$. Então $\mathcal{A}$ é uma subcategoria delta.*

Demonstração: Queremos provar que, se $X \in \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$, então $X \in \mathcal{A}$.

Seja $X \in \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$. Pelo Lema 2.15, para provar que X está em $\mathcal{A}$ é suficiente provar que $\ker\rho_X \cong 0_X$.

Vamos considerar o morfismo $0^X_X : X \to 0 \to X$. Como $X \in \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$ e $1_X \cdot 0_X = 0^X_X \cdot 0_X$, da Proposição 2.3 vem que $1_X \cdot \mathrm{reg}^{\mathcal{A}}(0_X) = 0^X_X \cdot \mathrm{reg}^{\mathcal{A}}(0_X)$, que é equivalente a $\ker\rho_X = 0^X_X \cdot \ker\rho_X$. Chegámos então à conclusão que $\ker\rho_X$ é um morfismo zero, isto é $\ker\rho_X \cong 0_X$. ∎

Usando os conhecimentos sobre o operador de fecho regular, podemos dar uma caracterização das subcategorias delta. A presença do operador de fecho regular não resulta do enunciado mas sim de sabermos que, se uma subcategoria é delta, então é originada por algum operador de fecho regular, como já vimos anteriormente, facto este que é usado na demonstração.

Proposição 2.16 *Uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ é uma subcategoria delta se e só se*

para toda a fonte $(g_i : X^2 \longrightarrow A_i^2)_{i\in I}$ com A_i em $\mathcal{A}$ e $\delta_X \cong \bigwedge_{i\in I} g_i^{-1}(\delta_{A_i})$ se tem que X também está em $\mathcal{A}$. $(*)$

Demonstração: Se $\mathcal{A} = \Delta(c)$ a condição $(*)$ verifica-se, uma vez que δ_{A_i} é c-fechado para todo o $i \in I$ e isso implica que a sua imagem inversa por g_i, $g_i^{-1}(\delta_{A_i})$, também seja c-fechada. Conclui-se então que δ_X é c-fechado por ser a intersecção de subobjectos c-fechados.

Para provar a implicação contrária temos que mostrar que $\mathcal{A} = \Delta(c)$ para algum operador de fecho c em $\mathcal{X}$. Já sabemos que se $\mathcal{A} = \Delta(c)$ então

$\mathcal{A} = \Delta(\text{reg}^{\mathcal{A}})$, e que $\mathcal{A} \subseteq \Delta(\text{reg}^{\mathcal{A}})$. Por outro lado, se $X \in \Delta(\text{reg}^{\mathcal{A}})$, então $\text{reg}^{\mathcal{A}}(\delta_X) = \delta_X$ e, da definição de operador de fecho regular, $\delta_X = \bigwedge\limits_{i \in I} h_i^{-1}(\delta_{A_i})$, estando os morfismos h_i nas condições de $(*)$. De $(*)$ sai então imediatamente que $X \in \mathcal{A}$. ∎

Segundo Teorema da Diagonal *Seja $\mathcal{X}$ uma categoria em que os pontos detectam monofontes. Então uma subcategoria de $\mathcal{X}$ é uma subcategoria delta se e só se é fechada para monofontes.*

Demonstração: Já sabemos que uma subcategoria delta é fechada para monofontes (Prop. 2.4).

Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$ fechada para monofontes. Para $\mathcal{A}$ ser da forma delta tem que verificar a condição $(*)$ da proposição anterior.

Consideremos a fonte $(g_i : X^2 \longrightarrow A_i^2)_{i \in I}$ com $A_i \in \mathcal{A}$ e $\delta_X \cong \bigwedge\limits_{i \in I} g^{-1}(\delta_{A_i})$. Para cada $x \in \text{pt}X$, vamos denotar por $f_x := <1_X, x \cdot !_X>$ o morfismo induzido no produto por 1_X e por $x \cdot !_X$, onde $!_X$ representa o único morfismo de X para 1.

$$\begin{tikzcd}
X & & X \times X \arrow[ll, "p_2"'] \arrow[rr, "p_1"] & & X \\
& & & 1 \arrow[ur, "x"] & \\
& & X \arrow[uull, "1_X"] \arrow[uu, "f_x"] \arrow[ur, "!_X"] & & \\
& & 1 \arrow[u, "y"] \arrow[uuull, "y"] \arrow[uuurr, "x"'] & &
\end{tikzcd}$$

O nosso objectivo é provar que $(g_i \cdot f_x)_{(i \in I, x \in \text{pt}X)}$ é uma monofonte. Como os pontos detectam monofontes, basta tomarmos $g_i \cdot f_x \cdot y = g_i \cdot f_x \cdot z$ para todo $i \in I$, $x \in \text{pt}X$, onde y e z são dois pontos de X. Façamos $x := y$; então temos

$$g_i \cdot f_y \cdot y = g_i \cdot f_y \cdot z \Leftrightarrow g_i \cdot <y, y> = g_i \cdot < z, y >$$

e, por outro lado, $g_i \cdot <y, y>= g_i \cdot \delta_X \cdot y$. Ou seja, $g_i \cdot <z, y>= g_i \cdot \delta_X \cdot y$.

Como $\delta_X \cong \bigwedge\limits_{i \in I} g^{-1}(\delta_{A_i})$, existem morfismos de X para $g^{-1}(A_i^2)$ e por conseguinte existem morfismos $s_i : X \longrightarrow A_i$ para todo $i \in I$, tais que $\delta_{A_i} \cdot s_i = g_i \cdot \delta_X$, o que implica que $g_i(<z, y>) \leq \delta_{A_i}$ e, aplicando a imagem inversa, $<z, y> \leq g^{-1}(\delta_{A_i})$ para todo $i \in I$. Concluímos então que $<z, y> \leq \bigwedge\limits_{i \in I} g^{-1}(\delta_{A_i}) \cong \delta_X$, e portanto $y = z$.

Provámos então que $(g_i \cdot f_x)_{i,x}$ é uma monofonte, e, como $\mathcal{A}$ é fechada para monofontes, $X \in \mathcal{A}$. ■

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[drr, "s_i"] \arrow[ddr, "\delta_X"'] & & \\
& g^{-1}(A_i^2) \arrow[r] \arrow[d, "g^{-1}(\delta_{A_i})"] & A_i \arrow[d, "\delta_{A_i}"] \\
& X^2 \arrow[r, "g_i"] & A_i^2
\end{tikzcd}$$

Corolário 2.17 *Seja $\mathcal{X}$ uma categoria com pontos suficientes. Então uma subcategoria de $\mathcal{X}$ é uma subcategoria delta se e só se é fechada para monofontes.*

Demonstração: No capítulo inicial foi referido que se $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes então o objecto terminal é gerador, e na Proposição 0.2 provou-se que se uma categoria tem terminal gerador então os pontos detectam monofontes. Usando estes factos e o Segundo Teorema da Diagonal, este corolário é imediato. ■

Um tipo de subcategorias que são sempre fechadas para monofontes são as subcategorias epirreflectivas.

Nas condições do Teorema da Diagonal, para qualquer subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, a subcategoria $S(\mathcal{A})$ é sempre uma subcategoria delta.

2.4 Objectos conexos

Os resultados apresentados nesta e nas duas secções seguintes encontram-se, basicamente, em [13], [7] e [23].

No estudo dos objectos conexos em relação a um operador de fecho que apresentamos em seguida está patente um certo paralelismo com o estudo dos objectos separados.

Definição 2.18 *Um* objecto X *de* $\mathcal{X}$ *é* conexo em relação a c *(ou c-conexo) se o morfismo diagonal é denso em X^2, ou seja $c_{X^2}(\delta_X) = 1_X$.*

Definição 2.19 *À subcategoria $\nabla(c)$ dos objectos c-conexos de $\mathcal{X}$ chama-se* subcategoria nabla *induzida por c, isto é,*

$$\nabla(c) = \{X \mid c(\delta_X) = 1_{X^2}\}.$$

Proposição 2.20 *Se c é um operador de fecho produtivo, então $\nabla(c)$ é fechada para produtos.*

Demonstração: Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de objectos de $\nabla(c)$ e $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ o seu produto. O morfismo δ_X é c-denso se e só se $\prod\limits_{i\in I} \delta_{X_i}$ o for, uma vez que existe um isomorfismo $h : (\prod X_i)^2 \longrightarrow \prod (X_i)^2$ tal que $h \cdot \delta_X = \prod\limits_{i\in I} \delta_{X_i}$.

Agora, usando os factos de c ser produtivo e de cada δ_{X_i} ser c-denso, verifica-se que $c(\prod\limits_{i\in I} \delta_{X_i}) = \prod\limits_{i\in I} c(\delta_{X_i}) = \prod\limits_{i\in I} 1_{X_i} = 1_X$. ∎

Proposição 2.21 *A subcategoria $\nabla(c)$ é fechada para imagens se $e \times e \in \mathcal{E}$ sempre que $e \in \mathcal{E}$.*

Demonstração: Sejam $e : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{E}$ e X um objecto de $\nabla(c)$. Consideremos a igualdade $\delta_Y \cdot e = e \times e \cdot \delta_X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "e"'] & X^2 \arrow[d, "e^2"] \\ Y \arrow[r, "\delta_Y"] & Y^2 \end{tikzcd}$$

Sabemos que δ_X é c-denso e que $e \times e \in \mathcal{E}$, portanto sai facilmente de 0.6(ii) que $e \times e \cdot \delta_X$ é c-denso. Temos então que $\delta_Y \cdot e$ é c-denso o que implica, pela propriedade de 0.7(ii), que δ_Y é c-denso. ∎

Note-se que a condição da proposição anterior é verificada sempre que $\mathcal{E}$ for fechada para produtos finitos ou estável para produtos fibrados. Se $\mathcal{E}$ for estável para produtos fibrados e $e \in \mathcal{E}$, então $e \times e \in \mathcal{E}$, uma vez que $e \times e \cong (1_Y \times e) \cdot (e \times 1_X)$, onde tanto $1_Y \times e$ como $e \times 1_X$ estão em $\mathcal{E}$ por resultarem de produtos fibrados de e, e $\mathcal{E}$ é fechada para a composição.

Proposição 2.22 *Sejam c um operador de fecho idempotente e $m : M \longrightarrow X$ um morfismo c-denso de $\mathcal{M}$.*

1. *Para c finitamente produtivo, se $M \in \nabla(c)$ então $X \in \nabla(c)$.*
2. *Para c hereditário, se $X \in \nabla(c)$ então $M \in \nabla(c)$.*

Demonstração: Os morfismos $m : M \longrightarrow X$ e $\delta_M : M \longrightarrow M^2$ de $\mathcal{M}$ verificam a igualdade $(m \times m) \cdot \delta_M = \delta_X \cdot m$.

1. Se c for um operador de fecho finitamente produtivo e $c(m) = 1_X$, então $c(m \times m) \cong c(m) \times c(m) = 1_X \times 1_X \cong 1_{X^2}$. Por hipótese $\delta_M : M \longrightarrow M^2$ é c-denso. Para um operador de fecho idempotente, a composição de morfismos c-densos é ainda um morfismo c-denso. O que quer dizer que $(m \times m) \cdot \delta_M = \delta_X \cdot m$ é c-denso. Pela Proposição 0.7, temos que δ_X é c-denso e portanto $X \in \nabla(c)$.

2. Tal como em 1, $(m \times m) \cdot \delta_M = \delta_X \cdot m$ é um morfismo c-denso, já que δ_X e m são c-densos. Agora sabemos por 0.9(3) que, para um operador de fecho hereditário e idempotente, se a composição de subobjectos é densa então o último deles também é denso. Portanto δ_M é c-denso, o que completa a demonstração. ∎

2.5 Operador de fecho corregular

Tal como para o operador de fecho regular, cada subcategoria de $\mathcal{X}$ define um *operador de fecho corregular.*

Definição 2.23 *Para uma subcategoria de $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, o operador de fecho corregular* $\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}} := (\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}_X)_{X \in \mathcal{X}}$ *é definido por:*

$$\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}_X(m) := m \vee \bigvee \{h(1_{A^2}) \,|\, h : A^2 \longrightarrow X, A \in \mathcal{A} \text{ e } h(\delta_A) \leq m\}.$$

Proposição 2.24 *O operador de fecho corregular é fracamente hereditário.*

Demonstração: Sejam $c := \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}$ e $m : M \overset{j_m}{\to} c(M) \overset{c(m)}{\to} X$ um subobjecto de X. Sabemos que

$$c_{c(M)}(j_m) = j_m \vee \bigvee \{g(1_{A^2}) \,|\, g : A^2 \longrightarrow c(M), A \in \mathcal{A} \text{ e } g(\delta_A) \leq j_m\}. \quad (*)$$

Para $h : A^2 \longrightarrow X$ com $h(\delta_A) \leq m$, se $h = h(1_{A^2}) \cdot e$ com $e \in \mathcal{E}$, pela definição de operador de fecho corregular temos que $h(1_{A^2}) \leq c_X(m)$. Existe portanto $t \in \mathcal{M}$ tal que $c(m) \cdot t = h(1_{A^2})$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrrr, "\delta_A"] & & & & A^2 \arrow[dl, "e"'] \arrow[ddd, "h"] \\
& & & h(A^2) \arrow[dl, "t"'] \arrow[ddr, "h(1_{A^2})"] & \\
& & c(M) \arrow[drr, "c(m)"] & & \\
M \arrow[urr, "j_m"] \arrow[rrrr, "m"] & & & & X
\end{tikzcd}$$

O morfismo $(t \cdot e) : A^2 \longrightarrow c(M)$ está nas condições do morfismo g em $(*)$ porque $t \cdot e(\delta_A) \leq j_m$, o que resulta de $c(m) \cdot t \cdot e(\delta_A) = h(\delta_A) \leq m = c(m) \cdot j_m$. Logo $c(j_m) \geq t \cdot e(1_{A^2}) = t$. Temos então que $c(j_m) \geq t$, o que implica que $c(m) \cdot c(j_m) \geq c(m) \cdot t = h(1_{A^2})$. Por outro lado $c(m) \cdot c(j_m) \geq c(m) \cdot j_m = m$. Ou seja, por definição de $c(m)$, $c(m) \cdot c(j_m) \geq c(m)$, o que faz com que $c(j_m)$ seja um isomorfismo. ■

O operador de fecho corregular e o operador ∇ são dois functores covariantes entre os conglomerados parcialmente ordenados $SUB(\mathcal{X})$ e $CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$.

As relações entre os functores reg e Δ referidas na secção 2.2 têm resultados equivalentes para os functores coreg e ∇. As respectivas demonstrações são em tudo idênticas às feitas nessa secção, e por isso são omitidas.

Proposição 2.25

1. *Se c é um operador de fecho e $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$ então:*
   - (a) *coreg* $\dashv \nabla$;
   - (b) $\mathcal{A} \subseteq \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$;
   - (c) $c \geq \mathrm{coreg}^{\nabla(c)}$;
   - (d) $\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}} = \mathrm{coreg}^{\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})}$;
   - (e) $\nabla(c) = \nabla(\mathrm{coreg}^{\nabla(c)})$;
   - (f) $\mathcal{A} \subseteq \nabla(c) \Longleftrightarrow \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}} \leq c$;
2. *Se $(c_i)_{i\in I}$ é uma família de operadores de fecho e $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ uma família de subcategorias de $\mathcal{X}$, então:*
   - (a) $coreg(\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i) = \bigvee\limits_{i\in I} \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}_i}$
   - (b) $\nabla(\bigwedge\limits_{i\in I} c_i) = \bigcap\limits_{i\in I} \nabla(c_i)$.
   - (c) *O conglomerado dos operadores de fecho corregulares tem ínfimo, sendo* $\inf\limits_{i\in I}(\mathrm{coreg}^{\nabla(c_i)}) = \mathrm{coreg}^{(\bigcap_{i\in I}\nabla(c_i))}$. *Ou seja,* $\mathrm{coreg}^{(\bigcap \nabla(c_i))} \leq \bigwedge \mathrm{coreg}^{\nabla(c_i)}$, *e, se* $\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}} \leq \bigwedge \mathrm{coreg}^{\nabla(c_i)}$, *então* $\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}} \leq \mathrm{coreg}^{(\bigcap \nabla(c_i))}$, *onde* $\bigvee$ *representa o supremo em* $CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$.
   - (d) *O conglomerado das subcategorias nabla tem supremo, sendo* $\sup\limits_{i\in I}(\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}_i})) = \nabla(\bigvee\limits_{i\in I} \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}_i})$. *Ou seja,* $\bigcup \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}_i}) \subseteq \nabla(\bigvee \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}_i})$, *e se* $\bigcup \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}_i}) \subseteq \nabla(c)$ *então* $\nabla(\bigvee \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}_i}) \subseteq \Delta(c)$.

Entre outras coisas, resulta daqui que as subcategorias nabla geram todos os operadores de fecho corregulares e *vice-versa.*

2.6 Caracterização das subcategorias nabla

Tal como para as subcategorias delta e os operadores de fecho regulares, as subcategorias nabla são caracterizadas pelos operadores de fecho corregulares. Essa caracterização foi dada em [7].

Proposição 2.26 *Uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ é uma subcategoria nabla se e só se*

para toda a cofonte $(g_i : A_i^2 \longrightarrow X^2)_{i\in I}$ com A_i em $\mathcal{A}$, $g_i(\delta_{A_i}) \leq \delta_X$ para todo o $i \in I$ e $1_{X^2} \cong \delta_X \vee \bigvee\limits_{i\in I} g_i(1_{A_i^2})$, X está em $\mathcal{A}$. $(\sharp)$

Demonstração: Sejam $\mathcal{A} = \nabla(c)$, para um operador de fecho c em $\mathcal{X}$, e $(g_i)_{i\in I}$ uma cofonte como em $(\sharp)$. Como, pela definição de operador de fecho, $g_i(c(\delta_{A_i})) \leq c(g_i(\delta_{A_i})) \leq c(\delta_X)$ e $c(\delta_{A_i}) \cong 1_{A_i^2}$ porque $A_i \in \nabla(c)$, logo $1_{X^2} \cong \delta_X \vee \bigvee\limits_{i\in I} g_i(1_{A_i^2}) \leq c(\delta_X)$. O que torna X um objecto de $\nabla(c)$.

Por outro lado, se $(\sharp)$ se verificar, temos que provar que $\mathcal{A} = \nabla(c)$ para algum operador de fecho c. Já sabemos que nesse caso também se verifica a igualdade $\mathcal{A} = \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$.

A inclusão $\mathcal{A} \subseteq \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$, é sempre válida, e, se $X \in \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$, então $1_{X^2} = \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}(\delta_X) = \delta_X \vee \bigvee\limits_{i\in I} h_i(1_{A_i^2})$, em que, da definição de operador de fecho corregular, os morfismos h_i estão nas condições descritas em $(\sharp)$. O que faz com que X esteja em $\mathcal{A}$. ■

Quando a categoria $\mathcal{X}$ tem pré-pontos suficientes, a condição $(\sharp)$ pode ser simplificada.

Proposição 2.27 *Seja $\mathcal{X}$ uma categoria com pré-pontos suficientes. A subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ é nabla se e só se verifica as seguintes condições:*

(i) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$;

(ii) *se para toda a cofonte não vazia $(g_i : A_i^2 \longrightarrow X^2)_{i\in I}$ com $A_i \in \mathcal{A}$, $g_i(\delta_{A_i}) \leq \delta_X$ para todo o $i \in I$ e $1_{X^2} \cong \bigvee\limits_{i\in I} g_i(1_{A_i^2})$, X está em $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria nabla, então verifica (ii), uma vez que a condição (ii) é mais fraca que $(\sharp)$. E verifica (i) porque δ_P é um isomorfismo e portanto $c(\delta_P) \cong 1_{P^2}$ para todo o objecto pré-terminal P e todo o operador de fecho c.

Para provar a outra implicação, mais uma vez o objectivo é mostrar que $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{A}$. Seja X um objecto de $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$. Então $1_{X^2} = \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}(\delta_X) = \delta_X \vee \bigvee\{h(1_{A^2}) \,|\, h : A^2 \longrightarrow X^2, A \in \mathcal{A} \text{ e } h(\delta_A) \leq \delta_X\}$.

Para $x \in \mathrm{ppt}X$, os morfismos $x^2 : P^2 \longrightarrow X^2$, com $P \in \mathcal{P}$, estão nas condições referidas para os morfismos h, pois $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ e $x^2(\delta_P) = x^2(1_{P^2}) = x^2 = \delta_X \cdot x \leq \delta_X$. Devido a $\mathcal{X}$ ter pré-pontos suficientes, $\bigvee_{x \in \mathrm{ppt}X} x^2 \cong \delta_X$, e portanto $1_{X^2} = \bigvee\{h(1_{A^2}) \,|\, h : A^2 \longrightarrow X^2, A \in \mathcal{A} \text{ e } h(\delta_A) \leq \delta_X\}$. Isto significa que os morfismos h formam uma cofonte nas condições de (ii) e consequentemente $X \in \mathcal{A}$. ■

Nesta proposição a cofonte considerada é não vazia, o que já não acontece em 2.26 .

Capítulo 3

Relações entre subcategorias

Neste capítulo vamos comparar os diversos tipos de subcategorias estudadas nos dois capítulos anteriores.

Lema 3.1 *Os únicos objectos comuns às subcategorias delta e nabla do mesmo operador de fecho são os objectos pré-terminais. Isto é, para todo o* $c \in CL(\mathcal{X}, \mathcal{M})$,

$$\Delta(c) \cap \nabla(c) = \mathcal{P}.$$

Demonstração: Se P é um objecto pré-terminal então $P^2 \cong P$. Portanto $c(\delta_P) \cong 1_{P^2} \cong \delta_P$.

Por outro lado, se $X \in \Delta(c) \bigcap \nabla(c)$ então $c(\delta_X) \cong 1_{X^2} \cong \delta_X$. Logo temos que $X \cong X^2$, o que torna X um objecto pré-terminal. ■

Proposição 3.2 *Para um operador de fecho c de $\mathcal{X}$ tal que $\nabla(c)$ seja fechada para imagens, tem-se que:*

$$\nabla(c) \subseteq l(\Delta(c)) \quad e \quad \Delta(c) \subseteq r(\nabla(c)).$$

Demonstração: Para $f : X \longrightarrow Y$ com $X \in \nabla(c)$ e $Y \in \Delta(c)$, temos que $f(X) \in \Delta(c) \bigcap \nabla(c)$ porque $\Delta(c)$ é fechada para subobjectos e $\nabla(c)$ é fechada para imagens, por hipótese. O que significa, pelo lema anterior, que $f(X)$ é pré-terminal e consequentemente f é um morfismo constante. ■

A proposição 2.21 dá-nos uma condição para que $\nabla(c)$ seja fechada para imagens.

As adjunções estabelecidas, entre os functores Δ e reg e os functores coreg e ∇, originam uma nova adjunção entre $\Delta \cdot \mathrm{coreg}$ e $\nabla \cdot \mathrm{reg}$. Temos assim que $r \dashv l$ (por definirem uma correspondência de Galois) e que $\Delta \cdot \mathrm{coreg} \dashv \nabla \cdot \mathrm{reg}$ são duas adjunções paralelas. Vamos de seguida ver que em certas circunstâncias elas são iguais.

$$\begin{tikzcd}
& CL(\mathcal{X},\mathcal{M}) \arrow[dl, shift right=1.5ex, "\nabla"'] \arrow[dl, phantom, "\vdash"] \arrow[dr, shift left=1.5ex, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "\vdash"] & \\
SUB\mathcal{X} \arrow[ur, shift right=1.5ex, "\mathrm{coreg}"'] \arrow[rr, shift left, "r"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & (SUB\mathcal{X})^{op} \arrow[ul, shift right=1.5ex, "\mathrm{reg}"'] \arrow[ll, shift left, "l"]
\end{tikzcd}$$

Lema 3.3 *Para uma subcategoria reflectiva $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, verifica-se a seguinte igualdade:*

$$\mathrm{reg}_X^{\mathcal{A}}(m) = \rho_X^{-1}(\mathrm{reg}_{RX}^{\mathcal{A}}(\rho_X(m))),$$

onde $\rho_X : X \longrightarrow RX$ é a reflexão.

Demonstração: Da definição de operador de fecho vem imediatamente que $\mathrm{reg}_X^{\mathcal{A}}(m) \leq \rho_X^{-1}(\mathrm{reg}_{RX}^{\mathcal{A}}(\rho_X(m)))$.

E da definição de operador de fecho regular, sabemos que:

$$\mathrm{reg}_X^{\mathcal{A}}(m) = \bigwedge\{h^{-1}(\delta_A) \,|\, h : X \longrightarrow A^2, A \in \mathcal{A} \text{ e } h(m) \leq \delta_A\} \text{ e}$$

$$\mathrm{reg}_{RX}^{\mathcal{A}}(\rho_X(m)) = \bigwedge\{g^{-1}(\delta_A) \,|\, g : RX \longrightarrow A^2, A \in \mathcal{A} \text{ e } g(\rho_X(m)) \leq \delta_A\}.$$

Usando a propriedade universal dos limites chega-se à conclusão que:

$$\begin{aligned}
&\rho_X^{-1}(\mathrm{reg}_{RX}^{\mathcal{A}}(\rho_X(m))) \\
&= \rho_X^{-1}(\bigwedge\{g^{-1}(\delta_A) \,|\, g : RX \longrightarrow A^2, A \in \mathcal{A} \text{ e } g(\rho_X(m)) \leq \delta_A\}) \\
&= \bigwedge\{(g \cdot \rho_X)^{-1}(\delta_A) \,|\, g \cdot \rho_X : X \longrightarrow A^2, A \in \mathcal{A} \text{ e } g \cdot \rho_X(m) \leq \delta_A\}.
\end{aligned}$$

As subcategorias reflectivas são fechadas para limites, o que faz com que que A^2 esteja em $\mathcal{A}$.

Para cada h da definição de $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X(m)$ existe $g : RX \longrightarrow A^2$ tal que $g \cdot \rho_X = h$, pelas propriedades das reflexões. Conclui-se então que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_X(m) \geq \rho_X^{-1}(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}_{RX}(\rho_X(m)))$. ∎

Se, em vez de ρ_X e $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}$, se considerar um operador de fecho c e um morfismo f quaisquer que verifiquem a igualdade da proposição anterior, dir-se-á que f é *c-inicial.* Ou seja, as reflexões são $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}$-iniciais.

Em $\mathcal{T}$op as funções serem k-iniciais significa que o espaço de partida tem a topologia inicial.

Proposição 3.4 *Sejam $\mathcal{P}$ fechada para imagens e $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$. Se $\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$ for reflectiva então $\nabla(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}) = l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}))$ para cada uma das seguintes hipóteses:*

(i) *Se $X \in l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}))$ então $X^2 \in l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}))$*

(ii) *$\mathcal{X}$ tem pontos suficientes.*

Demonstração: Pelo corolário 1.24 (ii)⇒(i), pelo que basta considerar a hipótese (i).

Como $\mathcal{P}$ é fechada para imagens $\nabla(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}) \subseteq l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}))$, por 3.2.

Para $X \in l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}))$, a reflexão ρ_X de X em $RX \in \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$ é constante. Como $\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$ é fechada para monofontes, ρ_X está em $\mathcal{E}$, o que implica que RX seja um objecto pré-terminal. Vê-se assim que δ_{RX} é um isomorfismo. Como por hipótese X^2 também está em $l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}))$, então RX^2 é um objecto pré-terminal. As reflexões e o produto induzem um morfismo $k : RX^2 \longrightarrow (RX)^2$ que verifica $(\rho_X)^2 = k \cdot \rho_{X^2}$. Considerando as projecções

$$\begin{tikzcd}
 & (RX)^2 & \\
RX \arrow[ur, "\delta_{RX}"] \arrow[dr, "R\delta_X"'] & & X^2 \arrow[ul, "(\rho_X)^2"'] \arrow[dl, "\rho_{X^2}"] \\
 & RX^2 \arrow[uu, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

$p_i : X^2 \longrightarrow X$ e $q_i : (RX)^2 \longrightarrow RX$, $i = 1, 2$, temos que $q_i \cdot \delta_{RX} = 1_{RX}$ e

$q_i \cdot (k \cdot R\delta_X) = Rp_i \cdot R\delta_X = R(p_i \cdot \delta_X) = R1_X = 1_{RX}$ para $i = 1, 2$; portanto $\delta_{RX} = k \cdot R\delta_X$.

Como só existe um morfismo de RX^2 para RX^2, $R\delta_X \cdot \delta_{RX}^{-1} \cdot k = 1_{RX^2}$ e portanto $R\delta_X = (\delta_{RX}^{-1} \cdot k)^{-1}$, isto é $R\delta_X$ é um isomorfismo.

Queremos provar que X está em $\nabla(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$.

Sabemos que $\rho_X \in \mathcal{E}$, e que $\rho_{X^2} \cdot \delta_X = R\delta_X \cdot \rho_X$, por ρ ser uma transformação natural Podemos então concluir que $\rho_{X^2}(\delta_X) = R\delta_X \cong 1_{RX^2}$.

Pelo lema anterior, temos que

$$\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}(\delta_X) = \rho_{X^2}^{-1}(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}(\rho_{X^2}(\delta_X))) = \rho_{X^2}^{-1}(1_{RX^2}) = 1_{X^2}.$$

■

É de notar que este resultado se verifica para qualquer outro operador de fecho c para o qual as reflexões sejam c-iniciais.

Proposição 3.5 *Seja $\mathcal{P}$ fechada para imagens. Se $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes e é $\mathcal{E}$-bem-copotenciada então, para toda a subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$,*

$$l(\mathcal{A}) = \nabla(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}).$$

Demonstração: Sabemos que $l(\mathcal{A}) = l(S(\mathcal{A}))$, porque as monofontes detectam constantes, e que $\mathrm{reg}^{\mathcal{A}} = \mathrm{reg}^{S(\mathcal{A})}$, pela Proposição 2.13.

Nas condições do enunciado, uma subcategoria fechada para monofontes é reflectiva. Como $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes, pelo Segundo Teorema da Diagonal uma subcategoria fechada para monofontes é do tipo delta, e portanto $\Delta(\mathrm{reg}^{S(\mathcal{A})}) = S(\mathcal{A})$. Ou seja, $\Delta(\mathrm{reg}^{S(\mathcal{A})}) = \Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$ é reflectiva, e portanto pode-se usar a proposição anterior para afirmar que $l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})) = \nabla(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})$. Por fim, conjugando os resultados:

$$l(\mathcal{A}) = l(S(\mathcal{A})) = l(\Delta(\mathrm{reg}^{S(\mathcal{A})})) = l(\Delta(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}})) = \nabla(\mathrm{reg}^{\mathcal{A}}).$$

■

Nas condições desta proposição, toda a subcategoria constante à esquerda é uma subcategoria nabla.

Corolário 3.6 *Seja $\mathcal{P}$ fechada para imagens. Se $\mathcal{X}$ tem pontos suficientes e é $\mathcal{E}$-bem-copotenciada então, para toda a subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$,*

$$r(\mathcal{A}) = \Delta(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}).$$

Demonstração: Como já vimos, $r \dashv l$ e $\Delta \cdot \mathrm{reg} \dashv \nabla \cdot \mathrm{coreg}$.

As condições são as mesmas da proposição anterior, e portanto os functores adjuntos de l e de $\nabla \cdot \mathrm{reg}$ são iguais. ■

Nas condições deste corolário, toda a subcategoria constante à direita é uma subcategoria delta.

Capítulo 4

Exemplos

4.1 Operadores de fecho corregulares em espaços topológicos

A categoria dos espaços topológicos e aplicações contínuas vai ser representada por $\mathcal{T}$op. Vamos considerar em $\mathcal{T}$op o sistema de factorização $(Epi(\mathcal{T}\text{op}), Mono(\mathcal{T}\text{op}))$.

A categoria dos espaços topológicos verifica as condições da maioria das proposições estudadas anteriormente. Em particular, como tem pontos suficientes, $\mathcal{P}$ é fechada para imagens e é $Epi(\mathcal{T}\text{op})$-bem-copotenciada, todas as subcategorias constantes à esquerda são subcategorias nabla e todas as subcategorias constantes à direita são subcategorias delta.

Para estudar os operadores de fecho corregulares em $\mathcal{T}$op, apenas é necessário tomar as subcategorias fechadas para imagens (Prop. 2.21), já que as funções sobrejectivas são fechadas para produtos.

Antes de começar o estudo dos operadores de fecho corregulares em $\mathcal{T}$op, vamos definir dois espaços topológicos especiais: os espaços topológicos discreto D e indiscreto E com dois pontos, $\{0, 1\}$.

Vamos designar por (in)disc o operador (in)discreto em $\mathcal{T}$op.

Lema 4.1 *Para uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ fechada para imagens, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\nabla(\text{coreg}^{\mathcal{A}}) = \mathcal{T}op$;

(ii) $\text{coreg}^{\mathcal{A}} = \text{indisc}$;

(iii) $\mathsf{D} \in \mathcal{A}$.

Demonstração: (i)$\Rightarrow$(ii) Se $\nabla(\text{coreg}^{\mathcal{A}}) = \mathcal{T}\text{op}$ então pela adjunção coreg $\dashv \nabla$ (2.25) $\text{coreg}^{\mathcal{A}} = \text{coreg}^{\mathcal{T}\text{op}}$, que é obviamente o operador indiscreto.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Se $\text{coreg}^{\mathcal{A}} = \text{indisc}$ então $\text{coreg}^{\mathcal{A}}_{\mathsf{D}}(0) = \mathsf{D}$. Existe assim uma função contínua $h : A^2 \longrightarrow \mathsf{D}$ tal que $A \in \mathcal{A}$, $h(a,a) = 0$ para todo o $a \in A$ e $h(b,c) = 1$ para b e c elementos de A.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d] & A^2 \arrow[d, "h"] \\
\{0\} \arrow[r, hook] & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$

Define-se $g : A \longrightarrow A^2$ por $g(x) = (b,x)$. A função $h \cdot g$ é contínua e D é a imagem de A. Logo D está em $\mathcal{A}$, por $\mathcal{A}$ ser fechada para imagens.

(iii)$\Rightarrow$(i) Seja X um espaço topológico. A função $h : \mathsf{D}^2 \longrightarrow X^2$ é sempre contínua; se escolhermos h de modo que $h(\delta_{\mathsf{D}}) \subseteq \delta_X$ e $h(0,1) = (x,y)$, com $x, y \in X$, então $(x,y) \in \text{coreg}^{\mathcal{A}}_X(\delta_X)$ para todo $x, y \in X$. Logo $\text{coreg}^{\mathcal{A}}_X(\delta_X) = X^2$, o que equivale a dizer que $X \in \nabla(\text{coreg}^{\mathcal{A}})$. ∎

Em [2] é provado que a subcategoria $\mathcal{C}\text{on}$ dos espaços conexos contém todas as subcategorias constantes à esquerda excepto $\mathcal{T}\text{op}$. O lema anterior permite provar que o mesmo se passa com as subcategorias nabla de $\mathcal{T}\text{op}$.

Corolário 4.2 *Se $\mathcal{A} = \nabla(c)$ e $\mathcal{A} \neq \mathcal{T}\text{op}$ então $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}\text{on}$.*

Demonstração: Vai-se provar que, se $\nabla(c) \not\subseteq \mathcal{C}\text{on}$, então $\nabla(c) = \mathcal{T}\text{op}$.

Se $X \notin \mathcal{C}\text{on}$ então existe $f : X \longrightarrow \mathsf{D}$ contínua e sobrejectiva. Como as subcategorias nabla são fechadas para imagens, se $X \in \nabla(c)$ então $\mathsf{D} \in \nabla(c)$. Pelo lema anterior, temos que $\nabla(c) = \mathcal{T}\text{op}$. ∎

Existe um resultado dual ao do Lema 4.1 que diz que, para uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ fechada para subespaços,

$$\Delta(reg^{\mathcal{A}}) = \mathcal{T}\text{op} \Longleftrightarrow reg^{\mathcal{A}} = \text{disc} \Longleftrightarrow \mathsf{E} \in \mathcal{A}.$$

A subcategoria nabla que surge mais naturalmente é a induzida pelo operador de fecho de Kuratowski,

$$k_X(M) = \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{U}_x)\, U \cap M \neq \emptyset\};$$

onde $\mathcal{U}_x$ designa o conjunto das vizinhanças de x em X.

A subcategoria $\nabla(k)$ é constituída pelos conjuntos que não têm abertos disjuntos não vazios, ou seja, a subcategoria dos *espaços topológicos irredutíveis.* A subcategoria $\Delta(k)$, como é sabido, é formada pelos espaços de Hausdorff.

Sempre que considerarmos uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{T}$op tendo como objectos os espaços isomorfos a um determinado espaço X, designaremos o operador de fecho corregular definido por $\mathcal{A}$ apenas por coreg^X.

Lema 4.3 *Sejam $X \in \mathcal{T}$op, $M \subseteq X$ e k o operador de fecho de Kuratowski. Então*

$$\mathrm{coreg}^{\mathsf{E}}_X(M) = \{x \in X \mid (\exists y \in M) : k(x) = k(y)\}.$$

Demonstração: Se $x \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{E}}(M)$, então existe $f : \mathsf{E} \times \mathsf{E} \longrightarrow X$ com $f(0,0), f(1,1) \in M$ e $f(0,1) = x$. Consideremos $f(0,0) = y$. Deste modo $f(k((0,0))) \subseteq k(f(0,0))$ implica que $f(\mathsf{E} \times \mathsf{E}) \subseteq k(y)$ e de maneira idêntica $f(\mathsf{E} \times \mathsf{E}) \subseteq k(x)$, isto é, $x \in k(y)$ e $y \in k(x)$. Conclui-se então que $k(x) = k(y)$.

Consideremos $x \in X$ e $y \in M$ tais que $k(x) = k(y)$. Queremos provar que $x \in coreg^{\mathsf{E}}(M)$. Para tal basta tomar a função $f : \mathsf{E} \times \mathsf{E} \longrightarrow X$ definida por $f(0,0) = f(1,1) = y$ e $f(0,1) = f(1,0) = x$, que é obviamente contínua porque $k(x) = k(y)$. ∎

Corolário 4.4 *A subcategoria nabla induzida por* $\mathrm{coreg}^{\mathsf{E}}$ *é a subcategoria dos espaços topológicos indiscretos.*

Demonstração: Se $X \in \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathsf{E}})$, então $\mathrm{coreg}^{\mathsf{E}}(\delta_X) = X \times X$. Pelo lema anterior sabemos que para cada $(x,y) \in X \times X$ existe $(z,z) \in X \times X$ tal que $k((x,y)) = k((z,z))$. O facto de k ser produtivo implica que

$k(x) = k(y) = k(z)$, logo X é um espaço indiscreto. Como todas as implicções usadas são equivalências está provado o corolário. ∎

Vamos definir S como sendo o espaço topológico formado pelo conjunto $\{0,1\}$, munido da topologia $\tau = \{\mathsf{S}, \{0\}, \emptyset\}$. A S chama-se *espaço de Sierpinski.*

Lema 4.5 *Sejam* $X \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, $M \subseteq X$ *e* k *o operador de fecho de Kuratowski. Então*

$$\mathrm{coreg}_X^{\mathsf{S}}(M) = \{x \in X \mid (\exists z, w \in M) : z \in k(x) \ e \ x \in k(w)\}.$$

Demonstração: Consideremos $x \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(M)$. Logo existe $f : \mathsf{S} \times \mathsf{S} \longrightarrow X$ com $f(0,1) = x$, $f(0,0) = w$ e $f(1,1) = z$ onde $z, w \in M$.

Pelo facto de $k((0,0)) = X$, vem que $(0,1) \in k((0,0))$ e, por continuidade, $f(0,1) = x \in k(w)$. De igual modo $k((0,1)) = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$ implica que $(1,1) \in k((0,1))$ e de novo, por continuidade, tem-se que $z \in k(x)$.

Para provar a outra implicação, suponhamos $z \in k(x)$ e $x \in k(w)$ com $z, w \in M$ e $x \in X$. Quer-se provar que $x \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(M)$. Para isso basta considerar a função $f : \mathsf{S} \times \mathsf{S} \longrightarrow X$ com $f(0,1) = f(1,0) = x$, $f(0,0) = w$ e $f(1,1) = z$. Só falta verificar que f é contínua para completar a prova.

Seja $F \subseteq X$ um conjunto fechado e calcule-se a sua imagem inversa,

$$f^{-1}(F) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } w \notin F, x \notin F \text{ e } z \notin F \\ \mathsf{S} \times \mathsf{S} & \text{se } w \in F (\Rightarrow x \in F \Rightarrow z \in F) \\ \mathsf{S} \times \mathsf{S} \backslash \{(0,0)\} & \text{se } w \notin F \text{ e } x \in F (\Rightarrow z \in F) \\ \{(1,1)\} & \text{se } w \notin F, x \notin F \text{ e } z \in F \end{cases}$$

Como a imagem inversa de um fechado é um fechado então a função f é contínua, o que completa a prova. ∎

Corolário 4.6 *Se* X *for um espaço topológico* T_1, *então* $\mathrm{coreg}_X^{\mathsf{S}}(M) = M$ *para todo o* $M \subseteq X$.

Para verificar este facto, basta reparar que $k(x) = x$, para todo $x \in X$, sendo X um espaço T_1.

Corolário 4.7 $X \in \nabla(\text{coreg}^{\mathsf{S}})$ *se e só se*

$$(\forall x, y \in X)\,(\exists z, w \in X) : z \in k(x) \cap k(y) \text{ e } \{x, y\} \subseteq k(w).$$

Demonstração: O espaço topológico X estar em $\nabla(\text{coreg}^{\mathsf{S}})$ quer dizer que $\text{coreg}^{\mathsf{S}}(\delta_X) = X \times X$. Pelo Lema 4.5 temos que, para cada $(x, y) \in X \times X$, existem $(z, z), (w, w) \in \delta_X$ tais que $(z, z) \in k(x, y)$ e $(x, y) \in k(w, w)$.

Usando o facto de o operador de Kuratowski ser produtivo, resulta o pretendido. Como só usamos equivalências, estão provadas as duas implicações. ∎

Corolário 4.8 *Para* $X = \prod_{i \in I} \mathsf{S}$, $X \in \nabla(\text{coreg}^{\mathsf{S}})$.

Demonstração: Usando o corolário anterior, basta escolher $z = ((1), (1))$ e $w = ((0), (0))$[1], uma vez que $k(w) = X$ e $z \in k(x)$, para todo $x \in X$. ∎

Corolário 4.9 *Toda a imagem de* $\prod_{i \in I} \mathsf{S}$ *pertence a* $\nabla(\text{coreg}^{\mathsf{S}})$.

Demonstração: Este resultado resulta da aplicação directa do Corolário 4.8 e do resultado que diz que, se $f : X \longrightarrow Y$ está em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}$ é estável para produtos, então $Y \in \nabla(c)$ sempre que $X \in \nabla(c)$. ∎

Existem no entanto espaços topológicos que estão em $\nabla(\text{coreg}^{\mathsf{S}})$ mas não são imagem de $\prod_{i \in I} \mathsf{S}$.

Para provar esta afirmação, basta considerar o espaço $(\mathbb{R}, \sigma) \in \mathcal{T}\text{op}$, com $\sigma = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Temos assim que para $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = [x, +\infty)$. Logo, para concluir que $(\mathbb{R}, \sigma) \in \nabla(\text{coreg}^{\mathsf{S}})$, basta usar o Corolário 4.7 e escolher $z \geq x, y$ e $w \leq x, y$.

Por outro lado se $(\mathbb{R}, \sigma) = f(\prod_{i \in I} \mathsf{S})$ então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f((0)) = x$ e sabe-se que $k((0)) = \prod_{i \in I} \mathsf{S}$. Usando a continuidade ter-se-ia que

$$f(k((0))) \subseteq k(f((0)) \Leftrightarrow f(\prod_{i \in I} \mathsf{S}) \subseteq k(x) \Leftrightarrow \mathbb{R} \subseteq [x, +\infty),$$

o que é impossível.

[1] (0) representa um I-uplo só com zeros.

Corolário 4.10 *O operador de fecho corregular induzido por* S *é idempotente.*

Demonstração: Consideremos $x \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(M))$. Então existem $z, w \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(M)$ tais que $z \in k(x)$ e $x \in k(w)$. Se $z \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(M)$, então existem $a, b \in M$ tais que $a \in k(z)$ e $z \in k(b)$. E se $w \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(M)$, então existem $c, d \in M$ tais que $c \in k(w)$ e $w \in k(d)$. Logo da idempotência de k resulta que $a \in k(x)$ e $x \in k(d)$, o que significa que $x \in \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(M)$. ∎

Corolário 4.11 *Seja* $\mathcal{T}\mathrm{op}_1$ *a subcategoria dos espaços topológicos* T_1. *Então:*

$$\Delta(\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}) = \mathcal{T}\mathrm{op}_1.$$

Demonstração: O produto de espaços T_1 é um espaço T_1, logo, se $X \in T_1$, então $X \times X \in T_1$ e, pelo Corolário 4.6, vem que $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(\delta_X) = \delta_X$. Inversamente, se $X \notin T_1$ então existe $f : \mathsf{S} \longrightarrow X$ injectiva. Se considerarmos $f \times f : \mathsf{S} \times \mathsf{S} \longrightarrow X \times X$ então $(f \times f)(\delta_{\mathsf{S}}) \subseteq \delta_X$, mas $(f \times f)(\mathsf{S} \times \mathsf{S}) = f(\mathsf{S}) \times f(\mathsf{S})$ tem dois elementos fora da diagonal, o que implica que $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}(\delta_X) \neq \delta_X$ e, por conseguinte, $X \notin \Delta(\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}})$. ∎

Lema 4.12 *Os operadores de fecho corregulares em* $\mathcal{T}op$ *verificam a seguinte relação:*

$$\mathrm{disc} = \mathrm{coreg}^{\mathcal{S}\mathrm{gl}} < \mathrm{coreg}^{\mathsf{E}} < \mathrm{coreg}^{\mathsf{S}} < \mathrm{coreg}^{\mathsf{D}} = \mathrm{indisc}.$$

Além disso, se c *é um operador de fecho corregular diferente dos anteriores, então* $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}} < c < \mathrm{coreg}^{\mathsf{D}}$.

Demonstração: O menor operador de fecho é disc, que é o operador de fecho corregular da subcategoria $\mathcal{S}\mathrm{gl}$ formada pelos espaços singulares e pelo espaço vazio. Vê-se facilmente que $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{S}\mathrm{gl}}) = \mathcal{S}\mathrm{gl}$.

Seja X um espaço topológico não singular e não vazio. Obviamente E é imagem de X e portanto $\mathrm{coreg}^{\mathsf{E}} \leq \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}$, para toda a subcategoria $\mathcal{A}$ não contida em $\mathcal{S}\mathrm{gl}$.

Raciocinando da mesma forma, se tivermos um espaço topológico Y não indiscreto, então existe um aberto não trivial contido em Y. Deste modo existe uma função sobrejectiva e contínua de Y em S. Conclui-se portanto que $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}$ é o terceiro menor operador de fecho corregular.

Pelo Lema 4.1 ficámos a saber que $\mathrm{coreg}^{\mathsf{D}} = \mathrm{coreg}^{\mathcal{T}\mathrm{op}} = \mathrm{indisc}$, e o operador de fecho corregular induzido por $\mathcal{T}$op é, obviamente, o maior operador de fecho corregular em $\mathcal{T}$op. ■

Ao provarmos que indisc é o maior operador de fecho corregular, provámos, em particular, que o operador trivial t, isto é $t_X(m) = 1_X$ para todo o $m \in \mathrm{sub}X$, não é corregular.

Provámos ainda que qualquer operador de fecho corregular diferente dos quatro indicados se situa entre $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}$ e $\mathrm{coreg}^{\mathsf{D}}$. É esse o caso do operador de fecho corregular definido pela categoria $\nabla(k)$ dos espaço irredutíveis. Vamos ver em seguida que $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}} < \mathrm{coreg}^{\nabla(k)}$ e que entre estes dois operadores de fecho há uma classe própria de operadores de fecho corregulares.

Consideremos os espaços topológicos X_α de cardinal infinito α munidos da topologia cofinita (ou seja, os fechados são os conjuntos finitos e X_α).

Lema 4.13 *Se α e β são dois cardinais infinitos e $\alpha < \beta$, então:*

$$\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}} < \mathrm{coreg}^{X_\beta} < \mathrm{coreg}^{X_\alpha} < \mathrm{coreg}^{\nabla(k)}.$$

Logo, entre $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}$ *e* $\mathrm{coreg}^{\nabla(k)}$ *existe uma infinidade de operadores de fecho corregulares.*

Demonstração: Para todo o cardinal α infinito, X_α é irredutível, e portanto $\mathrm{coreg}^{X_\alpha} \leq \mathrm{coreg}^{\nabla(k)}$. Os operadores de fecho coreg^{α} e $\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}}$ são diferentes porque $X_\alpha \notin \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathsf{S}})$, por 4.7.

Falta então ver que para dois cardinais infinitos diferentes α e β, se $\alpha < \beta$ então $\mathrm{coreg}^{X_\beta} < \mathrm{coreg}^{X_\alpha}$. Vamos provar primeiro que $X_\alpha \notin \nabla(\mathrm{coreg}^{X_\beta})$. Consideremos uma função contínua h de X_β em X_α. Então $X_\beta = \bigcup_{x \in X_\alpha} h^{-1}(x)$, sendo cada um destes conjuntos fechado. Como $|X_\beta| > |X_\alpha|$, X_β não pode ser a união de α conjuntos finitos, portanto X_β tem que ser a imagem inversa de algum elemento de X_α, ou seja, h é constante. Provámos assim que

$X_\alpha \in r(\{X_\beta\}) = \Delta(\mathrm{coreg}^{X_\beta})$, donde se prova que $X_\alpha \notin \nabla(\mathrm{coreg}^{X_\beta})$, o que implica que $\mathrm{coreg}^{X_\alpha} \neq \mathrm{coreg}^{X_\beta}$.

Finalmente, vai-se mostrar que $\mathrm{coreg}^{X_\beta} \leq \mathrm{coreg}^{X_\alpha}$. De facto, se $x \in \mathrm{coreg}_Y^{\beta}(M)$, para M subespaço de Y e $x \in Y$, então existe $h : (X_\beta)^2 \longrightarrow Y$ tal que $h(\delta_{X_\beta}) \subseteq M$ e $h(a,b) = x$ para a, b dois elementos de X_β. Agora, considerando o subconjunto X_α de X_β, podemos supor que a e b pertencem a X_α, e então concluir que $x \in h|_{(X_\alpha)^2}((X_\alpha)^2)$, e portanto $x \in \mathrm{coreg}_Y^{X_\alpha}(M)$. ∎

A construção da topologia cofinita pode ser generalizada. De facto, para um cardinal infinito qualquer γ podem-se definir os espaços X_α^γ, onde X_α^γ é um espaço topológico de cardinal α superior ou igual a γ munido com a topologia cujos conjuntos fechados diferentes de X_α^γ têm cardinal inferior a γ. Quando o cardinal γ que define a topologia é $\aleph_0$ temos então os espaços X_α considerados previamente.

Lema 4.14 *Se α, β, γ e η forem cardinais infinitos tais que $\eta < \gamma \leq \alpha < \beta$ então:*

1. $\mathrm{coreg}^{X_\alpha^\eta} < \mathrm{coreg}^{X_\alpha^\gamma}$;
2. $\mathrm{coreg}^{X_\beta^\gamma} < \mathrm{coreg}^{X_\alpha^\gamma}$.

Demonstração: 1. Se $\eta < \gamma$, então a função $f : X_\alpha^\gamma \longrightarrow X_\alpha^\eta$ definida por $f(x) = x$ é contínua, donde sai directamente que $\mathrm{coreg}^{X_\alpha^\eta} \leq \mathrm{coreg}^{X_\alpha^\gamma}$.

Vamos mostrar de seguida que $X_\alpha^\gamma \in r(\{X_\alpha^\eta\})$. Consideremos uma função contínua $g : X_\alpha^\eta \longrightarrow X_\alpha^\gamma$. Se $|g(X_\alpha^\eta)| \geq \gamma$, então $g(X_\alpha^\eta)$ tem um subconjunto F fechado de cardinal superior ou igual a η. Por outro lado a continuidade obriga a que $|g^{-1}(F)|$ seja menor que η, o que implica que $|F| \leq |g^{-1}(F)| < \eta$. Chegamos então à conclusão que o cardinal de $g(X_\alpha^\eta)$ tem que ser inferior a γ, o que faz com que para a topologia de subespaço $g(X_\alpha^\eta)$ seja um espaço discreto. Vê-se agora facilmente que um espaço discreto que seja imagem de X_α^η só tem um ponto, logo g é constante. Ou seja, $X_\alpha^\gamma \in r(\{X_\alpha^\eta\}) = \Delta(\mathrm{coreg}^{X_\alpha^\eta})$, e deste modo provámos que $X_\alpha^\gamma \notin \nabla(\mathrm{coreg}^{X_\alpha^\eta})$.

Para provar 2 procede-se essencialmente como no caso da topologia cofinita, isto é, quando $\gamma = \aleph_0$. ■

Foi assim construída uma subcategoria de espaços irredutíveis, $\mathcal{A} = \{X_\alpha^\gamma \,|\, \alpha, \gamma \text{ cardinais infinitos com } \alpha \geq \gamma\}$.

Em $\mathcal{A}$ existem portanto dois tipos de ordenação distintos. Uma segundo a "cardinalidade da topologia" e outra segundo a cardinalidade do conjunto.

Como $\mathcal{A} \subset \nabla(k)$, $\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}} \leq \mathrm{coreg}^{\nabla(k)}$ e então $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}) \subseteq \nabla(k)$. Não sabemos se esta inclusão é estrita.

Os espaços topológicos que não se podem decompôr como união disjunta de fechados não triviais são os *absolutamente conexos.* Em [2] foi provado que a subcategoria $\mathcal{C}_1$ dos espaços absolutamente conexos é a menor subcategoria constante à esquerda diferente da categoria $\mathcal{I}$nd dos espaços indiscretos. Como $\mathcal{C}_1 \not\subseteq \nabla(k)$, as únicas subcategorias constantes à esquerda contidas nos irredutíveis são $\mathcal{S}$gl e $\mathcal{I}$nd. Para ver que $\mathcal{C}_1 \not\subseteq \nabla(k)$ considera-se o espaço (X', τ'), com $X' = \{a, b, c\}$ e $\tau' = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset, X'\}$, que é absolutamente conexo mas não é irredutível. A inclusão contrária também não se verifica: para tal basta tomar qualquer um dos espaços (X_α^β) descritos anteriormente.

Outra maneira de ver que a subcategoria $\nabla(k)$ não é constante à esquerda é verificar que não é q-reversível. Um epimorfismo regular em $\mathcal{T}$op é uma função sobrejectiva em que o conjunto de chegada está munido da topologia quociente. Vamos tomar de novo o espaço (X', τ'), e a função $f : X' \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por $f(a) = 0$; $f(b) = f(c) = 1$. Com a topologia quociente, $\{0, 1\}$ vai-se tornar o espaço de Sierpinski, que é irredutível. As duas fibras $f^{-1}(0) = \{a\}$ e $f^{-1}(1) = \{b, c\}$ também são irredutíveis. No entanto, como já vimos, (X', τ') não o é.

O mesmo exemplo serve para provar que $\nabla(k)$ não é fechada superiormente, sendo neste caso necessário também reparar que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ é irredutível.

Por não ser q-reversível nem fechada superiormente, $\nabla(k)$ não é uma subcategoria constante, nem à esquerda nem à direita. De 3.5 sai que k não é um operador de fecho regular.

A partir do operador de Kuratowski define-se o operador de fecho θ em $\mathcal{T}$op,

$$\theta_X(M) = \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{U}_x)\ k(U_x) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Este operador de fecho não é idempotente nem fracamente hereditário, e portanto não pode ser regular nem corregular.

Se $X \in \mathcal{T}$op,

$$X \in \nabla(\theta) \iff (\forall x, y \in X)\,(\forall U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y)\ k(U) \cap k(V) \neq \emptyset,$$

ou seja, os k-fechos de conjuntos abertos não vazios nunca são disjuntos. A subcategoria $\Delta(\theta)$ é caracterizada de maneira oposta, isto é, X está em $\Delta(\theta)$ se os pontos de X podem ser separados por k-fechos de conjuntos abertos. Os espaços com esta característica são designados por espaços de Urysohn.

Resulta da definição de θ que $k \leq \theta$, o que faz com que $\Delta(\theta) \subseteq \Delta(k)$ e $\nabla(k) \subseteq \nabla(\theta)$.

O espaço topológico (X', τ') que serviu para mostrar que $\mathcal{C}_1 \nsubseteq \nabla(k)$ está em $\nabla(\theta)$, como facilmente se verifica. No entanto $\nabla(\theta)$ não é uma subcategoria constante à esquerda, uma vez que não é uma subcategoria 2-aditiva. Considere-se $Z = \{a, b, c, d, e\}$ e a topologia γ gerada por $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, e\}\}$. O espaço topológico (Z, γ) não pertence a $\nabla(\theta)$ porque $k(b) \cap k(c) = \{b, d\} \cap \{c, d\} \neq \emptyset$, mas $Z = A \cup B$, com $A = \{a, b, d\}$ e $B = \{a, c, e\}$, $A \cap B \neq \emptyset$ e $A, B \in \nabla(\theta)$ pois são isomorfos a (X', τ').

Lema 4.15 *Seja* $\mathrm{I} = [0, 1]$ *e* M *um subespaço topológico de um espaço* X. *Então*

$$\operatorname{coreg}^{\mathrm{I}}_X(M) = \{x \in X \mid (\exists c : [0,1] \longrightarrow X)\ c \text{ é contínua, } c(1) = x \text{ e } c(0) \in M\},$$

o que significa que $x \in \operatorname{coreg}^{\mathrm{I}}_X(M)$ *se existe um caminho de* M *para* x.

Demonstração: Se $x \in \mathrm{coreg}^{\mathrm{I}}_X(M)$ então existe uma função contínua $f : \mathrm{I} \times \mathrm{I} \longrightarrow X$ com $f(\delta_{\mathrm{I}}) \subseteq M$ e $x \in f(\mathrm{I} \times \mathrm{I})$. Como os conexos por caminhos são fechados para imagens, $f(\mathrm{I} \times \mathrm{I})$ é conexo por caminhos. Além disso, $f(\mathrm{I}\times\mathrm{I}) \cap M \neq \emptyset$ portanto existe um caminho entre x e algum elemento m de M.

Por outro lado se existir $c : [0, 1] \longrightarrow X$, com $c(1) = x$ e $c(0) = m \in M$, então a função $f : \mathrm{I} \times \mathrm{I} \longrightarrow X$ definida por $f(a, b) = c(|b - a|)$ é contínua, e além disso $f(\delta_{\mathrm{I}}) = \{m\} \subseteq M$ e $f(0, 1) = x$. ■

Atendendo a que, para $(x, y), (z, w) \in X \times X$, existe um caminho entre (x, y) e (z, w) se e só se existem caminhos em X entre x e z e entre y e w, é fácil verificar que $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathrm{I}})$ é a subcategoria dos espaços conexos por caminhos e, a subcategoria $\Delta(\mathrm{coreg}^{\mathrm{I}})$ é formada pelos espaços topológicos hereditariamente desconexos por caminhos, isto é, os espaços para os quais não exista nenhum caminho entre dois pontos distintos.

A subcategoria dos espaços conexos por caminhos não é constante à esquerda porque não contém $\mathcal{C}_1$. Para tal basta verificar que $\mathrm{I} \in \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathrm{I}})$ mas $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{x\in\mathrm{I}} \{x\}$ e portanto I não é absolutamente conexo.

Apesar de não ser constante à esquerda, a subcategoria dos conexos por caminhos é uma subcategoria componente, e a componente de um ponto $x \in X$, com $X \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, é o maior subespaço de X conexo por caminhos que contém x.

Temos então três subcategorias nabla, $\nabla(\theta)$, $\nabla(k)$ e $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathrm{I}})$, em que a última não está relacionada com as duas primeiras. O espaço topológico $X_{\aleph_0}$, definido anteriormente, é irredutível mas não é conexo por caminhos, enquanto que I está em $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathrm{I}})$ e não está em $\nabla(\theta)$. Em conclusão $\nabla(\mathrm{coreg}^{\mathrm{I}}) \nsubseteq \nabla(\theta)$ e $\nabla(k) \nsubseteq \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathrm{I}})$.

4.2 Operadores de fecho em categorias de módulos

Vamos denotar por $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ a categoria dos módulos à esquerda sobre o anel R. Um *pré-radical* $r : \mathcal{M}\mathrm{od}_R \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{od}_R$ é um subfunctor do functor identidade; ou seja, para $M \in \mathcal{M}\mathrm{od}_R$, $r(M)$ é um submódulo de M e, para $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de R-módulos, $f(r(M)) \subseteq r(f(M))$. Um pré-radical r é *finitamente produtivo,* isto é, $r(M \times N) = r(M) \times r(N)$ para quaisquer R-módulos M e N.

Vamos considerar a factorização $(Epi(\mathcal{M}\mathrm{od}_R), Mono(\mathcal{M}\mathrm{od}_R))$ de $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$.

Cada pré-radical define vários operadores de fecho, de entre os quais se salientam dois, que estudamos de seguida.

Definição 4.16 *Cada pré-radical r de $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ induz os seguintes operadores de fecho em Mod_R :*

(i) $\min^r_M(N) = r(M) + N$*;*

(ii) $\max^r_M(N) = \pi^{-1}(r(M/N))$;

onde $\pi : M \longrightarrow M/N$ representa a projecção canónica e N é um R-submódulo de M.

Eles chamam-se, respectivamente, operador de fecho minimal *e* maximal *induzido por r.*

Os nomes destes operadores de fecho devem-se ao facto de eles serem o menor e o maior operador de fecho em $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ de entre os que verificam $c_M(\mathbb{O}) = r(M)$ (ver [13]).

Cada pré-radical r define duas subcategorias de $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$:

$$\mathcal{F}_r = \{M \,|\, r(M) = \mathbb{O}\}, \text{ a } \textit{subcategoria dos } r\textit{-módulos livres,} \text{ e}$$

$$\mathcal{T}_r = \{M \,|\, r(M) = M\}, \text{ a } \textit{subcategoria dos } r\textit{-módulos de torsão.}$$

Se r for idempotente (isto é $r(r(M)) = r(M)$) então o par $(\mathcal{T}_r, \mathcal{F}_r)$ é uma *teoria de torsão* no sentido de [10].

Para mais pormenores sobre pré-radicais, operadores de fecho induzidos por eles e r-módulos livres ou de torsão, ver [12].

É de notar que as subcategorias livres e de torsão, duma teoria de torsão, são as subcategorias constantes à esquerda e à direita, respectivamente.

Como $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ tem pontos suficientes, é $Epi(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$-bem-copetenciada e $\mathcal{P}$ é fechada para imagens, então por 3.5 e por 3.6 todas as subcategorias constantes de $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ são da forma nabla ou delta. Ou seja, para um pré-radical r idempotente, as subcategorias dos r-módulos livres são nabla, e as subcategorias dos r-módulos de torsão são delta. Vamos ver, no entanto, que não é necessário que r seja idempotente para que tal se verifique.

Lema 4.17 *Seja r um pré-radical de $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$. Então:*

1. $\nabla(\min^r) = \nabla(\max^r) = \mathcal{T}_r$;
2. $\Delta(\min^r) = \Delta(\max^r) = \mathcal{F}_r$.

Demonstração: 1. Como $\min^r < \max^r$, $\nabla(\min^r) \subseteq \nabla(\max^r)$. Um módulo N está em $\nabla(\max^r)$ se e só se $\max^r_{N^2}(\delta_N) = N \times N$. Da equivalência $\max^r_{N^2}(\delta_N) = N \times N \iff \pi^{-1}(r(N \times N/\delta_N)) = \pi^{-1}(N \times N/\delta_N)$, e do facto de π ser sobrejectiva resulta que $r(N \times N/\delta_N) = N \times N/\delta_N$. Como $N \times N/\delta_N \cong N$, $N \in \nabla(\max^r)$ se e só se $N \in \mathcal{T}_r$.

Só falta ver que $\mathcal{T}_r \subseteq \nabla(\min^r)$. Se $N \in \mathcal{T}_r$, então $r(N) = N$. Sabe-se que r é finitamente produtivo e portanto temos que

$$\min^r_{N^2}(\delta_N) = \delta_N + r(N \times N) = \delta_N + r(N) \times r(N) = \delta_N + N \times N = N \times N.$$

2. Prova-se de maneira idêntica que $\mathcal{F}_r = \Delta(\max^r) \subseteq \Delta(\min^r)$.

Se $N \in \Delta(\min^r)$ então $\min^r(\delta_N) = \delta_N$, isto é $\delta_N + r(N \times N) = \delta_N$. Portanto $r(N) \times r(N) \subseteq \delta_N$, o que faz com que $r(N)$ seja um conjunto singular, logo $r(N) = \mathbb{O}$. ■

Em [23] é referido que $\nabla(\min^r) = \mathcal{T}_r$.

Corolário 4.18 *Seja r um pré-radical de $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$. Se c é um operador de fecho em $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ para o qual $c_M(\mathbb{O}) = r(M)$, então*

$$\nabla(c) = \mathcal{F}_r \;\; e \;\; \Delta(c) = \mathcal{T}_r.$$

4.3 Operadores de fecho em grupos

Vamos representar a categoria dos grupos e homomorfismos de grupos por $\mathcal{G}rp$, e a sua subcategoria dos grupos abelianos por $\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$.

Em $\mathcal{G}rp$ vai ser considerada a factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, em que $\mathcal{M}$ é a classe dos monomorfismos e $\mathcal{E}$ é a classe dos epimorfismos.

Tal como foi feito para os módulos, podemos definir operadores de fecho na categoria dos grupos à custa dos pré-radicais.

Um pré-radical especial é o definido pelo *comutador*:

$$k(G) =< xyx^{-1}y^{-1} \,|\, x, y \in G >,$$

para cada grupo$G$.

Só existe um operador de fecho c em $\mathcal{G}rp$ para o o qual $c_G(e) = k(G)$ ([13]), onde e representa o elemento neutro do grupo G. De maneira idêntica ao que foi feito em $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$, prova-se que $\Delta(c) = \{G \,|\, k(G) = \{e\}\} = \mathcal{A}b\mathcal{G}rp$ e que $\nabla(c) = \{G \,|\, k(G) = G\}$, que é a subcategoria dos *grupos perfeitos,* os grupos que coincidem com o seu comutador.

Lema 4.19 *O único operador de fecho c em $\mathcal{G}rp$ tal que $c_G(e) = k(G)$ para todo grupo G é o operador de fecho regular induzido por $\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$.*

Demonstração: Tem-se que

$$reg_G^{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(\{e\}) = \bigwedge\{\mathrm{ig}(f,h)|f,h : G \longrightarrow A,\, A \in \mathcal{A}b\mathcal{G}rp\}$$

e que $G/k(G)$ é um grupo abeliano. Definindo $f, h : G \longrightarrow G/k(G)$, onde f é a projecção canónica e $h(g) = k(G)$ para todo $g \in G$, o igualizador de f e h é $k(G)$ e portanto $reg_G^{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(\{e\}) \subseteq k(G)$. Por outro lado, para $f : G \longrightarrow A$, $A \in \mathcal{A}b\mathcal{G}rp$, e_A o elemento neutro de A e $x, y \in G$, $f(xyx^{-1}y^{-1})$ $= f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} = e_A$, porque f é um homomorfismo de grupos em que o conjunto de chegada é um grupo abeliano. Logo $k(G) \subseteq \mathrm{ig}(f,h)$ para todo $f, h \in \mathcal{G}rp(G, A)$. Pela Proposição 3.5, $l(\mathcal{A}b\mathcal{G}rp)$ é a subcategoria dos grupos perfeitos. ∎

O operador de fecho $c = reg^{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}$ pode ser definido por $c_G(H) = k(G).H$, da mesma maneira que o operador de fecho minimal em $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$.

Apesar de só haver um operador de fecho em $\mathcal{G}rp$ para o qual $c_G(\{e\}) = k(G)$, existe outro operador de fecho em $\mathcal{G}rp$ que dá origem à mesma subcategoria delta:

$$\nu_G(H) := \bigcap\{N : H \leq N \lhd G\} \text{ com } H \text{ subgrupo de } G;$$

ou seja, $\nu_G(H)$ é o menor subgrupo normal de G que contém H. Este operador de fecho é idempotente mas não é fracamente hereditário, logo não pode ser corregular.

Lema 4.20 *Para o operador de fecho* $\nu := (\nu_G)_{G \in \mathcal{G}rp}$,

$$\Delta(\nu) = \mathcal{A}b\mathcal{G}rp.$$

Demonstração: Se $G \in \Delta(\nu)$ então $\nu(\delta_G) = \delta_G$, ou seja δ_G é um subgrupo normal de $G \times G$. Por isso, o produto $(g, h^{-1}).(g, g).(g, h^{-1})^{-1}$ está em δ_G para todo o $g, h \in G$. O que origina a igualdade $g.g.g^{-1} = h^{-1}.g.h$, que é equivalente a $h.g = g.h$, para quaisquer $g, h \in G$.

Se G for um grupo abeliano, então $G \times G$ é abeliano, o que faz com que todo o seu subgrupo seja normal. ∎

4.4 Um operador de fecho em grafos

A categoria $\mathcal{SG}rf$ dos grafos espaciais dirigidos e homomorfismos de grafos dirigidos é a categoria cujo os objectos são conjuntos com uma relação reflexiva e os morfismos são as funções que preservam a relação. Vamos considerar $\mathcal{SG}rf$ munida da factorização $(Epi(\mathcal{SG}rf), Mono(\mathcal{SG}rf))$.

Em $\mathcal{SG}rf$ define-se o *fecho superior* $\uparrow$ por

$$\uparrow_X (M) = \{x \in X | (\exists y \in M)\, y \to x\};$$

$\uparrow$ é (fracamente) hereditário mas não é idempotente, e por isso não pode ser regular.

A subcategoria nabla induzida pelo fecho superior é formada pelos grafos X tais que,

$$(\forall x, y \in X)\, (\exists z \in X) : \{x, y\} \subseteq \uparrow (z) \qquad (x \leftarrow z \to y).$$

Considere-se o grafo $X = (a \to b \leftarrow c)$; tanto $\{a, b\}$ como $\{b, c\}$, com as respectivas subestruturas, pertencem a $\nabla(\uparrow)$ e a sua intersecção é não vazia, mas $X \notin \nabla(\uparrow)$. Logo $\nabla(\uparrow)$ não é 2-aditiva e consequentemente não é constante à esquerda.

Lema 4.21 *O fecho superior em $\mathcal{SG}rf$ é um operador de fecho corregular.*

Demonstração: Como em geral $\uparrow \geq \mathrm{coreg}^{\nabla(\uparrow)}$ só temos que provar que, para um subgrafo M de X, se $w \in \uparrow(M)$ então $w \in \mathrm{coreg}^{\nabla(\uparrow)}(M)$. Se $w \in \uparrow(M)$ então existe $(m \to w)$ para algum $m \in M$. Seja $A \in \nabla(\uparrow)$ o grafo $(x \leftarrow y \to z)$, sendo então A^2 o grafo da figura.

$$\begin{tikzcd}
(x,x) & (x,y) \arrow[l] \arrow[r] & (x,z) \\
(y,x) \arrow[u] \arrow[d] & (y,y) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & (y,z) \arrow[u] \arrow[d] \\
(z,x) & (z,y) \arrow[l] \arrow[r] & (z,z)
\end{tikzcd}$$

Diagrama de $A \times A$

Define-se então $h : A^2 \longrightarrow X$ por $h(x, z) = h(z, x) = w$ e $h(a, b) = m$ se $(a, b) \notin \{(x, z), (z, x)\}$, o que faz com que w esteja em $\mathrm{coreg}^{\nabla(\uparrow)}(M)$. ■

Usando agora 3.6, $\Delta(\uparrow) = \Delta(\mathrm{coreg}^{\nabla(\uparrow)})$ é constante à direita. A subcategoria $\Delta(\uparrow)$ é constituída pelos grafos espaciais discretos.

4.5 Morfismos separados e morfismos conexos

Nesta secção vamos abordar, de forma muito breve, o estudo de morfismos separados e conexos.

Sejam $\mathcal{X}$ uma categoria e $Y \in \mathcal{X}$. Uma factorização própria $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ em $\mathcal{X}$ induz uma factorização própria $(\mathcal{E}_Y, \mathcal{M}_Y)$ em $\mathcal{X}/Y$. Do mesmo modo, um operador de fecho c em $\mathcal{X}$ origina um operador de fecho c^Y em $\mathcal{X}/Y$. Um *morfismo* $f : X \longrightarrow Y$ é *c-separado* (*c-conexo*) se f é c^Y-separado (c^Y-conexo) como objecto de $\mathcal{X}/Y$, o que é equivalente a dizer que o morfismo $\delta_f = <1_X, 1_X>: X \longrightarrow X \times_Y X$ é c-fechado (c-denso).

Em [6] foram estudados os morfismos separados em relação a um operador de fecho. Estudo esse que foi alargado aos morfismos conexos em [8]. Aqui apenas veremos os morfismos como objectos de uma categoria fibrada.

Para $\mathcal{X} = \mathcal{T}\mathrm{op}$ e $c = k$, temos que uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$ é *k-separada* se cada uma das suas fibras $f^{-1}(y)$, com $y \in Y$, é k-separada, ou seja, $f^{-1}(y)$ é um espaço topológico de Hausdorff com a topologia de subespaço. Por outro lado, f é *k-conexa* se as suas fibras são irredutíveis. Daqui resulta que se $X \in \Delta(k)$ ($X \in \nabla(k)$) então para qualquer morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{T}\mathrm{op}$, $f \in \Delta(k^Y)$ ($f \in \nabla(k^Y)$). Aliás, este resultado é válido para qualquer operador de fecho hereditário.

Vejamos agora o que acontece para $c := \mathrm{coreg}^I$ em $\mathcal{T}\mathrm{op}$. A função contínua $f : X \longrightarrow Y$ é *c-conexa* se para todo $x, y \in X$ com $f(x) = f(y)$ existe um caminho $c : [0,1] \longrightarrow X$ com:

$$c(0) = x;\ c(1) = y;\ f(c(t)) = f(c(1-t)) \text{ para todo } t \in [0,1]. \qquad (*)$$

Para f ser *c-separada* é preciso que não existam dois pontos diferentes em X que verifiquem $(*)$.

Como c não é hereditário, existem funções de domínio conexo por caminhos que não são c-conexas. Para ilustrar este facto analisemos a função $g : \mathrm{I} \longrightarrow S^1$ definida por $g(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. O conjunto I é obviamente conexo por caminhos. Por outro lado $X \times_{S^1} X$ é igual a $\delta_\mathrm{I} \cup \{(0,1),(1,0)\}$, e portanto δ_I é c-separado em $X \times_{S^1} X$.

Na categoria $\mathcal{SG}rf$, para o fecho superior podemos dizer que $f : X \longrightarrow Y$ é $\uparrow$-conexo se para todo o par $x, y \in X$ tal que $f(x) = f(y)$ existe $z \in X$ que verifica: $x \leftarrow z \rightarrow y$.

O morfismo $f : X \longrightarrow Y$ é $\uparrow$-separado se para $x \neq y$ e $f(x) = f(y)$ não existe nenhum elemento de z de X tal que: $x \leftarrow z \rightarrow y$.

Bibliografia

[1] J.Adámek, H.Herrlich e G.Strecker, *Abstract and concrete categories*, Wiley, New York (1990).

[2] A.Arhangel'skiĭ e R.Wiegandt, Connectedness and disconnectedness in topology, *General Topology and Applications* **5** (1975) 9-33.

[3] F.Borceaux, *Handbook of categorical algebra, Basic category theory*, Cambridge University Press (1994).

[4] M.M.Clementino, On connectedness and disconnectedness, in:*Bolyai Society Math. Studies* **4**, *Topology with Applications* (Szekszárd, Hungary 1993) 71-92.

[5] M.M.Clementino, Constant morphisms and constant subcategories, *Applied Categorical Structures* **3** (1995) 119-137.

[6] M.M.Clementino, E.Giuli e W.Tholen, Topology in a category: Compactness, *Portugaliæ Mathematica* **53** (1996) 397-433.

[7] M.M.Clementino e W.Tholen, Separation versus connectedness, *Topology and its Applications* **75** (1997) 143-181.

[8] M.M.Clementino e W.Tholen, Separated and connected maps, *Applied Categorical Structures* (a aparecer).

[9] P.Cohn, *Universal algebra*, Evanston, New York (1965).

[10] S.Dickson, A thorsion theory for abelian categories, *Trans. Amer. Soc.* **121** (1966) 223-235.

[11] D.Dikranjan e E.Giuli, Closure operators I, *Topology Appl.* **27** (1987) 129-143.

[12] D.Dikranjan e E.Giuli, Factorizations, injectivity and compactnes in categories of modules, *Communications in Algebra* **19** (1991) 45-83.

[13] D.Dikranjan e W.Tholen, *Categorical structures of closure operators, with applications to topology, algebra and discrete mathematics*, Kluwer Academic Publishers (1995).

[14] P.J.Freyd e G.M.Kelly, Categories of continuous functors, I, *J.Pure Appl. Algebra* **2** (1972) 169-191.

[15] E.Giuli, S.Mantovani, W.Tholen, Objects with closed diagonals, *J.Pure Appl. Algebra* **51** (1988) 129-140.

[16] H.Herlich, Topologische reflexionen und coreflexionen, *Lecture Notes in Math.* **78** (Springer, Berlin 1968).

[17] S.MacLane, *Categories for the working mathematician,* Springer-Verleg, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[18] D.Petz, Generalized connectednesses and disconnectednesses in topology, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.* **24** (1981) 247-252.

[19] G.Preuβ, Über den E-zusammenhang und seine lokalisation, *Tese de Doutoramento* (Freie Universität, Berlin 1967).

[20] G.Preuβ, Connection properties in topological categories and related topics, *Lecture Notes in Math.* **719** (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg--New York).

[21] S.Salbany, Reflective subcategories and closure operators, *Lecture Notes in Math.* (Springer, Berlin 1976) 548-565.

[22] W.Tholen, Factorizations, fibres and connectedness, in:*Proc. Conference of Toledo-Ohio 1983, Sigma Ser. Pure Math.* **5** (Heldermann, Berlin 1984) 549-566.

[23] W.Tholen, Objects with dense diagonals, in:*Proc. Workshop on Categorical Topology, L'Aquila, Itália 1994*, Kluwer Academic Publishers (1995).

[24] J.A.Tiller, Component subcategories, *Quaest.Math* **4** (1980) 19-40.

Errata

Página	Linha	Onde está	Deveria estar
3	4	sub$X \to$ sub$X$	sub$X \to$ sub$Y$
10	-4	$t \cdot e_1 = e \cdot g$	$t \cdot e_1 = e \cdot f$
11	diagrama	g	f
11	4	$m = m \cdot 1_C$	$m = 1_C \cdot m$
19	6	f, por ser um epimorfismo extremal, pertence a $\mathcal{E}$.	$\mathcal{P}$ é fechada para subobjectos.
22	2	esquerda	direita
23	3, 6	$e_i \cdot t_i$	$e_i \cdot x_i$
33	2, 3	h_i	g_i
38	-8	$\vee$ representa o supremo	$\wedge$ representa o ínfimo
42	-3	$g \cdot \rho_X(m)$	$(g \cdot \rho_X)(m)$
43	Prop.3.4	$\mathcal{P}$ fechada para imagens	$\mathcal{E}$ fechada para quadrados
44	Prop.3.5	$\mathcal{P}$ fechada para imagens	$\mathcal{E}$ fechada para quadrados
45	Coro.3.6	$\mathcal{P}$ fechada para imagens	$\mathcal{E}$ fechada para quadrados
45	4	$\Delta \cdot \mathrm{reg} \dashv \nabla \cdot \mathrm{coreg}$	$\Delta \cdot \mathrm{coreg} \dashv \nabla \cdot \mathrm{reg}$
46	3	$(Epi(\mathcal{T}\mathrm{op}), Mono(\mathcal{T}\mathrm{op}))$	$(Epi(\mathcal{T}\mathrm{op}), RegMono(\mathcal{T}\mathrm{op}))$
49	12	$k((0,1)) = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$	$k((0,1)) = \{(0,1),(1,1)\}$
53	6	o subconjunto	um subconjunto
57	-8	idempotente	radical $(r(M/r(M)) = \mathbb{O})$ idempotente
58	1	pré-radical	radical
58	4	idempotente	radical idempotente
58	8	$\min^r < \max^r$	$\min^r \leq \max^r$
58	-3	$\nabla(c) = \mathcal{F}_r$ e $\Delta(c) = \mathcal{T}_r$	$\nabla(c) = \mathcal{T}_r$ e $\Delta(c) = \mathcal{F}_r$
60	-8	$(Epi(\mathcal{SG}rf), Mono(\mathcal{SG}rf))$	$(Epi(\mathcal{SG}rf), RegMono(\mathcal{SG}rf))$
62	-7, -6	$X \times_{S^1} X$	$I \times_{S^1} I$
62	-6	c-separado	c-fechado

Nota: No último parágrafo da página 57 é dito que $\mathcal{M}od_R$ tem pontos suficientes, o que é falso. No entanto, apesar das proposições 3.5 e 3.6 não se poderem aplicar, os seus resultados são válidos em $\mathcal{M}od_R$.