
Transformação tridimensional conforme:

1. Introdução

Esta transformação é representada genericamente por:

$$X_2 = s M^T X_1 + X_T \quad (1)$$

onde

- s é o factor escala
- $X_2 = [X \ Y \ Z]^T$ são as coordenadas de um ponto P depois da transformação,
- $X_1 = [x \ y \ z]^T$ são as coordenadas de um ponto P antes da transformação,
- M é a matriz da rotação sequencial $\omega - \phi - k$ a qual torna o sistema $\bar{X}_2$ paralelo a X_1 e contem no máximo 3 parâmetros independentes.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \text{ com } \begin{cases} m_{11} = \cos \phi \cos k \\ m_{12} = \cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \phi \cos k \\ m_{13} = \sin \omega \sin k - \cos \omega \sin \phi \cos k \\ m_{21} = -\cos \phi \sin k \\ m_{22} = \cos \omega \cos k - \sin \omega \sin \phi \sin k \\ m_{23} = \sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \phi \sin k \\ m_{31} = \sin \phi \\ m_{32} = -\sin \omega \cos \phi \\ m_{33} = \cos \omega \cos \phi \end{cases}$$

- $X_T = [T_x, T_y, T_z]^T$ é o vector translação

Ora, na prática acontece, frequentemente, que conhecemos as coordenadas de um conjunto de pontos nos dois sistemas (por exemplo as coordenadas modelo e coordenadas terreno) e pretendemos determinar os parâmetros de transformação. Este problema, que não é mais do que o problema inverso de uma transformação, pode então enunciar-se da seguinte forma: dadas as coordenadas de um conjunto de n pontos P_i em dois sistemas diferentes, X_1 e X_2 , determinar os parâmetros que caracterizam a transformação em causa.

Os diferentes métodos de resolução deste problema podem classificar-se em dois grupos: os métodos directos, nos quais os parâmetros são determinados em grupos separados e numa única etapa do processo; e os métodos iterativos onde os parâmetros são determinados simultaneamente em várias etapas sucessivas. Um dos vários métodos iterativos consiste em linearizar as equações $X_2 = s M X_1 + X_T$ e no caso de haver superabundância de observações aplicar o critério dos mínimos quadrados. Assim, tomando por observáveis as coordenadas dos pontos do segundo sistema (X_2) e por parâmetros as variáveis ($\omega, \phi, k, X_T, Y_T, Z_T, s$) a linearização da equação anterior pela fórmula de Taylor conduz-nos ao sistema de equações de observação:

$$Ax - t = v \quad (2)$$

onde:

- $A = \left[\frac{\partial F_i}{\partial s} \frac{\partial F_i}{\partial \omega} \frac{\partial F_i}{\partial \phi} \frac{\partial F_i}{\partial k} \frac{\partial F_i}{\partial X_T} \frac{\partial F_i}{\partial Y_T} \frac{\partial F_i}{\partial Z_T} \right]_{i=1,3} = [a_{ij}]_{i=1,3}^{j=1,7}$
- $t = X_2 - (F_i)^0 = X_2 - (s M^T X_1 + X_T)^0$
- $\begin{cases} F_1 = s(m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z) + T_x \\ F_2 = s(m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z) + T_y \\ F_3 = s(m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z) + T_z \end{cases}$

Os elementos a_{ij} da matriz A são dados na seguinte tabela:

$a_{11} = m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z$	$a_{21} = m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z$	$a_{31} = m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z$
$a_{12} = 0$	$a_{22} = -s(m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z)$	$a_{32} = s(m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z)$
$a_{13} = s[(-\sin \phi \cos k)x + (\sin \phi \sin k)y + (\cos \phi)z]$ $a_{23} = s[(\sin w \cos \phi \cos k)x + (-\sin w \cos \phi \sin k)y + (\sin w \cos \phi)z]$ $a_{33} = s[(-\cos w \cos \phi \cos k)x + (\cos w \cos \phi \sin k)y + (\sin w \sin \phi)z]$		
$a_{14} = s(m_{21}x - m_{11}y)$	$a_{24} = s(m_{22}x - m_{12}y)$	$a_{34} = s(m_{23}x - m_{13}y)$
$a_{15} = 1$	$a_{25} = 0$	$a_{35} = 0$
$a_{16} = 0$	$a_{26} = 1$	$a_{36} = 0$
$a_{17} = 0$	$a_{27} = 0$	$a_{37} = 1$

No caso de termos n pontos obteremos o seguinte sistema de equações:

$$\underset{(3n,7)}{A} \underset{(3n,1)}{x} - \underset{(3n,1)}{t} = \underset{(3n,1)}{v} \quad (3)$$

cuja solução de mínimos quadrados, considerando a matriz dos pesos P a identidade, é $x = (A^T A)^{-1} A^T t$ com a variância a posteriori

$$\sigma^2 = \frac{v^T v}{n - 3} \quad (4)$$

As aproximações iniciais podem ser determinadas da seguinte forma:

- escolhem-se três pontos ao acaso,
- com os dois primeiros determinamos as aproximações do factor de escala e do vector translação, da mesma forma que no método directo, depois de reduzirmos os pontos à mesma origem e escala, com os três pontos determinamos as aproximações iniciais dos parâmetros de rotação.

2. Objectivos

Dados os seguintes sistemas de coordenadas definidos por:

Nº Pt	Sistema 1:			Sistema 2:		
	X (m)	Y(m)	Z(m)	X (m)	Y(m)	Z(m)
100	1094.883	820.085	109.821	10037.81	5262.09	772.04
101	503.891	1598.698	117.685	10956.68	5128.17	783.00
102	2349.343	207.658	151.387	8780.08	4840.29	782.62
103	1395.320	1348.853	215.261	10185.80	4700.21	851.32
104	265.346	1003.470	78.609			
105	784.081	512.683	139.551			
106	501.201	1201.867	121.376			
107	197.211	2001.23	114.231			
108	1110.819	1456.639	211.111			
109	2112.231	400.234	222.121			
110	321.345	1221.743	99.982			
111	653.231	1111.219	134.382			
112	1823.672	600.389	123.519			
113	452.859	1010.457	111.273			

Determine:

1. Justificando, as expressões dos elementos da matriz A
2. Os parâmetros de transformação.
3. As coordenadas dos pontos em falta no segundo sistema.

Nota: Elabore um pequeno relatório que descreva o algoritmo utilizado e critique os resultados obtidos