Orientação externa de uma câmara:

1. Introdução

Definimos orientação externa de uma câmara (ou fotografia), como a operação que se executa para determinar os parâmetros que posicionam, no espaço objecto, terrestre ou cartográfico, a referida câmara. Analiticamente esta operação fica determinada pelo conhecimento das coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) do centro de projecção e da atitude angular do eixo óptico da câmara a qual é definida pelos ângulos (w, φ, k).

As equações que permitem estabelecer a orientação externa de uma fotografia podem ser derivadas das equações de colinearidade. De facto, designando por por:

- $\left(X_{\mathrm{C}},\ Y_{\mathrm{C}},\ Z_{\mathrm{C}}\right)$ - as coordenadas do centro de perspectiva *C* no sistema objecto,
- $\left(x_{\mathrm{c}},\ y_{\mathrm{c}},\ f\right)$ - as coordenadas do centro de perspectiva no sistema fotográfico,
- $\left(X,\ Y,\ Z\right)$ - as coordenadas do ponto *P* no sistema objecto,
- $\left(x,\ y, 0\right)$ - as coordenadas do ponto imagem *p* no sistema fotográfico.

A condição de colinearidade diz-nos que: o ponto objecto *P*, a sua imagem *p* na fotografia e a estação de exposição (centro de perspectiva) devem estar situados na mesma linha recta, ou seja:

$$\vec{r} = s M \vec{R} \tag{1}$$

Nesta equação, o vector $\vec{r} = [x - x_c, y - y_c, 0 - f]^T$ define a localização do ponto imagem *p*, o vector $\vec{R} = [X_P - Y_C, Y_P - Y_C, Z_P - Z_C]^T$ define a localização do ponto objecto *P*, *s* é o factor escala e *M* é a matriz de rotação.

Fazendo as respectivas substituições na equação , teremos:

$$\begin{cases} x - x_c = s\left[m_{11}\left(X - X_C\right) + m_{12}\left(Y - Y_C\right) + m_{13}\left(Z - Z_C\right)\right] \\ y - y_c = s\left[m_{21}\left(X - X_C\right) + m_{22}\left(Y - Y_C\right) + m_{23}\left(Z - Z_C\right)\right] \\ -f = s\left[m_{31}\left(X - X_C\right) + m_{32}\left(Y - Y_C\right) + m_{33}\left(Z - Z_C\right)\right] \end{cases} \tag{2}$$

Dividindo a 1ª e a 2ª equação pela 3ª e multiplicando por *-f* virá

$$\begin{cases} x - x_c = -f\,\dfrac{m_{11}\left(X - X_C\right) + m_{12}\left(Y - Y_C\right) + m_{13}\left(Z - Z_C\right)}{m_{31}\left(X_P - X_C\right) + m_{32}\left(Y_P - Y_C\right) + m_{33}\left(Z_P - Z_C\right)} \\ y - y_c = -f\,\dfrac{m_{21}\left(X - X_C\right) + m_{22}\left(Y - Y_C\right) + m_{23}\left(Z - Z_C\right)}{m_{31}\left(X - X_C\right) + m_{32}\left(Y - Y_C\right) + m_{33}\left(Z - Z_C\right)} \end{cases} \tag{3}$$

Designado por

$$\begin{cases} q = m_{31}\left(X - X_C\right) + m_{32}\left(Y - Y_C\right) + m_{33}\left(Z - Z_C\right) \\ r = m_{11}\left(X - X_C\right) + m_{12}\left(Y - Y_C\right) + m_{13}\left(Z - Z_C\right) \\ t = m_{21}\left(X - X_C\right) + m_{22}\left(Y - Y_C\right) + m_{23}\left(Z - Z_C\right) \end{cases} \tag{4}$$

e substituindo em (5.4) vem

$$\begin{cases} x = x_c - r\dfrac{f}{q} \\ y = y_c - t\dfrac{f}{q} \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = F(\omega, \phi, k, X_{\mathrm{C}}, Y_{\mathrm{C}}, Z_{\mathrm{C}}) \\ y = G(\omega, \phi, k, X_{\mathrm{C}}, Y_{\mathrm{C}}, Z_{\mathrm{C}}) \end{cases} \tag{5}$$

A linearização pela fórmula de Taylor dá

$$\begin{cases} F^0 + (\dfrac{\partial F_x}{\partial \omega})^\circ d\,\omega + (\dfrac{\partial F_x}{\partial \phi})^\circ d\,\phi + (\dfrac{\partial F_x}{\partial k})^\circ d\,k + (\dfrac{\partial F_x}{\partial X_C})^\circ d\,X_C + (\dfrac{\partial F_x}{\partial Y_C})^\circ d\,Y_C + (\dfrac{\partial F_x}{\partial Z_C})^\circ d\,Z_C = x \\ G^0 + (\dfrac{\partial F_y}{\partial \omega})^\circ d\,\omega + (\dfrac{\partial F_y}{\partial \phi})^\circ d\,\phi + (\dfrac{\partial F_y}{\partial k})^\circ d\,k + (\dfrac{\partial F_y}{\partial X_C})^\circ d\,X_C + (\dfrac{\partial F_y}{\partial Y_C})^\circ d\,Y_C + (\dfrac{\partial F_y}{\partial Z_C})^\circ d\,Z_C = y \end{cases}$$

onde:

- $F_x^\circ,\ F_y^\circ$ representam as funções F_x e F_y calculadas com os valores das aproximações iniciais dos parâmetros $\omega, \phi, \ldots, Z$.

- $(\ )^{\circ}$ representam as derivadas parciais calculadas, também, com os valores das aproximações iniciais dos parâmetros $\omega,\phi,\ldots,Z$.

Designando por:

- v_x os resíduos associados às fotocoordenadas x observadas (i.e. medidas) na fotografia,
- v_y os resíduos associados às fotocoordenadas y observadas na fotografia,
- $d\omega,\ d\phi,\ dk,\ dX_C,\ dY_C,\ dZ_C$ as correcções a aplicar às aproximações iniciais dos parâmetros de orientação da fotografia,
- $dX,\ dY,\ dZ$ as correcções a aplicar às aproximações iniciais das coordenadas objecto

a equação (5.6), em notação matricial, terá agora a forma $AX - t = v$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -b_{14} & -b_{15} & -b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & -b_{24} & -b_{25} & -b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega \\ d\phi \\ dk \\ dX_C \\ dY_C \\ dZ_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Nestas equações os coeficientes b's são obtidos a partir das derivadas parciais dos parâmetros de orientação e das coordenadas objecto. Estes coeficientes são dados por:

$$b_{11} = \frac{f}{q^2}[r(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - q(-m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z)]$$

$$b_{12} = \frac{f}{q^2}\left\{r\left[(\cos\phi)\Delta X + (\sin\omega\sin\phi)\Delta Y - (\cos\omega\sin\phi)\Delta Z\right] + \right.$$
$$\left. -q\left[-(\sin\phi\cos k)\Delta X + (\sin\omega\cos\phi\cos k)\Delta Y - (\cos\omega\cos\phi\cos k)\Delta Z\right]\right\}$$

$$b_{13} = -\frac{f}{q}(m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z)$$

$$b_{14} = \frac{f}{q^2}(rm_{31} - qm_{11})$$

$$b_{15} = \frac{f}{q^2}(rm_{32} - qm_{12})$$

$$b_{16} = \frac{f}{q^2}(rm_{33} - qm_{13})$$

$$b_{21} = \frac{f}{q^2}[t(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - q(-m_{23}\Delta Y + m_{22}\Delta Z)$$

$$b_{22} = \frac{f}{q^2}\left\{t\left[(\cos\phi)\Delta X + (\sin\omega\sin\phi)\Delta Y - (\cos\omega\sin\phi)\Delta Z\right] + \right.$$
$$\left. -q\left[(\sin\phi\sin k)\Delta X - (\sin\omega\cos\phi\sin k)\Delta Y + (\cos\omega\cos\phi\sin k)\Delta Z\right]\right\}$$

$$b_{23} = \frac{f}{q}(m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z)$$

$$b_{24} = \frac{f}{q^2}(tm_{31} - qm_{21})$$

$$b_{25} = \frac{f}{q^2}(tm_{32} - qm_{22})$$

$$b_{26} = -\frac{f}{q^2}(tm_{33} - qm_{23})$$

$$J = x - F^0 = x - x_c + f\,\frac{r}{q}$$

$$K = y - G^0 = y - y_c + f\,\frac{t}{q}$$

onde

$$\Delta X = X - X_C \quad ; \quad \Delta Y = Y - Y_C \quad ; \quad \Delta Z = Z - Z_C$$

2. Objectivos

Numa fotografia aérea quase-vertical, tirada por uma câmara com distância focal 152.916mm,conhecem-se as coordenadas imagem e objecto de quatro pontos de controlo dadas na tabela seguinte:

	Coordenadas imagem:		Coordenadas objecto:		
N^0 Pt	**x (mm)**	**y(mm)**	**X (m)**	**Y(m)**	**Z(m)**
A	86.421	-83.977	1286.102	1455.027	22.606
B	-100.916	92.582	732.181	545.344	22.299
C	-98.322	-89.161	1454.553	731.666	22.649
D	78.812	98.123	545.245	1268.232	22.336

Determine:

1. Justificando, as expressões dos elementos da matriz b
2. Os parâmetros de orientação externa da fotografia.

Nota: Elabore um pequeno relatório que descreva o algoritmo utilizado e critique os resultados obtidos