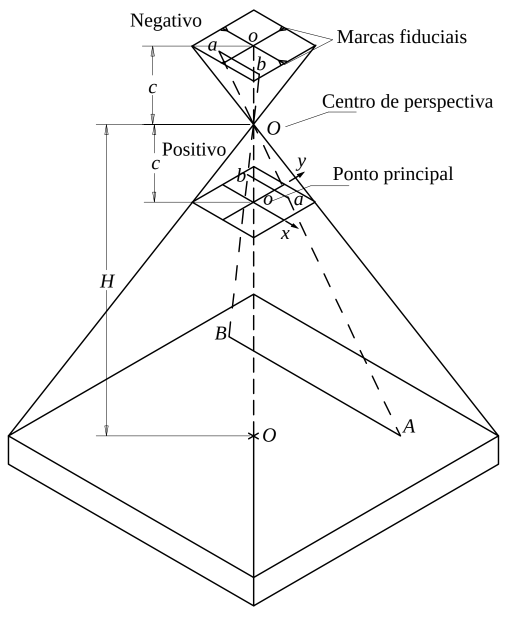
FOTOGRAMETRIA DIGITAL

TEXTOS DE APOIO

GIL GONÇALVES



UNIVERSIDADE DE COIMBRA – 2024

Departamento
de Matemática

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Conteúdo

1.1 Definições

A fotogrametria é etimologicamente composta pelas três palavras gregas seguintes: Photos ($\varphi\omega\tau o\zeta$), que significa "Luz", Graphein ($\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$) que significa "Escrever"ou "Desenhar"e Metron ($\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$) que significa "Medir". Tomando as três palavras no seu conjunto, podemos dizer que fotogrametria significa medir a partir de fotografias. A Sociedade Americana de Fotogrametria e Deteção Remota (ASPRS - American Society of Photogrammetry and Remote Sensing) define a fotogrametria como "a arte, ciência e tecnologia que, a partir do registo, medição e interpretação de fotográfias aéreas e terrestres, obtém informação fiável sobre os objectos físicos e meio ambiente fotografados."(ASPRS, 2013)

Nesta definição estão incluídos dois aspectos distintos da fotogrametria:

- Quantitativo ou geométrico, o qual engloba medições dimensionais precisas cuja finalidade é a determinação de informação directa (por ex. a forma e tamanho) ou derivada (por ex. a mudança de velocidade ou volume) sobre os objectos fotografados.
- Qualitativo ou semântico, o qual engloba o reconhecimento e a interpretação dos objectos fotografados.

A Fotogrametria como Ciência emprega um amplo espectro de princípios e métodos matemáticos subjacentes à Algebra Linear e Geometria Analítica, às Probabilidades e Estatística e à Análise Numérica. Soluciona problemas através de modelos matemáticos os quais utilizam como input básico a informação numérica obtida a partir de fotografias ou imagens. Assim, são utilizados modelos matemáticos apropriados para descrever as relações geométricas existentes entre os pontos do espaço objecto e as correspondentes imagens e erros do sistema fotogramétrico. O material básico utilizado na fotogrametria são as fotografias, ou mais recentemente, fogotografias digitais, que designamos habitualmente por imagens. A fotografia é considerada aqui como uma projecção (perspectiva) central do objecto fotografado, sendo o centro de perspectiva do sistema de lentes da câmara o centro de projecção.

1.2 História da fotogrametria

A definição de fotogrametria tem vindo a mudar ao longo da sua história em resultado do desenvolvimento científico e tecnológico ocorrido em diversas áreas do conhecimento. Segundo (Konecny, 1985), é possível identificar 4 grandes fases do desenvolvimento da fotogrametria diretamente relacionadas com as invenções tecnológicas da fotografia, dos aviões, dos computadores e da eletrónica (ver figura 1.1).

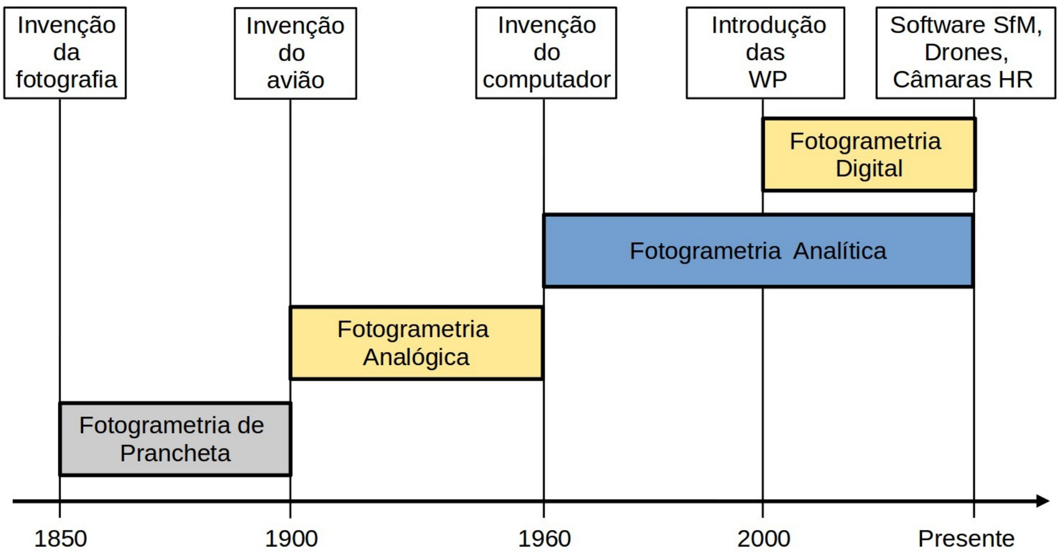


Figura 1.1: Linha temporal da evolução da fotogrametria. Legenda: WP = Workstations fotogramétricas, HR = alta resolução

- **Fotogrametria de prancheta [1850-1900]**: é uma extensão da prancheta de levantamento da topografia tradicional. Recorrendo a duas ou mais fotografias terrestres dum objeto, tiradas de pontos de vista diferentes, e a técnicas de triangulação gráfica permitiam medir e cartografar, numa mesa de desenho, o objeto ou cena fotografada (Konecny, 1985). Esta tecnologia tinha uma vantagem sobre a prancheta topográfica, na medida em que o trabalho de campo podia ser efectuado rapidamente e que qualquer ponto situado no campo de visão podia ser cartografado posteriormente no escritório. Laussedat, que foi o pioneiro desta tecnologia na década de 1850, desenvolveu um modelo matemático para converter vistas perspetivas sobrepostas em projecções ortográficas de qualquer plano. Este procedimento permitiu a determinação da posição e altitude de qualquer ponto visível em duas fotografias sobrepostas.
- **Fotogrametria Analógica "Clássica"[1900-1960]**: é caracterizada pela invenção da estereofotogrametria por Pulfrich (1901), a qual, baseando-se na reconstrução das diferentes posições da câmara aérea e utilizando métodos mecânicos e/ou óticos, permitia extrair informação a partir destas fotografias analógicas tiradas por câmaras de filme. Esta fase aproveitou o desenvolvimento dos aviões em 1903 pelos

irmãos Wright, os quais se tornaram operacionais durante a primeira guerra mundial. Entre as duas guerras mundiais, foram construídos os principais fundamentos das técnicas de levantamento aéreo, que se mantêm até hoje. Os instrumentos de retificação analógica e de estereorestituição, baseados em tecnologia mecânica e ótica, tornaram-se amplamente disponíveis. A Aerofotogrametria estabeleceu-se como um método eficiente de levantamento para fins cartográficos. A teoria matemática básica era conhecida, mas a quantidade de cálculos era proibitiva para soluções numéricas e, consequentemente, todos os esforços foram direccionados para métodos analógicos.

- **Fotogrametria Analítica [1960-2000]**: com o advento do computador, o processo de reconstrução da fotogrametria analógica, que era feito mecanicamente, foi substituído por métodos numéricos executados num computador. Schmid, que foi um dos primeiros fotogrametristas a ter acesso a um computador, desenvolveu, nos anos 50, as bases da fotogrametria analítica, utilizando a álgebra matricial. Pela primeira vez, é feita uma tentativa séria de aplicar a teoria do ajustamento de observações às medições fotogramétricas. Foram ainda necessários vários anos até estarem disponíveis os primeiros softwares operacionais de fotogrametria analítica. Brown desenvolveu, no final dos anos sessenta, o primeiro programa de ajustamento de um bloco de imagens baseado em feixes perspectivos. Pouco tempo depois Ackermann apresentou um programa de ajustamento de um bloco de imagens utilizando os modelos independentes como conceito subjacente. A introdução destes modelos matemáticos, permitiu aumentar o desempenho da exatidão da triangulação por um fator de dez. Para além da triangulação aérea, o esterorestituidor analítico é outra das principais invenções desta terceira fase. No entanto, observa-se novamente um desfasamento temporal entre a inovação tecnológica e a sua introdução na prática fotogramétrica. Helava inventou o plotter analítico no final dos anos cinquenta. No entanto, os primeiros instrumentos só ficaram disponíveis ao público nos anos setenta.

- **Fotogrametria Digital [2000-Presente]:** esta é a fase atual da fotogrametria. Apesar de utilizar modelos matemáticos muito similares aos da fotogrametria analítica, a fotogrametria digital caracteriza-se pelo uso generalizado de tecnologias digitais, automáticas e semi-automáticas, em todas as etapas do processo fotogramétrico. Desde a aquisição de imagens e passando pelo processamento, análise e interpretação de imagens a fotogrametria digital utiliza câmaras digitais de alta resolução, algoritmos avançados de visão computacional (por exemplo, SfM-MVS - Structure-from-Motion e Multi-View-Stereo) e inteligência artificial, para a reconstrução 3D rápida, eficiente e com grande qualidade geométrica do objecto ou cena fotografada. Nesta era, que se estende desde o início do século XXI até o presente, a fotogrametria digital tem desempenhado um papel central na aquisição e análise de dados geoespaciais. Tem impulsionado a inovação em diversas áreas da engenharia, da agricultura, da monitorização ambiental e do planeamento rural e urbano, promovendo uma compreensão mais profunda e detalhada do nosso planeta em constante mudança.

Em Portugal, tendo em conta o conjunto mais antigo de fotografias aéreas verticais existente no arquivo do Centro de informação Geoespacial do Exército (CIGeoE), terá sido nos anos 30 que se efetuaram os primeiros levantamentos aerofotogramétricos com fins cartográficos (Marques e Redweik, 2010). Os trabalhos de estereorestuitição terão sido inicializados em 1937 com o sistema Multiplex de Baush and Lomb (Gruner, 1962)? e substituídos, em 1940, pelos estereorestituidores Wild A5 e A6 dando origem à produção da carta topográfica militar à escala 1:25000.

Entre Maio e Agosto de 1947 a British Royal Air Force (RAF) realizou a primeira cobertura aérea de Portugal. As fotografias de formato 23 cm × 23 cm, com uma escala aproximada 1:30000 e organizadas em fiadas orientadas na direção este-oeste, destinavam-se à produção da série cartográfica militar à escala 1:25000 (Redweik et al., 2010). Mais tarde, em 1958, a força aérea dos Estados Unidos (USAF) realizou uma nova cobertura nacional destinada à produção da série cartográfica à escala 1:50000.

No sector industrial, a produção de cartografia por técnicas fotogramétricas para escalas grandes (1:2000 e 1:5000) foi iniciada em 1937 pela Sociedade Portuguesa de Levantamentos Aéreos Limitada (SPLAL). Esta empresa, que possuía aviação própria, foi também o principal adjudicatário das coberturas aerofotogramétricas para os antigos Serviços Cartográficos do Exército e Instituto Geográfico Cadastral.

1.3 Aplicações

Historicamente a aplicação mais frequente da fotogrametria é a produção de cartografia topográfica. Os produtos clássicos gerados habitualmente neste processo são: os ortomosaicos e os modelos digitais de superfície e de terreno. No entanto, dada a versatilidade da fotogrametria e das actuais tecnologias digitais que utiliza, ela é ainda utilizada em diversas áreas, das quais salientamos:

1. Topografia e Cartografia. Os métodos fotogramétricos são os mais eficientes para produção de cartografia topográfica a várias escalas, as quais são cruciais na implementação dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da ONU, tais como o planeamento rural e urbano, a gestão dos recursos naturais, a conservação ambiental e a adaptação às alterações climáticas.

2. Engenharia e Construção civil. No mundo da engenharia, a fotogrametria com drones permite avaliar com rapidez e eficácia os locais para construção, e criar imagens perspectivas e renderizações 3D. Os engenheiros podem produzir imagens sintéticas da implementação de uma dada obra, além de monitorizarem com grande resolução espacial e temporal a sua construção.

3. Preservação e digitalização 3D do património cultural. Utilizando técnicas avançadas de aquisição e processamento de imagens, a fotogrametria permite a criação de modelos tridimensionais detalhados e exactos de monumentos históricos, objectos e locais arqueológicos. Além disso, esta digitalização contribui também para a sua divulgação e democratização, promovendo a preservação da identidade cultural e histórica de uma sociedade para as gerações futuras.

4. Sector imobiliário. Utilizando levantamentos aéreos pormenorizados é possível realçar os anúncios imobiliários, oferecendo aos potenciais compradores visões imersivas e abrangentes sobre o localização do imóvel e o seu contexto ambiental

5. Industrias criativas e de entretenimento. Na indústria do cinema e dos jogos, a fotogrametria alimenta o design de cenários, a construção de mundos virtuais e a criação de efeitos especiais, possibilitando ambientes realistas, experiências imersivas e representações historicamente precisas de mundos virtuais.

6. Aplicações Médicas. Os modelos 3D provenientes de tecnologias fotogramétricas são úteis para uma variedade de utilizações relacionados à saúde. Juntamente com a tecnologia de deteção remoto podem ser utilizados a gerar diagnósticos sem procedimentos invasivos.

7. Investigação criminal. A documentação e medição precisa duma cena de crime é muitas vezes requerida em tribunal para compreender em 3 dimensões o que pode fisicamente acontecer.

8. Desporto. O rastreamento e análise espacial dos movimentos dos atletas pode ajudar os treinadores a perceber os movimentos corporais dos atletas e a melhorar a sua performance.

1.4 Organização dos Textos de Apoio

O capítulo 2 aborda os conceitos elementares em fotogrametria aérea e terrestre, essenciais para compreender os princípios e técnicas utilizados na aquisição, processamento e análise de imagens. Este capítulo começa por explorar os fundamentos da fotografia aérea vertical e discute a geometria das imagens capturadas a partir duma plataforma aérea. São discutidos os conceitos sobre escala, cobertura e deslocamento devido ao relevo. De seguida é introduzido o conceito de fotografia oblíqua, uma técnica importante que expande as possibilidades de aquisição de dados ao permitir a captura de imagens com diferentes atitudes, essencial para a obtenção de informações detalhadas sobre áreas de difícil acesso ou com características específicas, como encostas íngremes, edifícios altos ou áreas urbanas densas, onde a fotografia vertical pode não ser suficiente para obter todos os detalhes necessários. A estereoscopia é outro tema abordado neste capítulo, que é fundamental para a interpretação e análise de imagens em 3D. Entender os princípios da estereoscopia e como reconstruir a profundidade a partir de imagens bidimensionais é essencial para a interpretação correta das informações contidas nas imagens fotogramétricas. Por último, são discutidas diversas transformações geométricas que são aplicadas no processamento de imagens fotogramétricas, tanto no espaço bidimensional como no espaço tridimensional. Estas transformações de coordenadas são indispensáveis em fotogrametria, quer para a correcção de distorções geométricas, como para registar conjuntos de dados, orientar câmaras e reconstruir a geometria de aquisição. Elas constituem a espinha dorsal dos fluxos de trabalho fotogramétricos, permitindo a extracção de dados 3D fiáveis a partir de imagens 2D.

O capítulo 3 aborda os aspectos fundamentais da utilização de câmaras digitais em fotogrametria, imprescindíveis para garantir a qualidade de imagem, a exatidão e precisão dos produtos fotogramétricos. Começa com uma introdução destacando a importância desses dispositivos na aquisição de imagens. São discutidos os componentes básicos das câmaras, como lentes e sensores, e as suas influências na qualidade das imagens. De seguida, são exploradas as características específicas das câmaras digitais, tais como os tipos de sensores (CCD e CMOS) e os formatos de arquivo de imagem. A relação entre o tamanho do pixel do sensor e a resolução espacial das imagens é analisada, enfatizando sua relevância para a obtenção dos conceitos precisão e exatidão fotogramétricos. O processo de calibração da câmara é apresentado de forma sumária, dando ênfase aos processos de calibração de câmaras fotogramétricas e às distorções radiais e tangenciais presentes das lentes utilizadas em fotogrametria. Por último, são examinados os aspectos relacionados ao processo de exposição da imagem, incluindo o controlo da abertura do diafragma e a sensibilidade ISO.

O capítulo 4 aborda os processos fundamentais da Fotogrametria Analítica que permitem determinar de forma automática e com rigor as características geométricas dos objectos a partir de duas ou mais imagens aéreas ou terrestres. Começa com as equações de colinearidade que descrevem a relação entre os pontos terreno 3D e suas projeções 2D nas imagens. De seguida é estudada a orientação interna da câmara (ou imagem), que considera os parâmetros que desempenham um papel crucial na reconstrução da geometria de um feixe de raios duma determinada imagem. Esses parâmetros definem de forma rigorosa como os raios de luz duma dada cena passam pela lente da câmara e são projetados no plano do sensor. Ao conhecer os parâmetros de orientação interna, tais como, o comprimento focal, o ponto principal e as distorções da lente, podemos modelar com exatidão a geometria de projeção da câmara. A orientação externa é discutida para determinar a posição e orientação da câmara em relação ao terreno fotografado, com diferentes casos e modelos matemáticos apresentados. A orientação de pares de imagens estéreo é essencial para gerar modelos tridimensionais precisos, abordando pontos de ligação, geometria epipolar e métodos para calcular a orientação relativa e absoluta. A geometria epipolar e a normalização de imagens são exploradas para facilitar a correspondência estéreo. Por último, são discutidos os métodos manuais de reconstrução 3D do espaço objecto a partir de imagens, tanto monoscópicos como estereoscópicos, destacando sua importância na produção de produtos fotogramétricos de alta qualidade.

O capítulo 5 aborda o processo de aerotriangulação, o qual consiste em determinar as coordenadas terrestres de pontos individuais em grandes blocos de imagens com base em medições de coordenadas fotográficas desses pontos que são visíveis nas imagens desse bloco. Este método fotogramétrico, também desinado por fototriangulação (quando aplicado em fotogrametria terrestre) permite densificar o apoio terrestre necessário ao ajustamento simultâneo do feixe de raios gerado por cada imagem pertencente ao bloco fotogramétrico. Este capítulo começa por introduzir a importância e a complexidade da aerotriangulação. De seguida, é descrito o modelo matemático utilizado no ajustamento, incluindo a formação das equações de observação que são essenciais para a determinação precisa das coordenadas terrestres a partir de imagens aéreas. Os aspectos numéricos do ajustamento são depois discutidos de forma geral, fornecendo, no entanto, alguns detalhes sobre a formação e redução das equações normais e destacando a importância da precisão numérica neste processo. A questão das aproximações iniciais é também abordada realçando a sua importância para a constituição duma base sólida para o ajustamento posterior. De seguida, são discutidos os assuntos relativos ao planeamento e apoio de coberturas aero-fotogramétricas, começando pelo caso das câmaras analógicas e terminando com o caso das câmaras digitais. No final, são descritos de forma sucinta os principais métodos utilizados na avaliação do ajustamento por feixes perspectivos, ou seja, sobre a qualidade da aerotriangulação analítica.

No capítulo 6, é estudado o processo da geração de modelos digitais de superfície e de ortomosaicos. Começa-se por descrever a visão computacional estereoscópica através da correlação de imagens a qual é crucial para reconstruir a superfície terrestre a partir de imagens. De seguida, analisa-se em primeiro lugar a correlação de imagens em 1D e depois em 2D. Após a reconstrução da superfície topográfica, analisa-se o processo de geração de ortoimagens e ortomosaicos através da rectificação diferencial de cada imagem do projecto fotogramétrico, seguida da mosaicagem das respectivas ortoimagens.

O capítulo 7, sobre a fotogrametria digital com drones, aborda os fundamentos e aplicações da tecnologia drone em processos fotogramétricos. Começa por contextualizar a utilização de drones (também designados por Sistemas Aéreos Não Tripulados - SANT) em fotogrametria, destacando a sua importância, evolução e as diversas aplicações. De seguida, são discutidos os diferentes tipos de drones, as suas características e apresentados os aspectos mais relevantes para a sua correcta utilização em fotogrametria. Depois é abordado o planeamento e a aquisição de coberturas fotogramétricas aéreas, incluindo os diferentes métodos de planeamento de voo, a sobreposição de imagens e a seleção de equipamentos adequados. O workflow do processamento fotogramétrico é de seguida descrito passo a passo, desde a aquisição das imagens até a geração dos produtos finais, como ortofotos modelos digitais de Superfície (MDS) e nuvens de pontos 3D. Por último, é explorada a utilização de software de código aberto para o processamento e análise de dados fotogramétricos, e são dados exemplos de softwares disponíveis e algumas as instruções básicas para a sua utilização. Para demonstrar a aplicação prática da fotogrametria com drones em cenários reais são incluídos Casos de Estudo, destacando os desafios encontrados e os resultados obtidos.

O capítulo 8 aborda os Sistemas de Varrimento Laser, muitas vezes designados por LiDAR (Light Detection And Ranging), que é uma tecnologia de mapeamento 3D fundamental em diversas aplicações, tais como: Topografia e Cartografia, Engenharia Civil, Planeamento Urbano, Floresta Gestão Florestal e Recursos Naturais, Monitorização Ambiental, Arqueologia e Património. Começa com uma introdução geral sobre a importância e aplicação desses sistemas em diversas áreas. De seguida, explora os princípios básicos das medições nos sistemas de varrimento laser, incluindo técnicas como a medição por tempo de voo e por comparação de fase. O capítulo prossegue com a discussão sobre a georreferenciação dos pontos LiDAR, destacando os principais métodos e técnicas utilizados na literatura, incluindo um estudo de caso com o Scanner Riegl LMS-Q680i. Posteriormente, aborda-se a calibração do sistema, apresentando métodos expeditos e rigorosos, além da técnica de Registro de Pontos Iterativo (ICP). De seguida, são discutidos os métodos de filtragem que permitem classificar os pontos LiDAR como pontos terreno, com um foco especial no método de filtragem por densificação progressiva de uma Rede Irregular de Triângulos (TIN). O planeamento de voo é depois apresentado como um tópico essencial para a obtenção de dados LiDAR de alta qualidade, tendo especial atenção aos parâmetros relacionados com a altitude, a velocidade de voo e o ângulo de varredura. Finalmente, o capítulo apresenta os sistemas terrestres de varrimento laser (STVL), onde se detalham os métodos de medição, a análise de erros e os procedimentos de campo, incluindo exemplos específicos de erros comuns e suas soluções. São ainda apresentados dois apêndices que discutem a representação de rotações no espaço 3D e o ajustamento de funções Gaussianas, respectivamente, os quais adicionam informação relevante para o processamento e análise de dados LiDAR.

Referências

ASPRS (2013). *Manual of Photogrammetry*. Ed. por J. Chris McGlone. 6th. ASPRS - American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, p. 1318. ISBN: 1570830991, 9781570830990.

Gruner, H (1962). «The History of the Multiplex *». Em: *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing* 28.July, pp. 480–484.

Konecny, Gottfried (1985). «The International Society for Photogrammetry and Remote Sensing-75 Years Old, or 75 Years Young». Em: *Photogramm Eng Rem S* 51.7, pp. 919–933.

Marques, António Manuel Guerreiro e Paula Redweik (2010). «Recuperação rádio-gemétrica e catalogação digital de coberturas aéreas antigas da zona de Lisboa». Em: *Boletim do IGeoE* 72, p. 10. URL: https://core.ac.uk/download/pdf/12423291.pdf.

Redweik, Paula et al. (2010). «Triangulating the Past; Recovering Portugal's Aerial Images Repository». Em: *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* 76.9, pp. 1007–1018. ISSN: 00991112. DOI: 10.14358/PERS.76.9.1007.

Capítulo 2

Conceitos elementares de fotogrametria aérea e terrestre

Conteúdo

2.1 Fotografia aérea vertical

2.1.1 Geometria da fotografia

Uma fotografia (ou imagem) diz-se vertical se no instante de exposição o eixo da câmara estiver aprumado (ou aproximadamente). No caso de o eixo da câmara ser exactamente vertical a fotografia é dita rigorosamente vertical ou que tem zero tilt. Os elementos principais de uma fotografia vertical estão ilustrados na figura 2.1. Teoricamente, os raios luminosos emergentes do objecto situado na superfície topográfica passam pelo centro de perspectiva O (ou estação de exposição), o qual coincide com o centro óptico do conjunto de lentes da câmara e são registados na superfície plana do filme (negativo). O negativo está localizado atrás do sistema de lentes a uma distância igual à distância focal c da câmara. Os positivos, obtidos por contacto a partir dos negativos, são depois utilizados, nos instrumentos de fotogrametria, na medição das fotocoordenadas dos pontos imagem. Como veremos mais tarde o objectivo principal das marcas fiduciais é a definição do ponto principal o, isto é do ponto de intersecção do eixo optico da câmara com o plano do negativo. Note-se que embora na figura 2.1 e por razões de comodidade, o ponto principal parece ser coincidente com o centro fiducial, na prática isto raramente acontece.

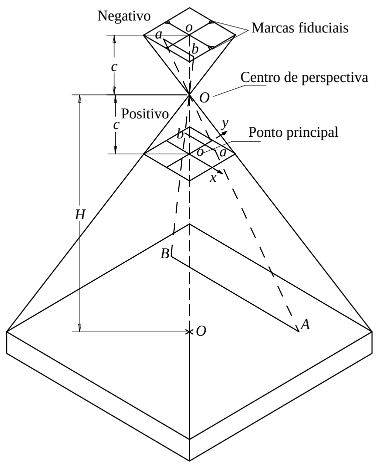


Figura 2.1: Geometria da fotografia aérea vertical

2.1.2 Escala e cobertura

Consideremos a figura 2.2 na qual designamos por:

- c a distância focal da câmara
- H a altura de voo relativa ao Datum D
- h_A e h_B as cotas dos pontos A e B.

O conceito de escala é comummente interpretado como a razão entre uma distância medida no desenho (mapa) e a correspondente distância real. Para a fotografia dita rigorosamente vertical e no caso de o terreno ser plano (figura 2.4-a), de cota constante e coincidente com o datum D a escala fotográfica relativa a esse datum é:

$$S_D = \frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{c}{H}$$

No caso do terreno não ser plano a escala de um ponto qualquer situado à cota h (S_h) é

$$S_h = \frac{c}{H-h} \tag{2.1}$$

Para se estabelecer, na fotografia uma única escala calcula-se a cota média da área de terreno fotografado (h_m) e determina-se a escala média (S_m) da fotografia supondo que todos os são projectados no plano de cota média, isto é:

$$S_m = \frac{c}{H-h_m} \tag{2.2}$$

A equação 2.2 permite-nos concluir que para uma dada altura de voo quanto maior for a distância focal da câmara maior será a escala da fotografia. E, inversamente, para uma dada distância focal, quanto menor for a altura de voo maior será a escala da fotografia.

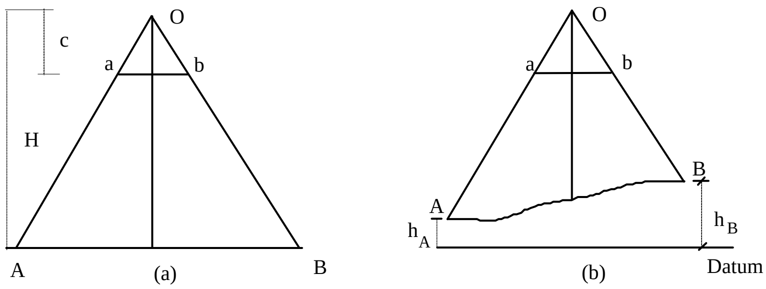


Figura 2.2: Escala da fotografia

2.1.3 Deslocamento devido ao relevo

Para que uma fotografia aérea vertical represente uma carta topográfica, na qual a escala é constante em qualquer parte desta, é necessário que o eixo da câmara seja rigorosamente vertical e que o terreno fotografado seja plano e nivelado. Desta forma, a presença do relevo topográfico e a presença do tilt fotográfico fazem com que a escala da fotografia varie de um ponto imagem para outro ponto imagem. Mais ainda, atendendo a que durante o voo não é possível controlar com exactidão a altura de voo, existirão, portanto, pequenas diferenças de escala de fotografia para fotografia. Assim, cada um destes efeitos provoca na fotografia um deslocamento do ponto imagem relativamente a uma posição teórica que este ocuparia num mapa à mesma escala.

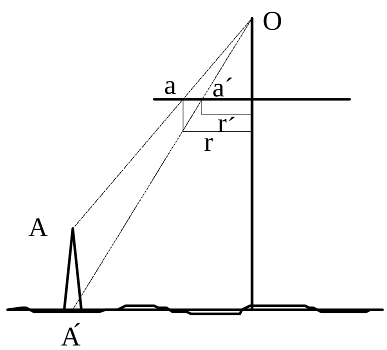


Figura 2.3: Deslocamento devido ao relevo

Vejamos, em primeiro lugar, qual o valor do deslocamento de um ponto imagem causado pela diferença de escala. Designando por:

- S_c a escala desejada (teórica) da fotografia
- S_p a escala real (observada) da fotografia
- r_c a distancia radial do ponto imagem na escala teórica
- r_p a correspondente distancia radial observada
- M o factor de ampliação ou redução da escala fotográfica

e tomando para $M = \frac{S_c}{S_p} = \frac{r_c}{r_p}$, o deslocamento da imagem provocado pela diferença de escala é dado por

$$ds = r_c - r_p = r_c \left(1 - \frac{S_p}{S_c}\right)$$

ou ainda

$$ds = r_p(M-1)$$

Um outro aspecto no qual a fotografia difere de uma carta topográfica é o efeito provocado pelo relevo topográfico. A análise da equação 2.1 diz-nos que a escala da fotografia varia de acordo com a altura h dos objectos fotografados. Assim, os objectos situados no topo das elevações são fotografados a uma escala maior do que os objectos situados no sopé das elevações (ou nos vales).

O efeito do relevo topográfico pode, também, ser considerado como uma componente do deslocamento da imagem. De facto, consideremos a Figura 2.3 na qual

- r é a distancia, na fotografia, do centro ao topo do objecto,
- r' é a distância, na fotografia, do centro à base do objecto,
- de é o deslocamento radial,

Concluimos que

$$de = r - r'; \qquad R' = r'\frac{H}{c}; \qquad R = r\frac{H-h}{c}$$

Ou seja

$$de = r\frac{h}{H} \qquad \text{ou} \qquad de = r'\frac{h}{H-h} \tag{2.3}$$

Note-se que em qualquer fotografia vertical a direcção do deslocamento da imagem devido ao relevo é radial relativamente ao ponto nadir. Por outro lado, a equação anterior também nos permite determinar a altura h de um objecto, em função dos valores do deslocamento e da distância radial, medidos na fotografia. De facto da equação anterior vem:

$$h = H\frac{de}{r} \tag{2.4}$$

Exercício 2.1

Numa fotografia vertical tirada a uma altitude de 535 m a base de uma torre situa-se a uma altiude 259 m. Sabendo que o deslocamento da torre, na fotografia, devido ao relevo é de 54.1 mm e que a distância radial ao topo da torre é de 121.7mm, calcule a altura da torre.

Solução 2.1

$h = 123\ m$

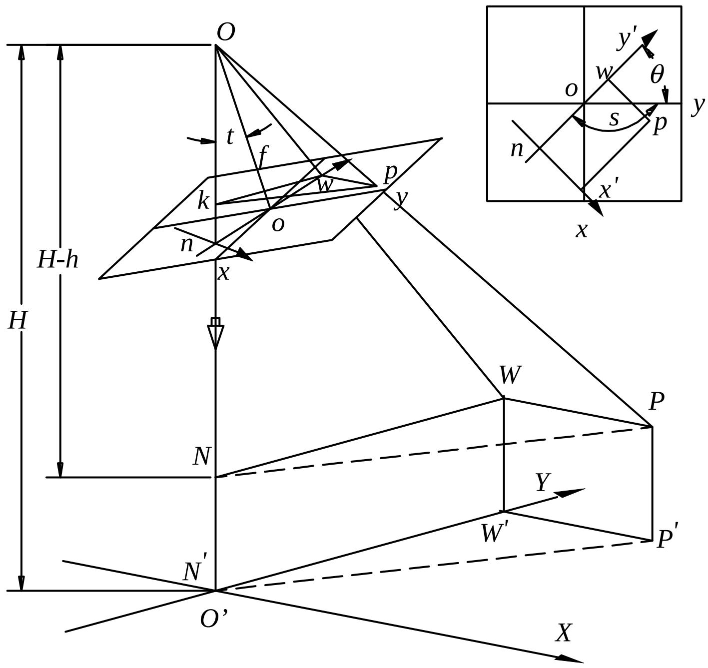


Figura 2.4: Fotografia aérea quase vertical.

2.2 Fotografia oblíqua

2.2.1 Fotografia aérea quase vertical

Como já vimos, é praticamente impossível conseguir fotografias aéreas rigorosamente verticais. Assim, a maior parte das fotografias verticais (mais de 50%) são tiradas com um tilt inferior a 2^o e raríssimas apresentam tilts superiores a 3^o.

O efeito provocado pelo tilt fotográfico é mais notável quando se tem de efectuar medições precisas de cotas. Desta forma, os melhores estereorestituidores (v. cap. xxx) incorporam mecanismos bastante complexos necessários à correcção do tilt fotográfico. Mesmo as cartas topográficas de terrenos planos (i.e. isentos de relevo) não poderiam ser traçadas a partir das fotografias se estas não fossem compensadas do efeito do tilt.

A figura 2.4 mostra nos uma fotografia quase vertical. Nesta figura consideramos que as posições das marcas fiduciais estão ajustadas de forma a que a intersecção das rectas que unem as marcas fiduciais opostas, definam o ponto principal o (i.e. a intersecção do eixo óptico com o plano da imagem). A vertical que passa pelo centro de perspectiva intersecta o plano da fotografia (ou a sua extensão) no ponto nadir fotográfico (n). A linha principal é definida pela recta que passa pelo ponto principal e pelo nadir. A bissectriz do ângulo t intersecta o plano da fotografia no isocentro (i).

A escala de uma fotografia com tilt muda de forma regular em toda a área fotografada. Como seria de esperar, o tilt comprime a imagem na parte superior (a mais alta relativamente ao chão) e expande a imagem na parte inferior da fotografia. Para determinarmos a escala de uma fotografia com tilt num dado ponto devemos conhecer, não só a cota desse ponto, mas também a sua posição relativamente ao sistema de coordenadas definido pelo nadir e pela linha principal. Isto é, precisamos de saber o ângulo de tilt (t) e de swing (s), a altura de voo, a distância focal e a cota do ponto.

Na figura 2.4 a cota do ponto P acima do datum é h_P. As coordenadas deste ponto são, no sistema xy, (x, y). Na fotografia o ponto principal é definido por o e o nadir por n. O eixo dos yy foi rodado de forma a coincidir com a linha principal. O novo eixo é designado por y´e a rotação é considerada positiva se for efectuada no sentido directo. Da figura conclui-se que

$$\theta = 180^o - s$$

Uma rotação de θ nos eixos coordenados cx e cy provoca uma alteração nas coordenadas de p no valor:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Se agora o eixo ox´ for transladado da posição o para a posição n e se atendermos ao facto de que $\overline{on} = c\tan t$ teremos:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta + c\tan t \end{cases}$$

A partir de p traça-se uma recta perpendicular à linha principal $\overline{on}$. O ponto de intersecção é o ponto w. Agora, a partir deste ponto traçamos uma outra perpendicular à recta $\overline{on}$. O ponto de intersecção é k. Como as rectas wk e wp são horizontais então o triângulo kwp é horizontal. E, portanto, as relações de escala entre os triângulos kwp e NWP podem ser obtidas através das propriedades existentes entre triângulos semelhantes. Observando os triângulos Okp e ONP concluímos que:

$$\frac{\overline{kp}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{Ok}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{Ok}}{H-h}$$

Mas como $\overline{Ok} = \overline{On} - \overline{kn} = \frac{c}{\cos t} - y'\sin t$, e atendendo a que a razão $\frac{\overline{kn}}{\overline{NP}}$ define a escala de um ponto qualquer p do plano kwp, cuja cota é h, virá:

$$S_t = \frac{c\sec t - y'\sin t}{H-h}$$

A expressão anterior define a escala da fotografia quase vertical num ponto cuja cota é h.

2.2.2 Fotografia oblíqua baixa e alta

Durante muitas décadas, o processo fotogramétrico de extração de informação geométrica baseou-se quase exclusivamente em imagens aéreas verticais. No entanto, a história da fotografia aérea remonta a 1839, quando Daguerre tirou a primeira imagem aérea oblíqua do topo de um edifício alto em Paris. Além disso, nas décadas seguintes, as fotografias aéreas eram também oblíquas e foram muito utilizadas para fins de cartográficos e reconhecimento. Nesta última década, as imagens aéreas oblíquas voltaram a serem amplamente utilizadas, não só como um conjunto de dados complementar às imagens aéreas verticais tradicionais, mas também como fonte básica de informação para vários tipos de aplicações 3D (Molinari, Medda e Villani, 2014; Verykokou e Ioannidis, 2015).

As imagens aéreas oblíquas são obtidas com o eixo da câmara intencionalmente inclinado em relação à vertical. São caracterizadas como oblíquas altas, se estiverem suficientemente inclinadas para mostrar o horizonte, ou oblíquas baixas, se não incluírem o horizonte. Actualmente, as plataformas aéreas equipadas com múltiplas câmaras que adquirem fotografias verticais e oblíquas, são utilizadas por várias empresas para explorarem os pontos fortes de ambos os tipos de imagens e integram as imagens oblíquas em vários processos fotogramétricos. Para além de fornecerem um conjunto de dados complementares às fotografias verticais, podem também ser utilizadas de forma independente, como fonte de dados básica para vários tipos de aplicações, incluindo modelação 3D, monorestituição digital, interpretação e classificação de imagens para projectos cadastrais, militares e de infra-estruturas. Algumas das características fundamentais das fotografias oblíquas são:

- a sua pegada (ou *footprint*) trapezoidal,
- a grande mudança de escala,

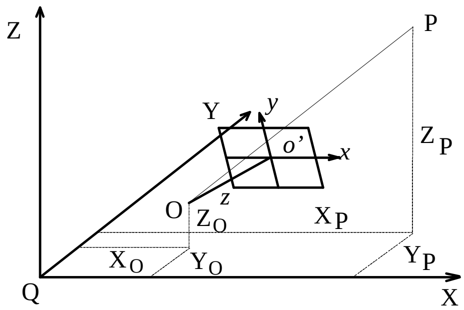


Figura 2.5: Fotografia terrestre.

- a cobertura de uma maior área de terreno em comparação com imagens verticais tiradas da mesma altitude pela mesma câmara,
- a possibilidade de oferecem uma cobertura fotográfica de áreas sobre as quais é impossível de voar
- a interpretação intuitiva pelo ser humano, porque vê a cena imageada com uma perspectiva semelhante.

A exploração métrica de imagens aéreas oblíquas é importante em muitas aplicações: cadastro 3D (medições de lados verticais e horizontais de edifícios, extração de volumes de edifícios, etc.), planeamento urbano, imobiliário, gestão de propriedades, documentação do património cultural, entre outras. Em (Wolf e Dewitt, 2000; Verykokou e Ioannidis, 2024) podemos encontrar as definições básicas, os princípios geométricos e as relações necessárias para a compreensão da geometria subjacente às imagens aéreas oblíquas.

2.3 Fotografia terrestre

Na fotografia terrestre o eixo óptico da câmara fotogramétrica está localizado no solo ou perto dele. Este ramo da fotogrametria (fotogrametria terrestre) pode ainda subdividir-se em:

- fotogrametria de curta distância - se a distância câmara-objecto está entre 0.1 e 100m,
- macrofotogrametria - se a distância câmara-objecto está entre 0.1 e 0.01m,
- microfotogrametria - quando as fotos se obtêm através de um microscópio.

Por sua vez, as fotografias terrestres também podem classificar-se, de acordo com a orientação do eixo óptico, em:

- fotografias horizontais - quando o eixo óptico é horizontal. Desta forma o plano cxy é um plano vertical e, se a câmara estiver bem nivelada antes da exposição, os eixos dos xx e dos yy da foto (os quais são definidos pelas marcas fiduciais) definem, respectivamente, uma recta horizontal e uma vertical.
- fotografias oblíquas - quando o eixo óptico está inclinado para cima ou para baixo em relação à horizontal. Se a inclinação é para cima do plano horizontal, diz-se que o ângulo é de elevação e considera-se positivo. Se é para baixo diz-se que o ângulo é de depressão e considera-se negativo.

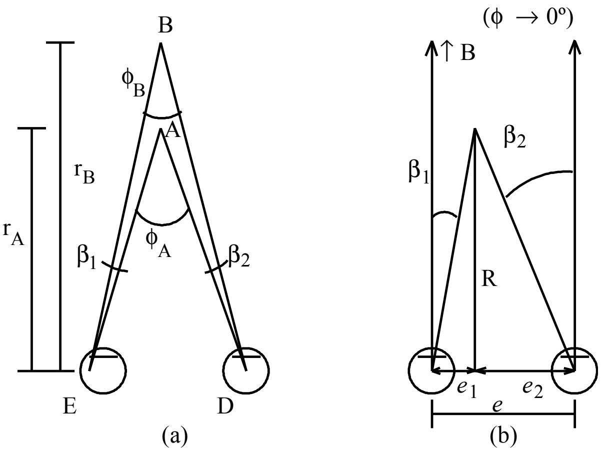


Figura 2.6: Visão binocular normal.

2.4 Estereoscopia

Chamamos estereoscopia ao processo fisiológico através do qual se obtem uma sensação tridimensional, causada pela fusão numa única imagem de duas fotografias do mesmo objecto tiradas de centros de perspectiva diferentes. A imagem tridimensional que poderemos observar é chamada modelo estereoscópico ou simplesmente estereomodelo. Um par de fotografias susceptíveis de serem observadas estereoscopicamente é chamado par estereoscópico ou estereopar. A faixa comum entre duas fotografias sucessivas, na direcção da linha de voo, é chamada sobreposição longitudinal. Para que uma fotografia seja vista, estereoscopicamente, na sua totalidade, a sobreposição longitudinal deverá ser sempre superior a 50%.

2.4.1 Visão binocolar normal

Quando observamos um objecto pontiforme colocado a uma distância finita, os nossos olhos realizam, simultaneamente, duas acções: os eixos visuais dos dois olhos convergem sobre o ponto e os dois cristalinos sofrem uma acomodação, por meio da qual focam o mesmo ponto. As duas imagens do ponto, recebidas separadamente nas retinas dos dois olhos, são então transmitidas ao cérebro, que as recombina numa única imagem.

Se agora, em vez de um único ponto, considerarmos dois pontos A e B a diferentes distancias do observador estes não poderão ser observados simultaneamente e distintamente. Para observar A (figura 2.6-a) os dois olhos E e D devem estar focados à mesma distância r_A ($\overline{EA} \approx \overline{DA} \approx r_A$) e os dois eixos visuais devem formar um ângulo ϕ_A. Para observar B os dois olhos devem, por outro lado, estar focados para a distância r_B e os dois eixos visuais devem formar um ângulo ϕ_B. Este ângulo será tanto menor quanto mais distante B se achar de A. Quando estes dois ângulos forem muito diferentes entre si, não será possível a fusão simultânea dos dois pontos. Os ângulos ϕ_A e ϕ_B são chamados ângulos de convergência ou ângulos paraláxicos. Agora designamos por β o ângulo obtido pela diferença desses dois ângulos de convergência. De acordo com a figura 2.6-a temos:

$$\beta = \phi_A - \phi_B = \beta_1 + \beta_2$$

O valor de β depende, evidentemente, das duas distâncias r_A e r_B, e da distância e, chamada distância interpupilar ou base ocular. Esta distância varia de indivíduo para indivíduo entre limites que vão desde os 55mm até 75mm, podendo considerar-se 65mm a distância interpupilar mais comum.

Enquanto que a acomodação do cristalino dos olhos é um fenómeno pouco perceptível pelo cérebro, é principalmente a percepção da diferença dos ângulos de convergência dos eixos visuais que permite avaliar a distância relativa dos diferentes objectos criando, desta forma, a sensação de profundidade. Portanto, a faculdade de percepção de profundidade envolve simplesmente o reconhecimento instintivo pelos olhos das diferenças de direcção de dois ou mais pontos.

É oportuno notar também que, quando se observa um objecto tridimensional, chegam aos nossos olhos duas imagens ligeiramente diferentes do referido objecto. Estas duas imagens que impressionam as retinas dos dois olhos são transmitidas ao cérebro onde se fundem numa impressão mental (tridimensional) do sólido da figura original. Por outro lado, no processo de visão estereoscópica, existe também uma certa tolerância de forma a permitir a fusão de imagens que difiram um tanto entre si, quer seja em relação à forma, quer seja em relação ao tamanho e posição. Como já vimos, a profundidade mínima observável depende da diferença mínima dos ângulos de convergência que as retinas dos dois olhos serão capazes de registar. Assim, verificou-se que não é possível a percepção da diferença de profundidade entre objectos se a diferença dos ângulos de convergência for menor do que 20 segundos de arco (i.e. 965×10^{-7} rad.) De acordo com o que foi dito acima, podemos calcular, para um indivíduo com distância interpupilar de 65mm a distância R máxima (chamada raio de percepção estereoscópica) que permite que um objecto apareça ainda em relevo. Atendendo à figura 2.6-b vem:

$$\tan\beta_1 = \frac{e_1}{R} \quad \text{e} \quad \tan\beta_2 = \frac{e_2}{R}$$

Como β_1 e β_2 são muito pequenos vem:

$$e_1 = \beta_1 R \quad \text{e} \quad e_2 = \beta_2 R$$

Somando membro a membro estas duas expressões temos $e = \beta R$ e portanto

$$R = \frac{e}{\beta}$$

Assim, para $e = 65$ mm e $\beta = 965 \times 10^{-7}$ rad virá $R \approxeq 670$ m. Ou seja, para além de 670m não se pode distinguir, à vista desarmada, diferenças de profundidade entre objectos. Estes aparecerão como que projectados sobre o mesmo plano de fundo.

2.4.2 Reconstrução artificial das condições de profundidade

Para reconstruir artificialmente a visão binocular é necessário que as condições de convergência e focagem sejam compatíveis entre si e entre as condições da visão real.

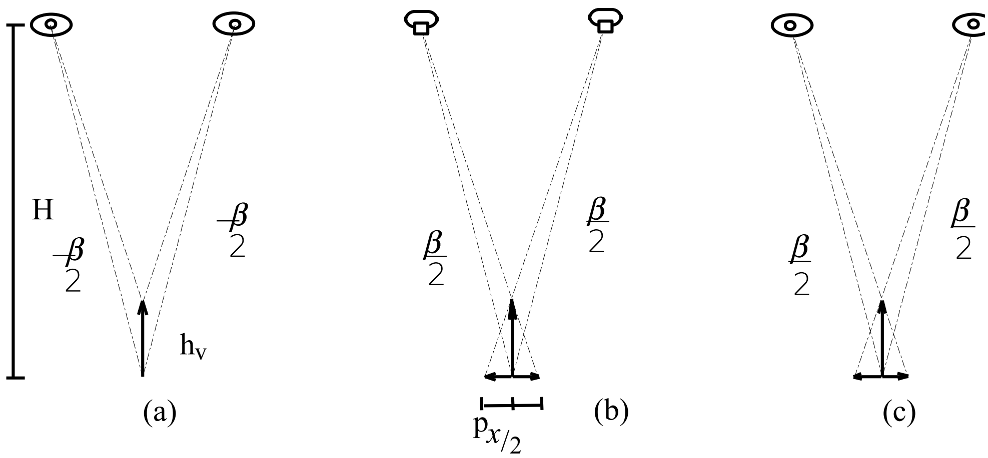


Figura 2.7: Reconstrução artificial da visão binocular.

A figura 2.7 pretende reproduzir as condições de percepção de profundidade de um objecto com a altura h. Assim, na figura 2.7-a os olhos vêm o objecto e devido ao ângulo β há uma acomodação de convergência a qual resulta na percepção da altura do objecto. Na figura 2.7?b os olhos são substituídos por duas câmaras, as quais produzem fotografias do objecto à escala 1:1. Devido à altura do objecto há, na foto esquerda, um deslocamento para a direita, do topo do objecto, o qual é registado a uma distância $p_x/2$ da base. O mesmo acontece para a fotografia direita, mas o deslocamento do topo do objecto é, agora, para a esquerda. Na figura 2.7-c as imagens das duas fotografias são projectadas numa superfície de forma a que a base do objecto seja coincidente em ambas as imagens. As imagens do topo do objecto, representadas na figura pelas setas, estão separadas por uma distância (paralaxe) p_x. Para se obter uma visão estereoscópica desta imagem combinada é necessário que através de um método qualquer o olho esquerdo veja apenas a fotografia esquerda e o olho direito a fotografia direita. Como os raios vindos da base e do topo do objecto formam o mesmo ângulo que na visão binocular verdadeira, a altura (h) do modelo estereoscópio projectado é a mesma do objecto (h_v). A única diferença que existe é que a acomodação de focagem para o topo do objecto é feita, no caso das fotografias, para uma distância H e no caso real, para uma distância $H - h_v$.

2.4.3 Paralaxe Estereoscopica

Chama-se paralaxe ao movimento da imagem de um objecto estacionário relativamente a outro objecto estacionário, quando o ponto de observação é deslocado. Por exemplo, se observarmos o que acontece a um prédio de vários andares quando o vemos desde um avião em movimento, notaremos que o topo do prédio parece andar mais rapidamente que a sua base. Diremos então, que os pontos situados a cotas mais elevadas têm uma paralaxe superior aos situados a cotas mais baixas.

Equações de paralaxe

Notas:

1. Refazer esta secção. Bilio: wolf 8.6 pag 175
2. Mudar também a secção seguinte utilizando o wolf.

Paralaxe estereoscópica e diferenças de nível

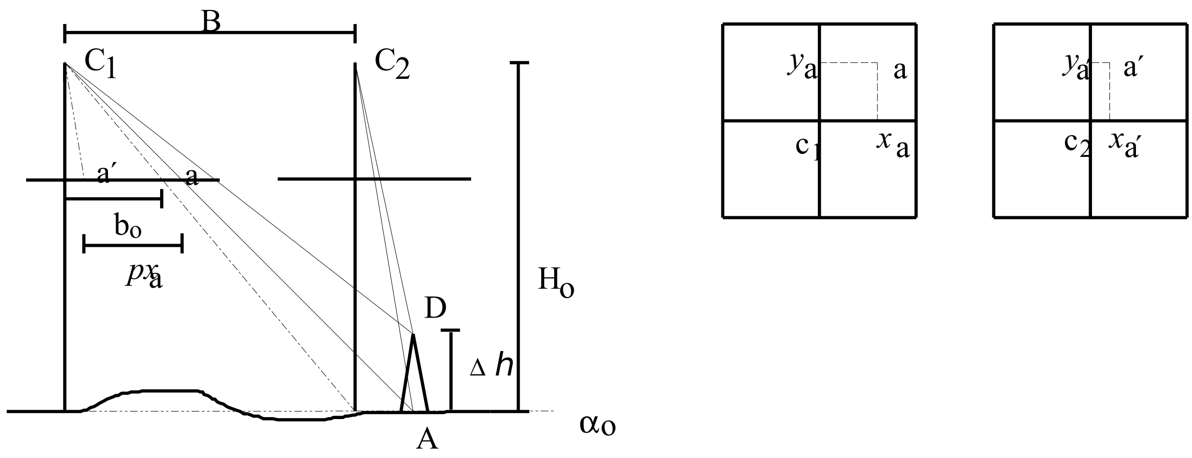


Figura 2.8: Paralaxe estereoscópica e diferenças de nível.

Rigorosamente, a paralaxe estereoscópica de um ponto A, pertencente à área de sobreposição é definida como a diferença entre as coordenadas x das imagens desse ponto na fotografia esquerda e na fotografia direita (figura 2.8).

$$p x_a = x_a - x'_a \tag{2.5}$$

Nesta definição considerou-se que o eixo x fotográfico passa pelo ponto principal e é paralelo à linha de voo. Designando por (figura 2.8):

- H_0 a altura de voo sobre o datum
- Δh a diferença de nível entre A e D (i.e. a altura do objecto)
- B a base aérea
- b_0 a fotobase ajustada ao datum

e atendendo à semelhança dos triângulos $\triangle[C_1 a' a]$ e $\triangle[C_1 C_2 a]$ teremos, para o ponto A:

$$\frac{px_a}{c} = \frac{B}{H_0}$$

e, de forma análoga, para o ponto D teremos

$$\frac{px_d}{c} = \frac{B}{H_0 - \Delta h}$$

Designado por $\Delta h = H_A - H_D$ e $\Delta px = px_d - px_a$ vem

$$\Delta px = c\frac{B}{H_0 - \Delta h} - c\frac{B}{H_0} = \frac{Bc}{H_0}\frac{\Delta h}{H_0 - \Delta h}$$

Mas como $\frac{Bc}{H_0} = b_0$, teremos

$$\Delta px = \frac{b_0 \Delta h}{H_0 - \Delta h} \tag{2.6}$$

Por outro lado, se medirmos a diferença de paralaxe entre dois pontos poderemos calcular a diferença de nível (ou altura) entre eles, utilizando a seguinte expressão:

$$\Delta h = \frac{H_0 \Delta px}{b_0 + \Delta px} \tag{2.7}$$

Nos casos em que Δpx é relativamente pequeno (i.e. para $\Delta h \approxeq 3\% H_0$) podemos utilizar as seguintes aproximações:

$$\Delta px = \frac{b_0 \Delta h}{H_0} \quad \text{e} \quad \Delta h = \frac{H_0 \Delta px}{b_0}$$

Bilbiografia P Wolf (Secção 8-6, pag174-175)

Exercício 2.2

Na área de sobreposição dum par esterescópico de fotografias verticais fizeram-se as seguintes leituras numa barra de paralaxe para 4 pontos do terreno (A,B,C,D)

Pontos	a	b	c	d
Leituras (mm)	20.25	21.15	21.50	18.20

Sabendo que a cota ortométrica do ponto A é de 294.0m, a sua paralaxe é 70.40mm, a distância focal da câmara que tirou as fotografias é 153.98 mm e a escala da fotografia à cota do ponto é 1: 14000 determine:

1. A altitude de voo,
2. O Comprimento da base aérea,
3. As cotas dos pontos B, C e D.

Solução 2.2
Utilizando as expressões anteriores teríamos:

- Altitude de voo: $H_0 = 2449.72$m
- Base aérea: $B = 985.6$m
- Cotas: $h_b = 329.1$m, $h_c = 342.5$m e $h_d = 210.2$m

2.4.4 Estereoscópios

Existem basicamente dois tipos de estereoscópios: estereoscópio de lentes ou de refracção (muitas vezes chamado estereoscópio de bolso) e estereoscópio de espelhos ou de reflexão. Cada um deles apresenta vantagens e desvantagens, mas a finalidade de ambos é eliminar a dificuldade de focar os olhos a distancia finita com os eixos visuais quase paralelos entre si, quando se examinam as fotografias em três dimensões. O estereoscópio de lentes (figura 2.9-a) é constituído por duas lentes montadas sobre uma armação suportada por quatro pés, de tal modo que as lentes se encontram a uma distância do plano de apoio igual à distância focal das mesmas lentes. O estereoscópio de espelhos (figura 2.9-b) consiste fundamentalmente de dois espelhos inclinados 45º relativamente ao plano horizontal das fotografias, de dois prismas de 45º ou de dois outros pequenos espelhos e de duas lentes para acomodar a vista ao infinito.

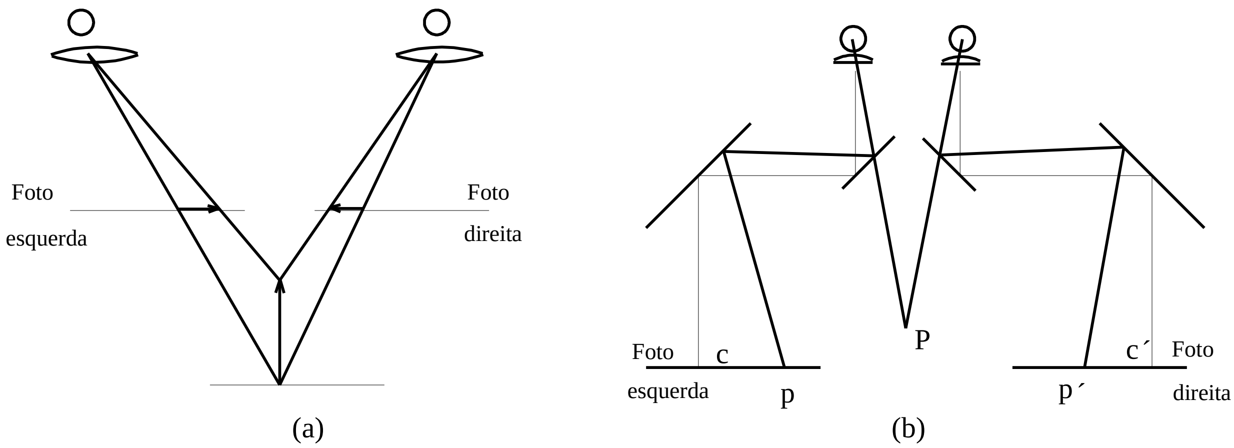


Figura 2.9: a) Estereoscópio de lentes. b) Estereoscópio de espelhos

O estereoscópio de lentes apresenta, em relação ao estereoscópio de espelhos as seguintes vantagens: preço de custo notavelmente mais baixo, maior transportabilidade, sendo susceptível de ser usado com desenvoltura no campo e maior poder de ampliação das imagens. Por outro lado, o campo observado é inferior e, portanto, é mais difícil obter uma ideia de conjunto da região abrangida pelo par estereoscópico. Além disso as fotografias não podem ser separadas, como no estereoscópio de espelhos, a uma distância tal que seja evitada qualquer interferência entre elas, devido ao recobrimento. De facto, enquanto que com o estereoscópio de lentes a distância entre as imagens correspondentes da área de recobrimento do par estereoscópio (dita estereobase) deve ser igual à distância interpupilar do observador, com o estereoscópio de espelhos tal distância será normalmente superior a 20cm, sendo em geral diferente de um modelo de estereoscópio para outro.

2.4.5 Orientação de um par estereoscópico de imagens

A condição necessária para que duas fotografias de um par estereoscópico possam ser observadas em estereoscopia é que estas sejam colocadas debaixo do estereoscópio devidamente orientadas, isto é, com a orientação recíproca correcta que tinham quando foram tiradas. Esta orientação pode ser feita do seguinte modo:

1. Marcam-se em cada uma das fotografias os pontos principais.
2. Com o estereoscópio de bolso (ou mesmo com o de espelhos) orientam-se aproximadamente as fotografias e marcam-se os pontos principais conjugados (ou pontos principais transferidos).
3. Traça-se em cada uma das fotografias uma recta passando pelo ponto principal e pelo ponto principal transferido.
4. Colocam-se as duas fotos sobre uma mesa de dimensões apropriadas, de modo que os quatro pontos (i.e. os dois pontos principais e os respectivos pontos conjugados) estejam sobre a mesma recta. A distância entre as duas fotografias, ou seja, entre um ponto principal e o seu conjugado, deverá diferir de acordo com o tipo de estereoscópio utilizado (lentes ou espelhos). Para o estereoscópio de bolso esta distância deverá ser aproximadamente igual à distância interpupilar (a qual é, vulgarmente, $d =$ 65mm). Para o estereoscópio de espelhos esta distância deverá ser igual à estereobase (vulgarmente $d = 260$mm).
5. Fixam-se as duas fotografias com fita adesiva.
6. Coloca-se o estereoscópio sobre as fotografias, procurando dispô-lo o mais paralelo possível ao traçado da linha de voo. Por vezes é necessário movê-lo ligeiramente para que, observando as fotografias através dele, se consiga a fusão das duas imagens em uma única imagem tridimensional.

Suponhamos agora que o observador possui uma visão normal e que as fotos foram correctamente orientadas. Mesmo que estas sejam observadas de forma correcta poderão ainda existir alguns factores que dificultam a visão estereoscópica:

1. Fortes e bruscas mudanças de cotas. O efeito deste factor é tornar impossível a fusão simultânea dos pontos mais altos e dos pontos mais baixos.
2. Diferença notável de escala entre duas fotos do par estereoscópico resultando difícil a fusão das imagens correspondentes.
3. Mudança de posição de objectos no intervalo de tempo decorrido entre a tomada das duas fotos sucessivas.
4. Tonalidade fotográfica uniformemente monótona em fotografias de pequena escala.

2.4.6 Exagero vertical do modelo

O modelo mental tridimensional que se obtém mediante a observação estereoscópica de duas fotos aéreas de um estereopar não é na realidade uma réplica precisa do terreno fotografado. Na maior parte dos casos o relevo aparece mais acentuado do que o é realmente na natureza, ou seja, a escala vertical do estereomodelo é maior do que a escala horizontal. Nestas condições diremos que o modelo estereoscópico possui exagero vertical (positivo).

Define-se como factor de exagero vertical , a relação entre a escala vertical e a escala horizontal do estereomodelo:

$$E_v = \frac{S_v}{S_h}$$

De um ponto de vista qualitativo os factores que, em vários graus, influenciam o exagero vertical são a estereobase B, a altura de voo relativa H, a distância de observação r, a distância focal f da câmara, a base ocular e e a separação d entre as duas fotos orientadas para observação estereoscópica. A expressão seguinte mostra, em termos qualitativos, os factores que variam directa e inversamente com E_v:

$$E_v = f\left(\frac{B, r, d}{c, H, e}\right)$$

O termo distorção é geralmente utilizado para indicar mudança de forma no estereomodelo em relação à forma real do terreno fotografado. As causas destas distorções, as quais se verificam no estereomodelo, podem ser divididas em estereoscópicas e fotográficas, não tendo nem uma nem outra influência no valor do exagero vertical:

1. Causas estereoscópicas:
   - orientação incorrecta do par estereoscópico - o modelo tridimensional será sempre mais deformado quanto maior for a alteração da orientação recíproca das fotos em relação à orientação correcta,
   - posição de observação - para examinar uma determinada porção do estereomodelo, o modo correcto é o de mover o estereoscópio de modo a poder observá-la directamente de cima, isto é, com o plano imaginário contendo os eixos visuais o mais perpendicular possível ao plano da foto.
2. Causas fotográficas:
   - tilt fotográfico - quando uma ou ambas as fotos do para estereoscópico apresentam tilt, o modelo estereoscópico aparecerá deformado tanto mais quanto maior for o valor do tilt,
   - posição e orientação das imagens nas fotografias - as imagens de um modelo estereoscópico, devido às distorções de paralaxe presentes nas duas fotos que o geraram, aparecerão distorcidas para fora, radialmente a partir do centro virtual de projecção (ponto médio entre o ponto principal e o ponto principal conjugado); as únicas imagens não distorcidas serão as situadas sobre o referido centro virtual e, com boa aproximação, as situadas dentro de uma vizinhança relativamente pequena.

Se agora movermos, levemente, a marca direita para a direita de uma quantidade tal que as duas marcas se mantenham ainda fundidas, estereoscopicamente, a imagem aparecerá agora numa posição inferior 2. Movimentando mais um pouco a marca direita para a direita conseguiremos que a marca flutuante toque o solo na posição 3. Neste momento as duas marcas definem, nas duas fotografias. as posições exactas de um par conjugado de pontos. Note-se que o movimento fictício "acima?abaixo"da marca flutuante deve-se ao facto de a paralaxe das marcas se alterar quando se desloca, horizontalmente, uma relativamente à outra. Nos instrumentos de medição tridimensional estas marcas podem movimentar-se na imagem estereoscópica e constituem a marca de medição do instrumento. Se a sua separação e, consequentemente, a sua paralaxe se mantiver constante, será possível movimentar a marca na imagem tridimensional a uma cota constante e permitirá, ao operador, efectuar o traçado de curvas de nível.

2.4.7 Princípio da marca flutuante

A faculdade de o observador poder visualizar a imagem estereoscópica através do estereoscópio é baseada na pequena variação de paralaxe existente de ponto para ponto. É possível colocar na imagem estereoscópica uma imagem distinta que pareça flutuar no espaço desta imagem. Esta marca, chamada marca flutuante, é a base da medição tridimensional de uma imagem estereoscópica. Vamos supor que o par de fotografias foi devidamente orientado e o estereoscópio colocado na posição correcta de observação (v. figura 2.10)[1]. De seguida colocamos sobre as fotografias duas peças de um material transparente, contendo cada uma delas uma marca rigorosamente igual (i.e. com a mesma forma e tamanho). Quando vistas estereoscopicamente estas duas marcas fundem-se numa única marca a qual ocupará no espaço do modelo a posição 1 acima do solo.

Se agora movermos, levemente, a marca direita para a direita de uma quantidade tal que as duas marcas se mantenham ainda fundidas, estereoscopicamente, a imagem aparecerá agora numa posição inferior 2.

[1] Por questões de simplificação omitimos o estereoscópio

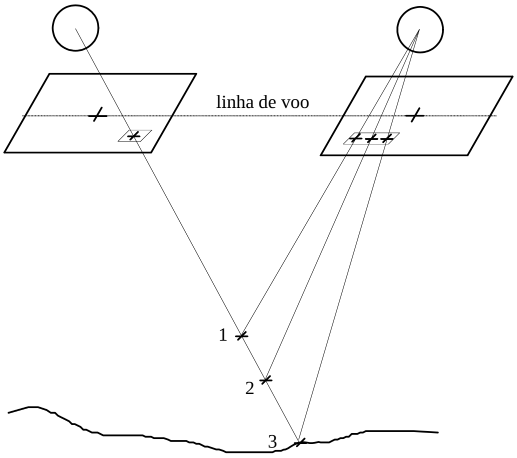


Figura 2.10: Princípio da marca flutuante

Movimentando mais um pouco a marca direita para a direita conseguiremos que a marca flutuante toque o solo na posição 3. Neste momento as duas marcas definem, nas duas fotografias. as posições exactas de um par conjugado de pontos. Note-se que o movimento fictício "acima-abaixo"da marca flutuante deve-se ao facto de a paralaxe das marcas se alterar quando se desloca, horizontalmente, uma relativamente à outra.

Nos instrumentos de medição tridimensional estas marcas podem movimentar-se na imagem estereoscópica e constituem a marca de medição do instrumento. Se a sua separação e, consequentemente, a sua paralaxe se mantiver constante, será possível movimentar a marca na imagem tridimensional a uma cota constante e permitirá, ao operador, efectuar o traçado de curvas de nível.

2.5 Transformações no plano

2.5.1 Rotações em 2D

Dado um ponto P num sistema de coordenadas plano o qual foi rodado de um ângulo α no sentido anti-horário relativamente a sistema de coordenadas fixo Oxy, pretendemos determinar as coordenadas (X,Y) deste ponto relativamente ao sistema de coordenadas fixo. Assim, designando por $d = \|\overrightarrow{OP}\|)$ teremos[2]:

$$\begin{aligned} X &= d\cos(\theta-\alpha) = d\cos(\alpha)\cos(\theta) + d\sin(\alpha)\sin(\theta) = (\cos\alpha)\,x + (\sin\alpha)\,y \\ Y &= d\sin(\theta-\alpha) = d\cos(\alpha)\sin(\theta) - d\cos(\theta)\sin(\alpha) = (-\sin\alpha)\,x + (\cos\alpha)\,y \end{aligned}$$

Representando as matrizes e os vectores por letras a negrito virá:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

R é chamada matriz de rotação. É quadrada mas não simétrica. Os elementos de **R** são os cosenos dos ângulos entre os eixos coordenados.

Note-se que este problema poderia ser colocado de forma inversa, ou seja, dado um ponto $P(x,y)$ definido num sistema de coordenadas $\{o,x,y\}$ o qual sofreu uma rotação α relativamente a outro sistema de

[2] Na dedução desta equações é necessário utilizar as seguintes relações da trignometria $\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \sin B\cos A$ e $\cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

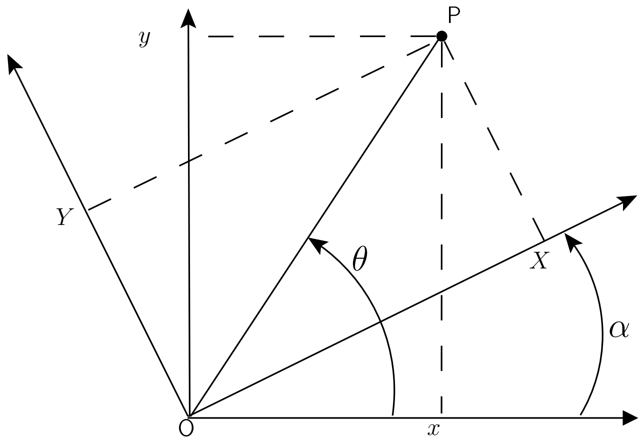


Figura 2.11: Rotação no plano.

coordenadas $\{O, X, Y\}$ pretendemos determinar as suas coordenadas neste último referencial. Neste caso teremos que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{RX}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Assim é habitual encontrarmos estas duas formulações nas diversas referências bibliográficas sobre fotogrametria (por exemplo (Kraus, Harley e Kyle, 2007) (Wolf e Dewitt, 2000))

Exercício 2.3

Sabendo que um dado referencial rodou 90° no sentido anti-horário e que as coordenadas de dois pontos são neste referencial $P_1(1,1)$ e $P_1(-2,1)$ determine as coordenadas dos pontos no referencial inicial.

Solução 2.3

Consideremos que $\{o, x, y\}$ é o referencial inicial. Então designando por $\mathbf{x}$ o vector dos pontos no referencial inicial e por $\mathbf{X}$ o vector dos pontos no referencial rodado podemos utilizar a equação 2.9 para calcular a transformada dos pontos na forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$$

O código MatLab para resolver este problema seria simplesmente;

```
% Construção da matriz de rotação R
R=[cosd(90) -sind(90); sind(90) cosd(90)];
% Construção do vector dos pontos no sistema rodado
X1=[3;3]; X2=[-2;1]; X=[X1 X2];
% Aplicação da rotação
x=R*X
```

2.5.2 Propriedades da matriz de rotação M

A questão coloca-se em saber se os quatro elementos da matriz de rotação podem ser livremente escolhidos ou se eles deverão satisfazer determinadas condições. Para responder a esta questão teremos de introduzir os vectores unitários i e j sobre os eixos coordenados x e y respectivamente. De fato, se introduzirmos os cossenos dos ângulos entre os eixos coordenados e utilizando notação matricial teremos:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\angle xX) & \cos(\angle yX) \\ \cos(\angle xY) & \cos(\angle yY) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Expressando agora as suas componentes no sistema XY por

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Comparando as equações 2.8 e 2.10 vemos que os elementos r_{ij} da matriz de rotação são as componentes dos vectores unitários **i** e **j**, isto é

$$\mathbf{M} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

Estes dois vectores unitários mutuamente ortogonais deverão satisfazer as condições de ortogonalidade formuladas nas equações 2.11

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^\top \mathbf{i} &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = r_{11}^2 + r_{21}^2 \\ \mathbf{j}^\top \mathbf{j} &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 = r_{12}^2 + r_{22}^2 \\ \mathbf{i}^\top \mathbf{j} &= \cos\alpha \sin\alpha - \sin\alpha \cos\alpha = 0 = r_{11} r_{12} + r_{21} r_{22} \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.5.3 Transformação afim

Nesta transformação a matriz de rotação **A** é não ortogonal. Tem as seguintes características:

- linhas ortogonais definidas, por exemplo, por três pontos no sistema xy, deixam de ser ortogonais depois da transformação
- linhas paralelas definidas, por exemplo,por quatro pontos n sistema xy, continuam paralelas depois da transformação,
- segmentos entre dois pontos no sistema xy têm um comprimento diferente depois da transformação,
- o quociente entre os comprimentos de dois segmentos paralelos é invariante na transformação.

A transformação afim é definida matematicamente por:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.12}$$

onde

- a_{10} e a_{20} são duas translações (ou mais exactamente as coordenadas XY da origem do sistema xy)
- a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são quatro elementos que não satisfazem as condições de ortogonalidade da Equação 2.11.

Obtemos uma transformação de semelhança substituindo a não ortogonalidade da matrix **A** por uma matriz de rotação ortogonal **R** e introduzindo um factor de escala unitário m:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \mathbf{a}_0 + m\mathbf{R}\mathbf{x} \tag{2.13}$$

Transformação a 4 parâmetros

Obtemos uma transformação de similaridade substituindo a matriz não-ortogonal da equação 2.12 por uma matriz de rotação ortogonal R. Ou seja a transformação afim a 4 parâmetros pode ser vista como um caso particular da transformação afim genérica a 6 parâmetros.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} r_{11} & -r_{21} \\ r_{21} & r_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \mathbf{a}_0 + m\mathbf{R}_2\mathbf{x} \tag{2.14}$$

Nesta transformação são considerados quatro parâmetros:

- uma rotação α que dá origem aos elementos r_{11} e r_{21} da matriz de rotação **R**,
- um factor de escala m,
- duas translações a_{10}, a_{20}

Exercício 2.4
Para uma dada fotografia vertical, os pontos A e B têm coordenadas no sistema de coordenadas fotográfico (xy) e no sistema de coordenadas topográfico (E,N) dadas por:

	Coord imagem		Coord. Topo	
	x (mm)	y (mm)	E (m)	N (m)
A	632.17	121.45	1100.64	1431.09
B	355.20	-642.07	1678.39	254.15
C	1304.81	596.37		

Admitindo que os pontos A,B e C estão situados no mesmo plano horizontal, determine as coordenadas do ponto C no sistema topográfico.

Solução 2.4
Tendo em conta as equações matriciais dadas pela equação 2.13, podemos escrever, para cada ponto comum aos dois sistema, a equação matricial

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.15}$$

Mas como desconhecemos os 4 parâmetros de transformação a_{ij} teremos de explicitá-los na forma duma equação de observação, isto é

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Aplicando esta equação aos pontos A e B e reordenando as equações vem

$$\begin{pmatrix} 632.17 & -121.45 & 1 & 0 \\ 121.45 & 632.17 & 0 & 1 \\ 355.20 & 642.07 & 1 & 0 \\ -642.07 & 355.20 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100.64 \\ 1431.09 \\ 1678.39 \\ 254.15 \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.11964 \\ 1.16285 \\ 534.066 \\ 559.993 \end{pmatrix}$$

Agora resta apenas aplicar a equação 2.15 ao ponto C, o que dá $C = (1301.49, 2745.01)^{\top}$ ▲. Nota: a estrutura da matriz A que é construída neste exercício depende da ordem em que as incógnitas (i.e os parâmetros) aparecem no vector **x**, ou seja da formulação da equação 2.15.

Generalizando, podemos dizer que dados n pontos comuns a dois sistemas, respectivamente o sistema de coordenadas inicial $x\,y$ e o sistema de coordenadas transformado $X\,Y$, o cálculo dos parâmetros de transfomação do sistema $x\,y$ no sistema $X\,Y$ é dado por

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

onde o vector **v** é o vector dos resíduos.

O código seguinte ilustra uma possível implementação desta solução em MataLab:

```
% Construcao do vector b
% Designado por (u,v) as coodenadas objecto/topográficas do ponto (x,y)
aux = [u';v']; % aux e' uma matriz auxiliar
b=aux(:);
% Construcao da Matriz A
A(1:2:2*n,1:4)= [x -y ones(n,1)  zeros(n,1)];
A(2:2:2*n,1:4)= [y  x zeros(n,1) ones(n,1)];
% Solução de mínimos quadrados
% Designado por v=Ax-b os residuos, o desvio padrao a posteriori e
sigma=sqrt((v'*v)/(m-l)
%onde m,l são o numero de equacoes e incognitas respectivamente
```

2.5.4 Projecção perspectiva de dois planos

Dados dois planos P_x e P_X, a projecção perspectiva entre os dois pode ser dada por uma transformação a 8 parâmetros. Os elementos fundamentais desta transformação consistem em um ponto, designado por centro de perspectiva, um feixe de linhas/raios que partem desse ponto e dois planos qu cortam o feixe e não contêm o centro de perspectiva. Nestas condições existe naturalmente uma correspondência de um para um entre cada linha do feixe e o seu ponto de intersecção entre os planos cortantes. As relações entre as coordenadas cartesianas de um ponto (x, y) no plano P_x e as correspondentes coordenadas (X, Y) no plano P_X são dadas por

$$\begin{aligned} X &= \frac{e_1 x + f_1 y + g_1}{e_0 x + f_0 y + 1} \\ Y &= \frac{e_2 x + f_2 y + g_2}{e_0 x + f_0 y + 1} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Esta equação é designada por transformação projectiva entre dois planos (ou transformação a 8 parâmetros) e pode ser invertida multiplicando pelos denominadores e resolvendo a ordem a x e y

$$\begin{aligned} x &= \frac{(f_2 - f_0 g_2)X + (f_0 g_1 - f_1)Y + (g_2 f_1 - g_1 f_2)}{(e_2 f_0 - e_0 f_2)X + (e_0 f_1 - e_1 f_0)Y + (e_1 f_2 - e_2 f_1)} \\ y &= \frac{(e_0 g_2 - e_2)X + (e_1 - e_0 g_1)Y + (e_2 g_1 - e_1 g_2)}{(e_2 f_0 - e_0 f_2)X + (e_0 f_1 - e_1 f_0)Y + (e_1 f_2 - e_2 f_1)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Exercício 2.5
Tendo em conta as equações 2.16 obtenha as expressões para as equações 2.17. Sugestão: utilize as coordenadas homógeneas para representar a equação 2.16.

Solução 2.5
A equação 2.16 pode-se escrever em coordenadas homógeneas na forma:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \\ e_0 & f_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \lambda \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Como a inversa da matriz **A** é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{f_2 - f_0 g_2}{\Delta} & -\frac{(f_1 - f_0 g_1)}{\Delta} & \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{\Delta} \\ -\frac{(e_2 - e_0 g_2)}{\Delta} & \frac{e_1 - e_0 g_1}{\Delta} & -\frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{\Delta} \\ -\frac{(e_0 f_2 - e_2 f_0)}{\Delta} & \frac{e_0 f_1 - e_1 f_0}{\Delta} & \frac{e_1 f_2 - e_2 f_1}{\Delta} \end{pmatrix}$$

onde

$$\Delta = e_1 f_2 - e_2 f_1 + e_0 f_1 g_2 - e_0 f_2 g_1 - e_1 f_0 g_2 + e_2 f_0 g_1$$

podemos facilmente deduzir as equações 2.17.

Exercício 2.6
Dados os pontos A, B, C, D pertencentes ao mesmo plano duma fachada dum edifício, com coordenadas imagem e coordenadas objecto dadas por:

	Coord imagem		Coord. Objecto	
	x (mm)	y (mm)	X (m)	Y (m)
A	-33.288	110.074	1488.05	3552.12
B	32.183	101.785	2229.38	3507.46
C	-45.762	-74.337	1376.40	1899.76
D	28.472	-96.643	2086.48	1600.12
P	1.628	5.182		

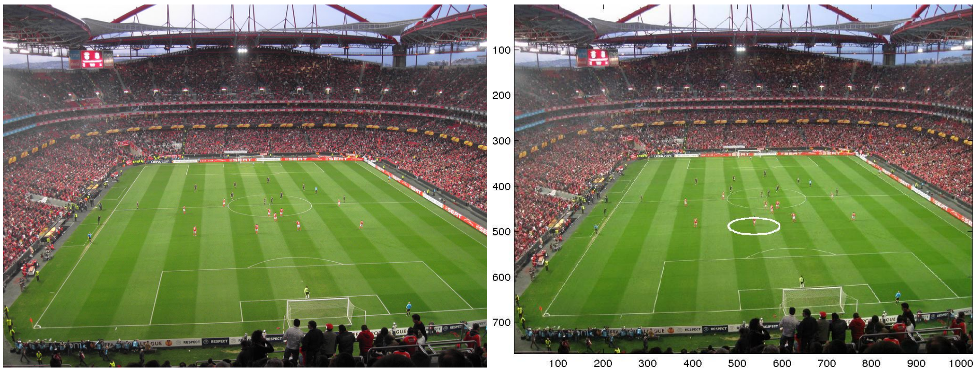
determine as coordenadas do ponto P no sistema de coordenadas objecto.

Solução 2.6
As coordenadas de P são $(1839.43, 2525.74)^\top$

Exercício 2.7
Sobre a imagem dum estádio de futebol (figura 2.12a) desenhe um círculo branco de raio 5 m com centro num dos jogadores da equipa encarnada. *Nota*: tenha em consideração que as medidas dos diferentes estádios de futebol diferem entre si (neste caso são $105m \times 68m$)

Solução 2.7
Utilizando as equações projectivas (2.16) na forma linear iremos calcular os parâmetros de transformação entre as coordenadas imagem e as coordenadas terreno. Depois utilizando as equações projetivas inversas (2.17) traçaremos os pontos do círculo do terreno na imagem (2.12b).

Nota 1: Admitindo que a imagem aonde pretendemos desenhar o círculo branco é a imagem `slb.png` para desenharmos um círculo branco de coordenadas imagem dadas pelo vector `[x,y]` podemos utilizar o seguinte código matlab:



(a) (b)

Figura 2.12: a) Estádio de futebol SLB; b) Círculo de 5m desenhado na imagem

```
slb=imread('slb.png');
image(slb); hold on;
% admitindo que x,y são as coordenadas pixel do círculo que pretendemos desenhar
scatter(x,y,...
        'SizeData',2,'Marker','s','MarkerEdgeColor','w','MarkerFaceColor','w')
set(gca, 'LooseInset', get(gca,'TightInset'))
```

Nota 2: No caso de pretendermos alterar o valor RGB dos pixeis da imagem que correspondem ao círculo (i.e. os pixeis [r,c]) e colocá-los a branco então teremos de ter em conta que se trata duma imagem a 3 dimensões matriciais (i.e um cubo) e o código matlab correspondente será agora:

```
idx1=sub2ind(size(slb),r,c,1*ones(1,size(index,1)));
idx2=sub2ind(size(slb),r,c,2*ones(1,size(index,1)));
idx3=sub2ind(size(slb),r,c,3*ones(1,size(index,1)));
% Como a imagem é do tipo uint8
slb(idx1)=255;slb(idx2)=255;slb(idx3)=255;
figure;image(slb)
```

2.6 Transformações no espaço

2.6.1 Rotações em 3D

Rotação em torno dum eixo

Uma das transformações básicas em três dimensões é a rotação de um sistema de coordenadas em torno de um dos seus eixos. Como a coordenada paralela ao eixo de rotação não é afectada por esta, as outras duas variam de acordo com as relações deduzidas para a rotação num plano (figura 4.8). A rotação de um eixo é positiva se se fizer no sentido directo, para um observador colocado na parte positiva desse eixo e olhar para a origem. Esta rotação provoca no eixo seguinte um deslocamento no sentido daquele que se lhe segue pela ordem cíclica XYZ, YXZ e ZXY.

Assim, a rotação de $+\omega$ em torno de X, faz avançar $+Y$ na direção de $+Z$. Utilizando as fórmulas deduzidas anteriormente na rotação 2D, teremos:

$$\begin{cases} X_\omega = X \\ Y_\omega = \cos\omega\, Y + \sin\omega\, Z \\ Z_\omega = -\sin\omega\, Y + \cos\omega\, Z \end{cases}$$

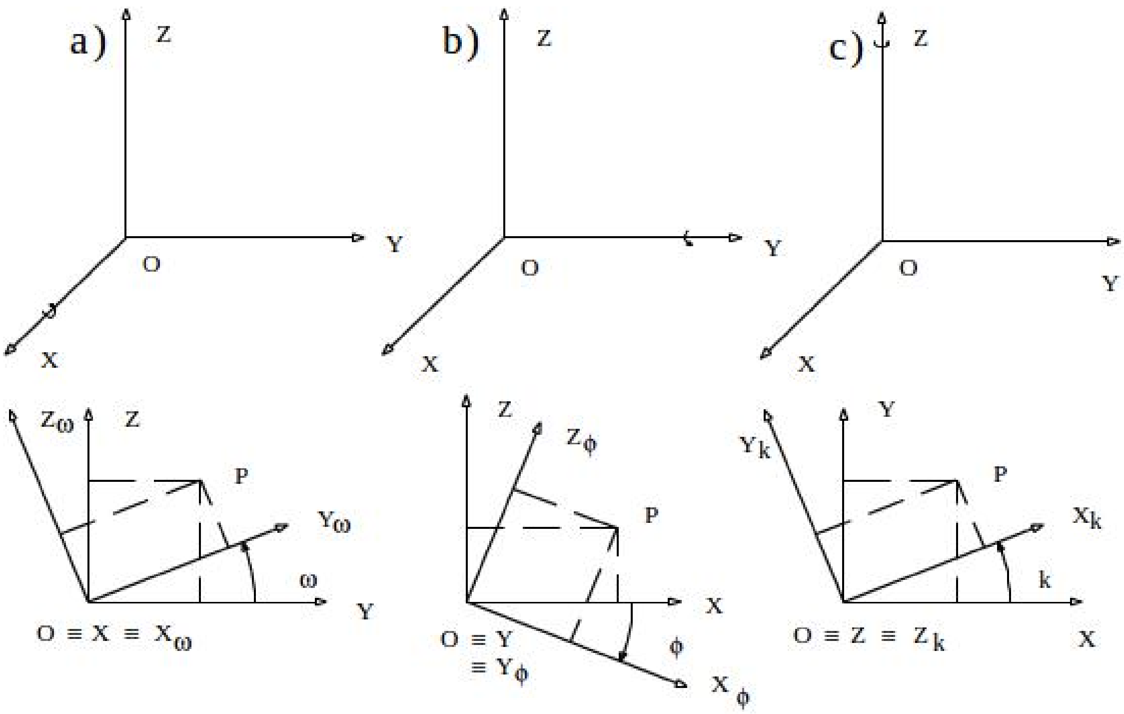


Figura 2.13: Rotações ω, ϕ e κ no espaço.

ou, em notação matricial (fazendo $c = \cos$ e $s = \sin$)

$$\begin{pmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & s_\omega \\ 0 & -s_\omega & c_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Designando por

$$\mathbf{M}_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & s_\omega \\ 0 & -s_\omega & c_\omega \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

teríamos $\mathbf{X}_\omega = \mathbf{M}_\omega \mathbf{x}$.

Analogamente, a rotação de $+\phi$ em torno do eixo dos Y faz avançar $+Z$ na direção de $+X$ (Figura 2.13). Isto é:

$$\begin{cases} X_\phi = \cos\phi\, X - \sin\phi\, Z \\ Y_\phi = Y \\ Z_\phi = \sin\phi\, X + \cos\phi\, Z \end{cases}$$

A matriz de rotação será, neste caso:

$$\mathbf{M}_\phi = \begin{pmatrix} c_\phi & 0 & -s_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\phi & 0 & c_\phi \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Finalmente, a rotação de +K em torno de Z faz avançar +X na direcção de +Y, isto é:

$$\begin{cases} X_\kappa = \cos\kappa\, X + \sin\kappa\, Y \\ Y_\kappa = -\sin\kappa\, X + \cos\kappa\, Y \\ Z_\kappa = Z \end{cases}$$

e portanto a correspondente matriz de rotação:

$$\mathbf{M}_\kappa = \begin{pmatrix} c_\kappa & s_\kappa & 0 \\ -s_\kappa & c_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Estas três rotações são muitas vezes referidas como rotações elementares uma vez que podem ser usadas para construir qualquer conjunto de rotações sequenciais.

Rotação sequencial

Designado por $X_\omega \phi \kappa$ coordenadas de um ponto P no sistema final, isto é, depois de sofrer uma rotação sequencial $(\omega - \phi - \kappa)$, e tendo em conta a ordem de multiplicação das matrizes, a matriz de rotação final será então:

$$\mathbf{M}_{\kappa,\phi,\omega} = \mathbf{M}_\kappa \cdot \mathbf{M}_\phi \cdot \mathbf{M}_\omega = \begin{pmatrix} c_\kappa & s_\kappa & 0 \\ -s_\kappa & c_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\phi & 0 & -s_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\phi & 0 & c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & s_\omega \\ 0 & -s_\omega & c_\omega \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\mathbf{M}_{\omega,\phi,\kappa} = \begin{pmatrix} c_\kappa\, c_\phi & c_\omega\, s_\kappa + c_\kappa\, s_\omega\, s_\phi & s_\kappa\, s_\omega - c_\kappa\, c_\omega\, s_\phi \\ -c_\phi\, s_\kappa & c_\kappa\, c_\omega - s_\kappa\, s_\omega\, s_\phi & c_\kappa\, s_\omega + c_\omega\, s_\kappa\, s_\phi \\ s_\phi & -c_\phi\, s_\omega & c_\omega\, c_\phi \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Analogamente ao caso 2D, se considerássemos agora que o referencial original tinha sofrido a rotação sequencial $(\omega - \phi - \kappa)$, obteríamos uma matriz de rotação R que seria calculada pelo produto das três matrizes seguintes:

$$R_x(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & -s_\omega \\ 0 & s_\omega & c_\omega \end{pmatrix}; R_y(\phi) = \begin{pmatrix} c_\phi & 0 & s_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\phi & 0 & c_\phi \end{pmatrix}; R_z(\kappa) = \begin{pmatrix} c_\kappa & -s_\kappa & 0 \\ s_\kappa & c_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja, considerando agora a multiplicação inversa das matrizes

$$\mathbf{R}_{\omega,\phi,\kappa} = \mathbf{R}_\omega \cdot \mathbf{R}_\phi \cdot \mathbf{R}_\kappa = \begin{pmatrix} c_\kappa\, c_\phi & -c_\phi\, s_\kappa & s_\phi \\ c_\omega\, s_\kappa + c_\kappa\, s_\omega\, s_\phi & c_\kappa\, c_\omega - s_\kappa\, s_\omega\, s_\phi & -c_\phi\, s_\omega \\ s_\kappa\, s_\omega - c_\kappa\, c_\omega\, s_\phi & c_\kappa\, s_\omega + c_\omega\, s_\kappa\, s_\phi & c_\omega\, c_\phi \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Se analisarmos as duas matrizes concluímos que

$$\mathbf{R}_{\omega,\phi,\kappa} = \mathbf{M}^{\mathsf{T}}_{\omega,\phi,\kappa}$$

2.6.2 Transformação afim 3D

No espaço tridimensional, uma transformação com uma matriz não-ortogonal é chamada transformação afim. As características da transformação afim bidimensional também se aplicam à transformação afim tridimensional. Esta pode ser escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.23}$$

onde:

- a_{10}, a_{20}, a_{30} são três translações (i.e., as coordenadas X, Y, Z da origem do referêncial $\{o, x, y, z\}$).

- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ são os nove elementos da matriz A os quais não satizfazem as condições de ortogonalidade e consequentemente admitem além de escalas diferentes nos três eixos coordenados, seis ângulos de rotação independentes nos três eixos coordenados.

Para determinarmos os 12 parâmetros a_{ij} precisamos de pelo menos 4 pontos homólogos nos dois sistemas de coordenadas.

Exercício 2.8
Dados os pontos A,B,C,D calcule os parâmetros da transformção afim 3D entre os dois sistemas de coordenadas

	Coord modelo (m)			Coord. Objecto (m)		
	x	y	z	X	Y	Z
A	0.303532	0.595058	0.034298	3321.65	1167.56	579.48
B	0.192638	0.602834	0.034116	3402.84	2061.10	576.80
C	0.303848	0.403493	0.026903	1776.75	1196.79	493.19
D	0.204120	0.434574	0.036672	2043.11	1996.72	574.62
P						

Solução 2.8
A solução obtida por ajustamento de mínimos quadrados é

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} -1425 \\ 3715 \\ 213 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -166.95 & 8068.09 & -107.88 \\ -8069.40 & -167.42 & 39.82 \\ 20.49 & 137.51 & 8107.24 \end{pmatrix}$$

A transformação de semelhança obtém-se a partir das Equações 2.23 substituindo a matriz não ortogonal **A** pela matriz de rotação ortogonal **R**:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x} \tag{2.24}$$

onde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_\phi c_\kappa & -c_\phi s_\kappa & s_\phi \\ c_\omega s_\kappa + s_\omega s_\phi c_\kappa & c_\omega c_\kappa - s_\omega s_\phi s_\kappa & -s_\omega c_\phi \\ s_\omega s_\kappa - c_\omega s_\phi c_\kappa & s_\omega c_\kappa + c_\omega s_\phi s_\kappa & c_\omega c_\phi \end{pmatrix}$$

Para determinar os sete parâmetros de transformação (três translações a_{10}, a_{20}, a_{30}, um factor de escala m e três ângulos de rotação w, ϕ, κ que definem a matriz R) serão necessárias sete equações de observação. No entanto, a solução para este problema será vista mais tarde no contexto da orientação absoluta.

Referências

Kraus, K., I. Harley e S. Kyle (2007). *Photogrammetry: geometry from images and laser scans.* de Gruyter Textbook vol. 1. Walter De Gruyter. ISBN: 9783110190076.

Molinari, Massimiliano, Stefano Medda e Samir Villani (2014). «Vertical Measurements in Oblique Aerial Imagery». Em: *ISPRS International Journal of Geo-Information* 3.3, pp. 914–928. ISSN: 2220-9964. DOI: 10.3390/ijgi3030914.

Verykokou, Styliani e Charalabos Ioannidis (2015). «Metric Exploitation of a Single Low Oblique Aerial Image». Em: *FIG Working Week 2015, From the Wisdom of the Ages to the Challenges of the Modern World, Sofia, Bulgaria, 17-21 May.*

— (2024). «Oblique Aerial Images: Geometric Principles, Relationships and Definitions». Em: *Encyclopedia* 4.1, pp. 234–255. ISSN: 2673-8392. DOI: `10.3390/encyclopedia4010019`. URL: `https://www.mdpi.com/2673-8392/4/1/19`.

Wolf, Paul R. e Bon A. Dewitt (2000). *Elements of photogrammetry : with applications in GIS*. 3rd ed. / Paul R. Wolf, Bon A. Dewitt. McGraw-Hill, Boston : xiii, 608 p. ISBN: 0072924543.

Capítulo 3

Câmaras digitais

Conteúdo

3.1 Introdução

O dispositivo mais importante da fotogrametria é possivelmente, a câmara fotográfica, dado que é o instrumento fundamental para a aquisição de fotografias/imagens as quais nos permitem gerar os diversos produtos fotogramétricos. O desenvolvimento da fotogrametria está intimamente ligado com o da aviação e fotografia. Durante mais de 100 anos, as fotos foram tiradas em placas de vidro ou material de filme (negativo e positivo). Em termos genéricos o princípio de funcionamento das câmaras fotogramétricas (também designadas por câmaras métricas) é semelhante ao das câmaras amadoras que temos em casa. As diferenças existentes entre elas, resultam principalmente das exigências de qualidade que as primeiras devem cumprir para que os produtos geoespaciais obtidos a partir das fotografias satisfaçam as especificações técnicas previamente estabelecidas. Atendendo à recente evolução tecnológica dos sensores imagem e à utilização generalizada de imagens em modelação 3D por processamento fotogramétrico é mais adequado designar as câmaras utilizadas nestes sistemas para a aquisição de fotografias, por dispositivo de imageamento.

Em termos genéricos podemos definir uma câmara fotográfica como uma caixa à prova de luz na qual a imagem dum objecto externo é projectada sobre um sensor (ou filme) através de uma abertura habitualmente equipada duma lente ou lentes, dum shutter e de uma abertura (ou diafragma) variável. Este conceito for alargado nestas últimas décadas com a utilização generalizada de câmaras digitais as quais detectam a energia da luz através de semicondutores eletrónicos em vez dos vulgares processos químicos da impressão na emulsão dos filmes fotográficos.

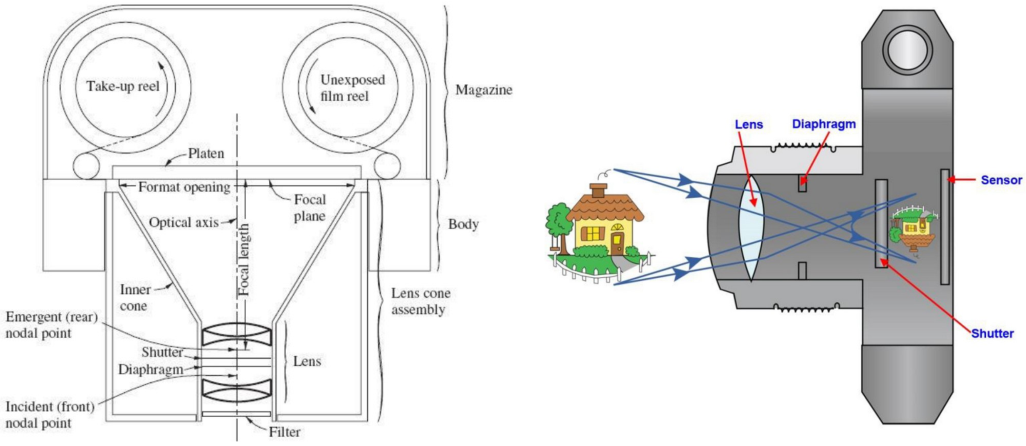


Figura 3.1: Componentes das câmaras: a) analógicas b) digitais

É recomendado que, em projectos de fotogrametria, as câmaras digitais, passíveis de serem utilizadas, cumpram os seguintes requisitos (Linder, 2016):

- Gerais - ser possível definir, manualmente ou pelo menos como uma opção, os parâmetros: distância focal, focagem, tempo de exposição e número f.
- Resolução (Número de pixeis): O que é decisivo é a resolução real (física), não a resolução interpolada! Quanto maior o número de pixels, melhor - mas não a qualquer preço: chips pequenos com um grande número de pixels, têm um tamanho de pixel muito pequeno e não são muito sensíveis à luz. Além disso, a relação sinal-ruído é pior. Isto irá fazer com que possamos encontrar partes muito escuras na imagem, especialmente em valores de ISO mais elevados (200 e mais).
- Distância focal (zoom): O que é decisivo é o zoom óptico não o digital (interpolado).
- Configuração da distância de focagem: deve ser possível desactivar o foco automático. Se a câmara tiver uma opção de macro, podemos utilizá-la para objectos pequenos.
- Tempo de exposição, número f: O número máximo de f (abertura da lente) não deve ser inferior a 1:2.8, o tempo de exposição deve ter um intervalo de pelo menos 1 ... 1/1000 segundos.
- Formatos de imagem: as imagens digitais são armazenadas habitualmente em formato JPEG ou TIFF. No entanto é importante que a taxa de compressão da imagem deve ser selecionável ou, melhor ainda, que a compressão possa ser desligada a fim de se minimizar a perda de qualidade. Neste caso teremos para cada marca (Sony, Cannon, etc...) um formato Raw.
- Armazenamento: São habituais os cartões de memória SD com capacidade até 64 GB. Como os PCs/-Laptops actuais são fornecidos com leitores de cartões SD, isso economizará energia do acumulador ao transferir dados da câmara para o computador.
- Fornecimento de energia: É importante poder usar baterias ou acumuladores vulgares, dado que são muito mais baratos do que os acumuladores proprietários e estão disponíveis em qualquer parte.

3.2 Componentes básicos das câmaras fotogramétricas

Os dispositivos de imageamento utilizados em fotogrametria (aérea/clássica e terrestre) podem ser categorizados em função do modo de formação da imagem Wolf e Dewitt, 2000. Os dispositivos que adquirem a imagem simultaneamente para a dimensão total da imagem são chamadas câmaras ou sensores matriciais. As câmaras matriciais utilizam shutters que abrem e fecham de forma a permitir que uma determinada quantidade de luz oriunda dum dado campo de visão ilumine um plano bidimensional (geralmente rectangular). Existem outros dispositivos de imageamento (geralmente utilizados em detecção remota) que detectam, num determinado momento, apenas uma projeção linear (faixa) do campo de visão. Este tipo de dispositivo, designado por câmaras de varrimento linear (ou pushbroom), exige um movimento (ou varrimento) do próprio dispositivo para se obter uma imagem bidimensional da área a fotografar. Um terceiro tipo de dispositivo, também muito utilizado nos primórdios da deteção remota, constrói uma imagem detectando apenas ponto de cada vez, obrigando a que o sensor tenha movimentos em duas direções perpendiculares (varrer e digitalizar) a fim de formar uma imagem bidimensional. Estes dispositivos são designados por scanners whiskbroom.

Embora as câmaras analógicas (de filme) já não sejam muito utilizadas em fotogrametria aérea, elas constituem um bom caso de estudo ao permitirem explicar de forma simples o processo e geometria de imageamento. As câmaras de lente única são as mais utilizadas na aquisição de fotografias para fins de mapeamento topográfico, dado que fornecem uma alta qualidade geométrica da imagem. Estas são geralmente classificadas de acordo com o seu campo de visão angular (ver figura 3.2) em:

- ângulo normal ($\alpha \leq 75°$),
- grande angular ($75° < \alpha \leq 100°$),
- super-grande angular ($\alpha > 100°$);

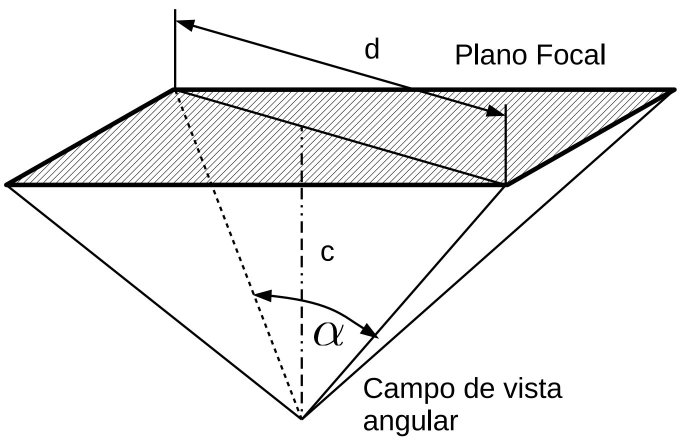


Figura 3.2: Campo de vista angular α

Tendo em conta a figura 3.2 o valor de α pode ser calculado facilmente a partir de:

$$\alpha = 2 \arctan \frac{d}{2c} \tag{3.1}$$

Por exemplo para uma fotografia convencional de lado 23cm e distância focal ($c = 152$ mm) obteremos:

$$\alpha = 2 \arctan \frac{\sqrt{230^2 + 230^2}}{2 \times 152} = 94° \quad ; \quad \text{grande angular}$$

As partes principais duma câmara fotogramétrica matricial são: (3.1):

- magazine do filme - é o compartimento da câmara que aloja o rolo de película fotográfica contendo a parte exposta e não exposta e ainda os mecanismos de avanço e planificação do filme.

- corpo da câmara - é uma peça única da câmara que abriga o mecanismo/sistema de avanço do filme para ser exposto à luz. Este mecanismo cíclico consiste em: i) avançar o filme; ii) planificar o filme; iii) armar o obturador (shutter) iv) disparar o obturador.
- cone de lentes - esta componente da câmara contém várias peças e tem várias funções. Nesta montagem estão a lente (ou conjunto de lentes), o filtro, o obturador e o diafragma. Na maioria das câmaras fotogramétricas de mapeamento topográfico, o cone das lentes contém também um cone interno, o qual suporta, em termos rígidos e numa dada posição relativa, o sistema de lentes e o plano focal. Esta posição define os elementos de orientação interna da câmara, os quais, por sua vez, são determinados através da calibração da câmara. O cone interno é feito com um metal com baixo coeficiente de expansão térmica, de modo a que as alterações nas temperaturas de operação não alterem a calibração. Nas câmaras aéreas que não possuem cones internos, o corpo e o cone da lente externa atuam em conjunto de forma a fixar a lente relativamente ao plano focal.
- Suportes de montagem e estabilizadores - O suporte é o mecanismo utilizado para fixar a câmara à aeronave e tem como objetivo obrigar a que o eixo ótico da câmara fique na vertical e o formato alinhado em relação à linha de voo. Duma montagem fotogramétrica devem fazer parte os dispositivos de amortecimento que impeçam que (ou pelo menos reduzem) as vibrações da aeronave sejam transmitidas para a câmara. Além disso de durante o tempo em que obturador está aberto e o filme é impressionado, o avião está em movimento e sujeito a turbulência. O processo de imageamento será influenciado por estes movimentos (lineares e angulares) provocando um arrastamento da imagem. Para eliminar (ou pelo menos atenuar) este efeito as câmaras fotogramétricas possuem também mecanismos de compensação do movimento designados por FCM (*Forward Motion Compensation*).

Note-se que a lente ou sistema de lentes é a parte mais importante (e mais cara) duma câmara fotogramétrica. São em geral lentes compostas altamente corrigidas e constituídas por diversos elementos. A colocação de um filtro na lente tem 3 objectivos: i) reduzir o efeito da neblina atmosférica; ii) fornecer uma distribuição uniforme da luz em todo a extensão da imagem e iii) proteger a lente contra danos e poeira. Por último é importante referir que o obturador e o diafragma regulam em conjunto a quantidade de luz e o tempo em que o filme (ou sensor) fica exposto. O obturador (shutter) regula o intervalo de tempo que a luz pode passar através da lente. O diafragma regula os f-stops da câmara através da variação do tamanho da abertura, a qual controla a quantidade de luz que passa pelas lentes. Encontra-se localizado entre os elementos que compõem a lente e consiste numa série de folhas que podem ser giradas para variar o tamanho da abertura. Nas câmaras fotogramétricas clássicas os f-stops variam de f-4 até f-22. Por exemplo para uma câmara com uma distância focal nominal de 152mm o diametro da baertura da ente varia entre 38 mm a f-4 até 7 mm a f-22.

3.3 Câmaras digitais

O termo popular de câmara digital é muito informal e inclusivamente pode conduzir-nos a uma interpretação errada do funcionamento deste dispositivo de imageamento, dado que o output tradicional é um sinal analógico. Um termo mais genérico e adequado seria o de câmara de estado sólido (*solid-state camera*) ou em aternativa o termo câmara CCD (*Charge Coupled Device*), os quais se referem obviamente ao tipo de sensor utilizado no dispositivo de imageamento.

Apesar de as câmaras digitais terem sido utilizadas em fotogrametria desde o início dos anos 70, estas não eram muito precisas dado que a tecnologia da época baseava-se em câmaras de tubo de video (*vidicon-tube*) a qual produzia sinais (imagens) muito instáveis. Essa instabilidade foi eliminada, no início dos anos 80, com o surgimento das câmaras de estádo sólido (CCD).

A principal vantagem das Câmaras digitais relativamente às câmaras clássicas baseadas em filme é a disponibilidade instantânea de imagens, a qual é essencial para aplicações em tempo real e a eliminação da fase de digitalização das fotografias para posterior processamento numérico. Uma outra vantagem reside na flexibilidade espectral das câmaras digitais. As principais desvantagens reside na resolução e campo de visão limitado.

O componente principal de qualquer sensor de estado sólido é o elemento detector de imagem, também conhecido como fotodetector. O princípio do fotodetector consiste na absorção de fotões de luz pelo material do sensor e na subsequente conversão num sinal elétrico em forma de carga ou alteração da resistividade. Embora alguns sensores de imagem tenham sido desenvolvidos utilizando matrizes de fotodetectores, os primeiros leitores e scanners de imagem eram baseados tipicamente num único fotodetector com um sistema de varredura mecânica externo que criava uma matriz ou linhas da imagem. no entanto, o desenvolvimento e utilização destes sensores só aconteceu depois de se ter implementado um sistema eficiente de transferência e leitura de carga (Atkinson, 2001).

As duas tecnologias (ou sensores) mais utilizadas para amplificar, converter e digitalizar os sinais elétricos gerados em cada um dos fotodetectores, os quais capturam a energia transportada pelos fotões, são: os CCD e os CMOS –*Complementary Metal Oxide Semicondutor* (ver figura 3.3).

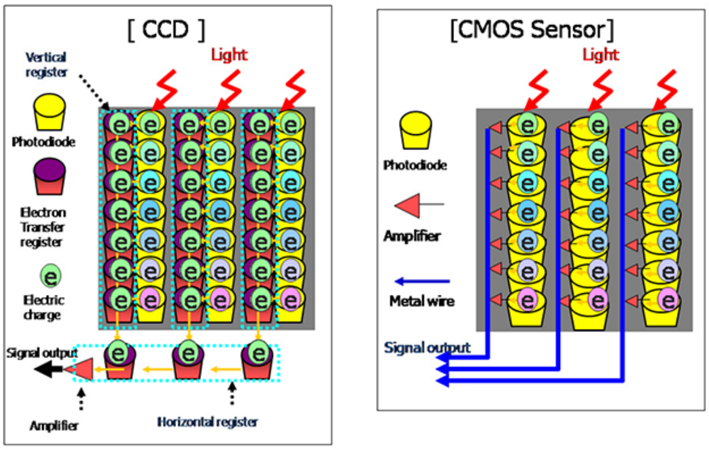


Figura 3.3: Principais diferenças entre sensores CCD e CMOS. Adaptado de https://www.1stvision.com/machine-vision-solutions/tag/sony-pregius

No sensor CCD o transporte da carga realiza-se de forma horizontal e vertical (ver figura 3.3). Por outro lado, a conversão da carga de todos os pixeis em voltagem é feita no exterior do sensor, na parte electrónica da câmara, conseguindo-se uma alta qualidade de imagem. Uma segunda vantagem destes sensores reside na boa relação que existe entre a área fotosensível e a área total do pixel o que se traduz numa alta sensibilidade e qualidade do sinal em condições de baixa luminosidade. Uma terceira vantagem dos sensor CCD reside na utilização dum obturador global (global shutter), o que permite uma iluminação simultânea de todos os pixeis. Por este motivo estes sensores são utilizados frequentemente em aplicações fotogramétricas e visão computacional onde se requerem, geralmente, tempos de exposição muito curtos. No entanto, um dos grandes inconvenientes deste sensor está relacionado com a limitação da velocidade de leitura do fluxo de dados.

No sensor CMOS a conversão da carga em voltagem é feita ao nível do pixel, ou seja, cada pixel tem o seu próprio circuito de leitura (ver figura 3.3). Por este motivo o desenho destes sensores tem um elevado grau de complexidade. As principais vantagens dos sensores CMOS relativamente aos sensores CCD são:

- maior sensibilidade devido à recente arquitetura de pixeis, que é benéfica em condições de baixa luminosidade,
- menor ruído (dark noise) o que melhora a fidelidade da imagem,
- maior capacidade de saturação o que contribui para uma maior dinâmica da imagem,
- menor custo,

- menor tamanho do pixel proporcionando a redução do formato do sensor o que por sua vez reduz o custo da lente.

3.4 Tamanho do pixel, resolução e distância focal equivalente

O tamanho do objecto que é imageado num único elemento CCD é dependente das características ópticas do sensor e do tamanho do próprio CCD. Por exemplo, um sistema CCD muito conhecido com focagem fixa é o sensor espacial SPOT *High Resolution Visible* (HRV). Este sensor contem uma matriz de 6000 CCDs, cada elemento tem a forma de um quadrado com lado 13 μm e a distância focal é de 1082 mm. Como orbita a 830 km, cada elemento regista uma área de 10×10 m no terreno.

No caso das câmaras digitais compactas a resolução do sensor é calculada a partir do tamanho do sensor e dos megapixeis efectivos. É ligeiramente superior que a resolução máxima (não-interpolada) da imagem que é usualmente definida nas especificações da câmara. A resolução do sensor é habitualmente utilizada para calcular o pixel pitch, área do pixel e densidade do pixel. Por motivos de simplicidade iremos dividir este cálculo em três etapas:

1. Em primeiro lugar, precisamos calcular o quociente entre o comprimento horizontal (Largura W) e vertical (Altura H). Dividindo o primeiro pelo último, obteremos este quociente r que é vulgarmente designado por aspecto.
$$r = \frac{W}{H}$$
Em geral o valor de r é:
    - 4:3, ou seja 1.33(3), usado em muitas câmaras compactas digitais
    - 3:2, ou seja 1.50, usado tradicionalmente no filme de 35 mm e em muitas câmaras DSLR.
    - 16:9, ou seja 1.77(7), usado em vídeos e em muitas câmaras digitais para capturas widescreen.
2. Conhecido r utilizamos o conceito de megapixeis efectivos (*EM, effective megapixels*)
$$EM = W \times H$$
ou seja,
$$(H \times r) \times H = EM \times 1000000$$
e portanto,
$$H = \sqrt{\frac{EM \times 1000000}{r}}$$
3. Para obtermos a resolução horizontal (P_w) e vertical (P_h) do sensor multiplicamos H pelo correspondente quociente
$$P_w = H * r \quad ; \quad P_h = H$$

Exemplo: Consideremos a seguinte câmara compacta (Olympus PEN E-PM1). Tendo em conta que:

- Sensor width: $S_w = 17.30$ mm
- Sensor height:$S_h = 13.00$ mm
- $EM = 12.30$ MP

A resolução do sensor (P_w, P_h) será então: 4045×3041.

Note-se que neste caso o pixel pitch em micrometers (μm) será dado por:

$$Pixel\ pitch = \frac{S_w}{P_w} \times 1000 = 4.28\ \mu m$$

A densidade de pixel (D) por cm será dada por:

$$D = \frac{\text{Total de pixels}}{\text{Área do sensor}}$$

ou seja,

$$D = \left(\frac{P_w}{S_w/10}\right)^2 \div 1000000$$

portanto,

$$D = \frac{EM \times 1000000}{S_w \times S_h} \div 10000$$

No caso desta câmara teríamos

$$d_p = (4045/1.73)^2/1000000 = 5.47\text{MP}/\text{cm}^2$$

Para calcular a distância focal equivalente (*equivalent focal length*) de uma lente em uma câmera com sensor menor que o full-frame, utilizamos o fator de corte, que é dado por

$$\text{Fator de Corte} = \frac{\text{Diagonal do Sensor Full-Frame}}{\text{Diagonal do Sensor da Câmera}}$$

Para a câmera Olympus PEN E-PM1, que possui um sensor Micro Quatro Terços, o fator de corte é aproximadamente 2.

Para o cálculo da distância Focal Equivalente, utilizamos a expressão:

$$\text{DF}_{\text{equiv}} = \text{DF}_{\text{nominal}} \times \text{Fator de Corte}$$

Exemplo: Consideremos a seguinte câmara compacta (Olympus PEN E-PM1) com uma lente de 25 mm

- Distância Focal Nominal: $\text{DF}_{\text{nominal}} = 25$ mm
- Fator de Corte: $\text{Fator de Corte} = 2$
- Distância Focal Equivalente:
$$\text{DF}_{\text{equiv}} = 25 \text{ mm} \times 2 = 50 \text{ mm}$$

Portanto, uma lente de 25 mm na câmara Olympus PEN E-PM1 tem uma distância focal equivalente de 50 mm.

3.5 Calibração da câmara

Depois de serem fabricadas e antes de serem utilizadas para fins fotogramétricos as câmaras devem cuidadosamente calibradas a fim de se determinarem de forma precisa e exata os valores de um certo número de constantes, designados por parâmetros de orientação interna, os quais fixam a geometria interna do feixe de raios luminosos emanados do objeto. Em termos gerais, a calibração de uma câmara pode ser necessária para (Atkinson, 2001):

- avaliar a performance das lentes,
- avaliar a estabilidade das lentes,
- determinar os parâmetros ópticos e geométricos das lentes,
- determinar os parâmetros ópticos e geométricos do sistema lente-câmara,
- determinar os parâmetros ópticos e geométricos do sistema de aquisição de imagem.

Os métodos de calibração fotogramétricos podem ser classificados nas seguintes categorias:

- calibração laboratorial - utilizando equipamento específico (por exemplo, colimadores, goniômetros, osciloscópios, etc.),
- calibração utilizando uma referência 3D externa- esta referência pode ser um objecto 3D com geometria precisa e conhecida ou então uma nuvem de pontos definida num objecto ou cena com geometria desconhecida mas com determinados pontos com coordenadas conhecidas e materializados através de alvos,
- auto-calibração - onde os parâmetros da câmara são determinados simultâneamente com os parâmetros de orientação externa das imagens num ajustamento por feixe do bloco de imagens.

No caso das câmaras digitais é importante começar por definir um sistema de coordenadas métrico utilizado as propriedades físicas do sensor (ver figura 3.4. Designando por:

- u, v as coordenadas pixel,
- n_x, n_y o tamanho da imagem ou seja o numero de colunas (width) e número de linhas (height);
- Δ_x, Δ_y o tamanho do pixel.

A transformação das coordenadas pixel em coordenadas métricas (ou fotocoordenadas) é dada por:

$$\begin{aligned} x &= \left(u - \frac{n_x}{2}\right)\dot{\Delta}_x \\ y &= -\left(v - \frac{n_y}{2}\right)\dot{\Delta}_y \end{aligned} \tag{3.2}$$

A transformação inversa é:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{\Delta_x} + \frac{n_x}{2} \\ y &= -\frac{y}{\Delta_y} + \frac{n_y}{2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

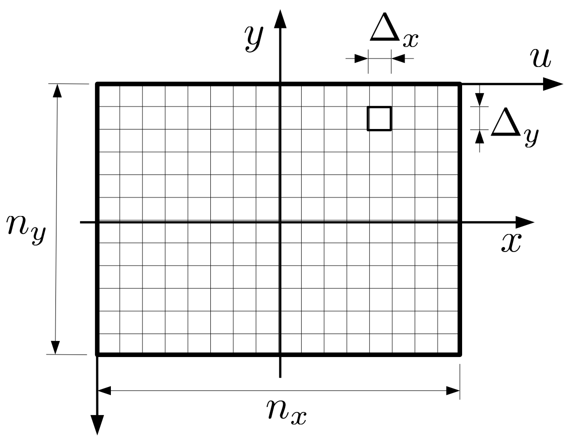


Figura 3.4: Sistema de coordenadas numa câmara digital

As distorções das lentes provocam o deslocamento da posição dos pontos imagem das suas posições ideais/teóricas. As equações que são utilizadas para modelar as distorções das lentes englobam habitualmente duas componentes: as distorções radiais e as distorções descentradas. É importante referir que nas câmaras fotogramétricas aéreas as distorções das lentes causam deslocamentos, em geral inferiores a $5\mu m$.

As distorções radiais simétricas das lentes são inevitáveis e resultam da fabricação das lentes, apesar de nos dias de hoje ser possível reduzi-las a um valor muito pequeno. Por outro lado, as distorções descentradas das lentes resultam em primeiro lugar da assemblagem imperfeita das lentes e não do seu desenho. Historicamente as câmaras fotogramétricas aéreas tinham valores muito superiores para as distorções radiais relativamente às distorções descentradas. O procedimento habitual para determinar as distorções radial das lentes consistia em ajustar uma curva polinomial a um gráfico cujos valores nas ordenadas eram os deslocamentos e em abcissas as distâncias radiais.

Nas atuais câmaras fotogramétricas a fabricação das lentes evolui de tal modo que as distorções radiais são da mesma ordem de grandeza das distorções descentradas. Em geral o relatório de calibração da câmara fornece os coeficientes polinomiais para a distorção radial simétrica das lentes (k_0, k_1, k_2, k_3, k_4), os coeficientes das distorções descentradas (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) e ainda as coordenadas do ponto principal (x_0, y_0). Assim as coordenadas imagem corrigidas das distorções das lentes (x_c, y_c) são obtidas a partir de (Wolf e Dewitt, 2000, Cap. IV, pág. 100):

$$\begin{cases} x_c = \bar{x} + \delta x + \Delta x \\ y_c = \bar{y} + \delta y + \Delta y \end{cases}$$

onde

$$\begin{array}{lcl} r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} & & \\ \bar{x} = x - x_0 & ; & \bar{y} = y - y_0 \\ \delta x = \bar{x}(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8) & ; & \delta y = \bar{y}(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8) \\ \Delta x = (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4)[p_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2p_2 \bar{x}\bar{y}] & ; & \Delta y = (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4)[p_2(r^2 + 2\bar{y}^2) + 2p_1 \bar{x}\bar{y}] \end{array}$$

3.6 O processo de exposição da imagem

Em fotogrametria, a exposição fotográfica, elemento critico que determina a quantidade de luz registada pela imagem, é um dos aspetos mais importantes na qualidade da imagem final. Por sua vez, a qualidade de imagem, por exemplo, a nitidez e a uniformidade de iluminação, tem também influência na reconstrução 3D da cena fotografada. Em termos fotográficos, para uma dada cena e condições de iluminação, a exposição geral duma fotografia é determinada por três configurações fundamentais da câmara digital (O'Connor, Smith e James, 2017): ISO, abertura do diafragma (*aperture*) e velocidade do obturador (*shutter speed*). Os efeitos relativos de cada um destes parâmetros definem o triângulo de exposição (ver figura 3.5).

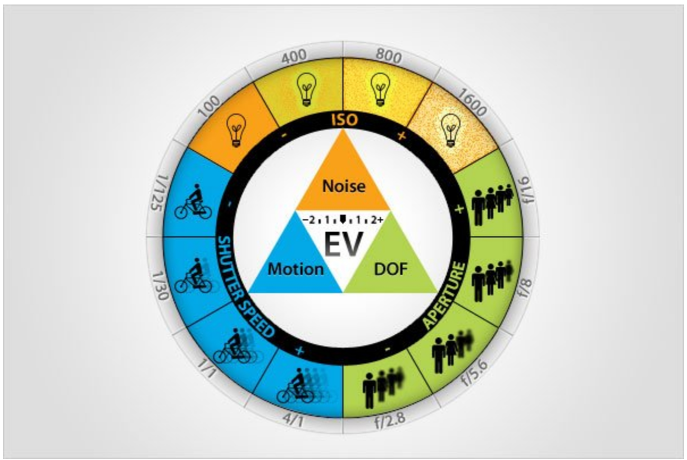


Figura 3.5: O triângulo de exposição. Adaptado de https://www.exposureguide.com/exposure/

A velocidade ISO define a sensibilidade do sensor à luz: quanto maior for o ISO maior será a quantidade de luz captada pelo sensor. Cada incremento do valor de ISO (ex. 100, 200,...) representa uma duplicação da sensibilidade do sensor à luz. A abertura controla o diafragma da lente e, portanto, a quantidade de luz que atravessa a lente e é captada pelo sensor. Quanto maior for a abertura do diafragma (menor f/x) menor será a profundidade de campo, provocando uma desfocagem dos objectos mais afastados. A velocidade do obturador, medida em frações de segundo, indica a velocidade com a qual o obturador abre e fecha. Quanto maior for o valor deste parâmetro maior a probabilidade do objecto em movimento ficar "congelado". No entanto, a quantidade de luz captada pelo sensor é inversamente proporcional à velocidade do obturador: menor velocidade, maior tempo de exposição e, consequentemente, maior quantidade de luz captada pelo sensor.

Para comparar diferentes imagens, a combinação da abertura com a velocidade do obturador é descrita nas máquinas digitais pelo parâmetro EV designado por valor de exposição. Um valor negativo significa que a imagem fica sob-exposta (demasiado escura) e o valor positivo significa que a imagem fica sobre-exposta (demasiado clara).

Referências

Atkinson, K.B. (2001). *Close range photogrammetry and machine vision*. Whittles. ISBN: 9781870325738.

Linder, Wilfried (2016). *Digital Photogrammetry: A Practical Course*. 4th. Springer Publishing Company, Incorporated. ISBN: 3662504626, 9783662504628.

O'Connor, James, Mike J. Smith e Mike R. James (2017). «Cameras and settings for aerial surveys in the geosciences». Em: *Prog. Phys. Geogr.* 41.3, pp. 325–344. ISSN: 0309-1333. DOI: 10.1177/0309133317703092. URL: http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0309133317703092.

Wolf, Paul R. e Bon A. Dewitt (2000). *Elements of photogrammetry : with applications in GIS*. 3rd ed. / Paul R. Wolf, Bon A. Dewitt. McGraw-Hill, Boston : xiii, 608 p. ISBN: 0072924543.

Capítulo 4

Orientação Analítica de Imagens e Restituição Fotogramétrica

Conteúdo

4.1 Introdução

Este capítulo aborda os métodos analíticos utilizados frequentemente em fotogrametria digital e quais são essenciais no cálculo dos parâmetros de orientação de imagens e na extracção de informação espacial sobre os objectos (coordenadas e elementos geométricos). Os métodos baseiam-se essencialmente na medição de coordenadas imagem obtidas, quer por medição manual/analógica, quer por métodos de processamento e análise de imagens.

As principais referências bibliográficas consultadas durante a escrita deste capítulo foram as seguintes: Wolf e Dewitt, 2000; Mikhail, Bethel e McGlone, 2001; Kraus, Harley e Kyle, 2007; Luhmann et al., 2007.

4.2 Equações de colinearidade

4.2.1 Condição de colinearidade

A projecção central definida no espaço 3D é o ponto de partida da maioria dos cálculos fotogramétricos. As coordenadas de um ponto objecto P podem ser obtidas a partir do vector posição do centro de perspectiva $\mathbf{X}_0$ e do vector definido entre o centro de perspectiva e o ponto objecto $\mathbf{X}^*$ (ver figura 4.4):

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}^* \tag{4.1}$$

O vector $\mathbf{X}^*$ está definido no sistema de coordenadas objecto. O vector imagem $\mathbf{x}'$ pode se transformado no espaço objecto através de uma matriz de rotação $\mathbf{R}$ e de um factor escala λ. Então, como têm a mesma direcção:

$$\mathbf{X}^* = \lambda \mathbf{R}\mathbf{x}'$$

Portanto, a projecção de um ponto imagem em um correspondente ponto objecto é dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \lambda \mathbf{R}\mathbf{x}'$$

isto é

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Nesta equação, o factor λ é desconhecido e o seu valor varia para cada ponto objecto. Se estiver apenas disponível uma única imagem, então, para um dado ponto objecto, apenas podemos definir a sua direcção, ficando indeterminada a sua posição espacial absoluta. As coordenadas 3D de P só podem ser calculadas se esta direcção espacial intersectar outro elemento geométrico conhecido (como por exemplo, a intersecção com um segundo raio definido a partir de uma outra imagem ou a intersecção com uma dada superfície).

Invertendo a equação 4.2 e adicionando o ponto principal $H'(x'_0, y'_0)$ e introduzindo terms de correcção $\mathbf{\Delta x}'$ (parametros de distorção da imagem, as coordenadas imagem são dadas por

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{\Delta x}' = \frac{1}{\lambda}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

isto é

$$\begin{bmatrix} x'-x'_0-\Delta x' \\ y'-y'_0-\Delta y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X-X_0 \\ Y-Y_0 \\ Z-Z_0 \end{bmatrix}$$

Note-se que a inversa de uma matriz de rotação é igual à sua transposta. Dividindo a primeira e a segunda equação pela terceira, a incógnita relativa ao factor escala é eliminada e as equações de colinearidade virão então:

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 + z' \frac{r_{11}(X-X_0)+r_{21}(Y-Y_0)+r_{31}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0)+r_{23}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)} + \Delta x' \\ y' &= y'_0 + z' \frac{r_{12}(X-X_0)+r_{22}(Y-Y_0)+r_{32}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0)+r_{23}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)} + \Delta y' \end{aligned} \tag{4.3}$$

Note-se que, no caso de o sistema de imageamento ser uma câmara escura vulgar, então $z' = -c$, como seria de esperar tendo em conta a figura 4.4. Por razões de generalidade decidimos manter a variável z' a fim de podermos aplicar estas equações a outros tipos de sistemas de imageamento tais como as câmaras panorâmicas. Além disso, estas equações descrevem a transformação das coordenadas objecto (X, Y, Z) nas correspondentes coordenadas imagem (x', y') como funções dos parâmetros de orientação interna (x'_0, y'_0, $c, \Delta x', \Delta y'$) e dos parâmetros de orientação externa de uma imagem $(\omega, \phi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0)$.

Estas equações podem escrever-se na forma simplificada por

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 - c\frac{k_x}{N} + \Delta x' \\ y' &= x'_0 - c\frac{k_y}{N} + \Delta y' \end{aligned}$$

onde

- $k_x = r_{11}(X-X_0)+r_{21}(Y-Y_0)+r_{31}(Z-Z_0)$
- $k_y = r_{12}(X-X_0)+r_{22}(Y-Y_0)+r_{32}(Z-Z_0)$
- $N = r_{13}(X-X_0)+r_{23}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)$

4.2.2 Linearização das equações

A linearização das equações de colinearidade é feita considerando o desenvolvimento em série de Taylor de cada uma das variáveis ou seja considerando que

$$\begin{aligned} x' + vx' &= F(\underbrace{w, \phi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0, X, Y, Z}, x'_0, y'_0, \Delta x') \\ y' + vx' &= G(\underbrace{w, \phi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0, X, Y, Z}, x'_0, y'_0, \Delta y') \end{aligned}$$

Em notação matricial esta linearização pode ser escrita na forma (Wolf e Dewitt, 2000)

$$\begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} vx' \\ vy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -b_{14} & -b_{15} & -b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & -b_{24} & -b_{25} & -b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw \\ d\phi \\ d\kappa \\ dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}$$

onde

- $b_{11} = \frac{z'}{N^2}[k_x(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - N(-m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z)]$

- $b_{12} = \frac{z'}{N^2}\{k_x\big[(\cos\phi)\Delta X + (\sin\omega\sin\phi)\Delta Y - (\cos\omega\sin\phi)\Delta Z\big]$
$-N\big[-(\sin\phi\cos k)\Delta X + (\sin\omega\cos\phi\cos k)\Delta Y - (\cos\omega\cos\phi\cos k)\Delta Z\big]$
- $b_{13} = -\frac{z'}{N}(m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z)$
- $b_{14} = \frac{z'}{N^2}(k_x m_{31} - N m_{11})$
- $b_{15} = \frac{z'}{N^2}(k_x m_{32} - N m_{12})$
- $b_{16} = \frac{z'}{N^2}(k_x m_{33} - N m_{13})$
- $b_{21} = \frac{z'}{N^2}[k_y(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - N(-m_{23}\Delta Y + m_{22}\Delta Z)$
- $b_{22} = \frac{z'}{N^2}\{k_y\big[(\cos\phi)\Delta X + (\sin\omega\sin\phi)\Delta Y - (\cos\omega\sin\phi)\Delta Z\big]$
$-N\big[(\sin\phi\sin k)\Delta X - (\sin\omega\cos\phi\sin k)\Delta Y + (\cos\omega\cos\phi\sin k)\Delta Z\big]$
- $b_{23} = \frac{z'}{N}(m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z)$
- $b_{24} = \frac{z'}{N^2}(k_y m_{31} - N m_{21})$
- $b_{25} = \frac{z'}{N^2}(k_y m_{32} - N m_{22})$
- $b_{26} = -\frac{z'}{N^2}(k_y m_{33} - N m_{23})$
- $J = x' - F^0 = x' - (x'_0 + z'\frac{k_x}{N} + \Delta x')$
- $K = y' - G^0 = y' - (y'_0 + z'\frac{k_y}{N} + \Delta y')$

4.3 Orientação interna

As coordenadas fotogáficas medidas não estão isentas de erros. Existe um certo número de erros sistemáticos, provenientes de diversas fontes cujo efeito é preciso eliminar ou pelo menos atenuar, uma vez que a sua eliminação é bastante difícil, senão impossível. Contudo, estas correções só serão aplicadas se a precisão do trabalho assim o exigir. Por isso, é necessário efectuar um estudo do efeito das correções, afim de se desprezarem aquelas que não introduzem alterações significativas ao resultado final. Os erros sistemáticos existentes são:

1. eixos fiduciais não se intersectam no ponto principal,
2. expansão ou contração (i.e. deformação) do material fotográfico (caso,
3. distorções das lentes,
4. distorções devidas à refracção atmosférica,
5. distorções devidas à curvatura terrestre,
6. distorções devidas ao deslocamento da imagem.

As correcções são aplicadas tendo em vista a eliminação do efeito destes erros.

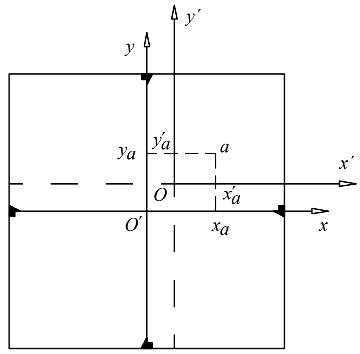


Figura 4.1: Principais parâmetros da orientação interna

4.3.1 Redução ao ponto principal

Geralmente, o ponto principal não coincide com com a interseção das linhas fiduciais. No entanto, é conveniente reduzir as coordenadas medidas num sistema de eixos fiduciais, em coordenadas relativas a um sistema cuja origem seja o ponto principal.

Consideremos a figura 4.1 onde $x\prime$ e $y\prime$ representam os eixos do novo sistema com origem no ponto principal e sejam (x_0, y_0) as suas coordenadas relativas ao sistema de eixos fiduciais, obtidas na calibração da câmara. Para qualquer ponto imagem a, a redução do eixo principal para o ponto principal é:

$$\begin{cases} x\prime_a = x_a - x_0 \\ y\prime_a = y_a - y_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Note-se que se a câmara estivesse bem calibrada, o ponto principal coincidiria com a intersecção das linhas fiduciais, não sendo necessário, portanto, esta correcção. Embora isto não aconteça, devido a limitações da construção das câmaras em alguns casos com menos precisão podemos assumir que estamos nesta situação teórica.

4.3.2 Deformação do filme

As fotocoordenadas medidas contêm pequenos erros devidos à contracção ou expansão do material fotográfico que suporta a emulsão do negativo e positivo. Antes de serem utilizadas em qualquer cálculo fotogramétrico, deverão ser corrigidas destes erros, dado que podem ter efeito no resultado final. A grandeza do erro final dependerá da magnitude do erro de expansão ou contracção que, por sua vez, depende do tipo de material utilizado. Uma grande variedade de materiais é usada na elaboração de positivos fotográficos. Entre eles podemos destacar o vidro e o papel. O primeiro possui uma grande estabilidade dimensional pelo que se pode considerar isento de deformações. Pelo contrário o papel apresenta uma grande instabilidade dimensional, facto este que o exclui de qualquer trabalho fotogramétrico preciso. A quantidade de expansão ou contracção presente numa fotografia pode ser determinada comparando as distâncias fotográficas medidas, entre marcas fiduciais opostas, com os seus valores correspondentes, determinados na altura da calibração da camara. Estas distorções podem classificar-se em três categorias:

1. Distorções uniformes - quando as distorções são constantes para qualquer direcção. Considera-se apenas um factor escala s_1:

$$\begin{cases} x' = s_1 x \\ y' = s_1 y \end{cases} \tag{4.5}$$

2. Distorções diferenciais - muitas vezes podemos observar uma distorção sistemática na direcção longitudinal do filme e uma outra distorção sistemática diferente na direcção transversal do filme, pro-

duzindo as duas uma deformação afim da fotografia. Este problema pode ser ultrapassado através de uma transformação afim das fotocoordenadas.

3. Distorções irregulares - podem ser devidas a várias causas, por exemplo: propriedades elásticas do material, falta de planaridade da superfícies da emulsão, etc. Estes erros podem ser complexos e não seguirem uma distribuição linear. O efeito destes erros pode ser minimizado utilizando as seguintes equações:

$$\begin{cases} x\prime_a = x + a_1 x + c_1 y + d_1 x y \\ y\prime_a = y + a_2 y + c_2 y + d_2 x y \end{cases} \tag{4.6}$$

Os parâmetros ai, bi, ci, di podem corrigir vários factores ao mesmo tempo: estabelecer uma translacção (a1 , a2), originar uma rotação e uma transformação afim (b1 , b2 , c1 , c2) e por último estabelecer uma correcção quadrática ou curvilínea (d1 , d2) da distorção do filme (i.e. da base da emulsão).

4.3.3 Distorção das Lentes

O relatório de calibração da câmara contem valores tabelados da distorção da lente (Δr) como função da distância radial (r) de qualquer ponto ao ponto principal, a qual é dada por:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

onde x e y são as fotocoordenadas de um ponto imagem qualquer. Se r é a distância radial observada e Δr a correção correspondente da distorção, obtida por leitura numa curva ou por interpolação numa tabela, o valor correcto da distância radial é:

$$r' = r - \Delta r$$

As coordenadas fotográficas (x', y') são então:

$$\begin{cases} x'_a = \dfrac{r'}{r} x \\ y'_a = \dfrac{r'}{r} y \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x'_a = (1 - \dfrac{\Delta r}{r}) x \\ y'_a = (1 - \dfrac{\Delta r}{r}) y \end{cases} \tag{4.7}$$

Um método alternativo é o polinomial que consiste numa aproximação da curva de distorção por um polinómio do tipo:

$$\Delta r = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 \tag{4.8}$$

Os coeficientes k, que definem a forma da curva, são obtidos através de um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, em que se utiliza a equação (6.5) com os valores de r e , conhecidos da calibração da camara. Depois de determinados os k's, a distorção radial é determinada para qualquer valor de r aplicando de novo a equação (4.8) tendo agora como incógnita a variável Δr. Utilizando este método polinomial, as coordenadas corrigidas serão:

$$\begin{cases} x'_a = (1 - (k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)) x \\ y'_a = (1 - (k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)) y \end{cases} \tag{4.9}$$

Por último caso as lentes tenham sido calibradas pelo USGS, o relatório de calibração da câmara fornece os coeficientes polinomiais para a distorção radial simétrica das lentes (k_0, k_1, k_2, k_3, k_4), os coeficientes das distorções descentradas (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) e ainda as coordenadas do ponto principal (x_0,y_0). Assim as coordenadas imagem corrigidas das distorções das lentes (x_c, y_c) são obtidas a partir de (Wolf e Dewitt, 2000, Cap. IV, pág. 100):

$$\begin{cases} x_c = x' + \delta x + \Delta x \\ y_c = y' + \delta y + \Delta y \end{cases}$$

onde

$$\begin{array}{ll} r = \sqrt{x'^2 + y'^2} & \\ \bar{x} = x - x_0 & ; \quad \bar{y} = y - y_0 \\ \delta x = x'(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8) & ; \quad \delta y = y'(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8) \\ \Delta x = (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4)[p_1(r^2 + 2x'^2) + 2p_2 x' y'] & \\ \Delta y = (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4)[p_2(r^2 + 2y'^2) + 2p_1 x' y'] & \end{array}$$

Note-se que em todos os métodos expostos neste parágrafo, considerou-se que a distorção radial das lentes é simétrica em relação ao ponto principal.

Exercício 4.9

Considerando o relatório de calibração duma câmara do USGS dado na tabela seguinte calcule as coordenadas corrigidas do ponto imagem $a = (-47.018, 43.430)$ dadas em mm.

Distorções radiais		Distorções descentradas		Ponto principal	
k_0	0.5493×10^{-4}	p_1	$-0.7953 \times 10^{-7}\text{mm}^{-1}$	x_0	0.010 mm
k_1	$-0.5984 \times 10^{-8}\text{mm}^{-2}$	p_2	$0.1018 \times 10^{-6}\text{mm}^{-1}$	y_0	-0.001 mm
k_2	$0.1053 \times 10^{-12}\text{mm}^{-4}$	p_3	0mm^{-2}		
k_3	0mm^{-6}	p_4	0mm^{-4}		
k_4	0mm^{-8}				

Solução 4.9

Utilizando as equações definidas anteriormente para a calibração de câmaras pelo USGS obteremos:

$$\begin{array}{l} \bar{x} = -47.028; \quad \bar{y} = 43.431; \quad r = 64.015 \\ \delta x = -0.0015mm; \quad \delta y = 0.0014mm; \quad \Delta x = -0.0011mm; \quad \Delta y = 0.0011mm \\ x_c = -47.028 - 0.0015 - 0.0011 = -47.031mm; \quad y_c = 43.431 + 0.0014 + 0.0011 = 43.434mm \end{array}$$

4.3.4 Refracção Atmosférica

Teoricamente, um raio de luz que atravesse a atmosfera deverá seguir uma linha recta. Mas na realidade, ele é desviado e descreve uma curava, devido à diminuição da densidade atmosférica com o aumento da altitude. O efeito da refracção é deslocar todos os pontos da imagem, radialmente, a partir do ponto nadiral fotográfico (ponto principal de uma fotografia vertical) em direcção ao exterior, sendo, a distorção nula nesse ponto.

Na figura 4.2, se o raio de luz que vem do ponto objecto A seguir uma linha recta, a sua imagem deverá aparecer em a´ e não em a como acontece. A distorção angular devida à refracção é θ e a distorção linear na fotografia é dr. A grandeza da distorção aumenta com a altitude de vôo e com o ângulo entre a vertical e o raio de luz. Da figura 4.2 vem:

$$\overline{Ca} = \frac{c}{\cos\alpha} \quad \text{e} \quad dr = \frac{\overline{Ca}\theta}{\cos\alpha} \quad (\theta \text{ pequeno})$$

Ou seja,

$$dr = \frac{c\theta}{\cos^2\alpha}$$

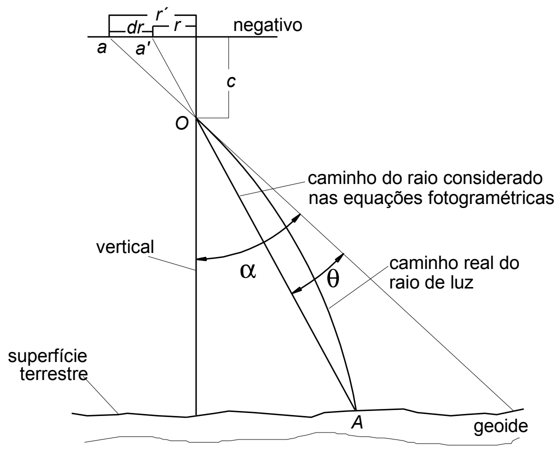


Figura 4.2: Refracção atmosférica

Para corrigir um dado ponto imagem da distorção devida à refração atmosférica, calcula-se, primeiro ângulo , a partir das fotocoordenadas medidas e da distância focal da câmara

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{r}{c} \quad \text{com } r^2 = x^2 + y^2$$

De seguida, é calculada a distorção angular considerando uma atmosfera padrâo, para uma certa altitude de vôo, elevação média do solo e ângulo . As fórmulas adoptadas por vários autores para o cálculo de podem reduzir-se à forma:

$$\theta = \kappa \tan\alpha$$

na qual todas as variáveis, excepto , são consideradas constantes para uma dada fotografia e estão implícitas no factor k.

Bertram, em 1965, apresentou uma fórmula para calcular k, baseada na atmosfera modelo ARDC 1959:

$$\kappa = \left[\frac{2410 \times H}{H^2 - 6H + 250} - \frac{2410 \times h}{h^2 - 6h + 250}\frac{h}{H}\right] \times 10^{-6} \tag{4.10}$$

na qual, H é a altitude de vôo (em kilometros) acima do nível médio das àguas do mar e h é a elevação média do solo (tambem em kilometros). Finalmente, as coordenadas fotográficas correctas x´ e y´ são dadas por:

$$\begin{cases} x' = (1 - \dfrac{dr}{r})x \\ y' = (1 - \dfrac{dr}{r})y \end{cases} \tag{4.11}$$

4.3.5 Curvatura Terrestre

Esta correcção é aplicada quando se pretendem determinar as posições de pontos no espaço objecto num sistema de coordenadas plano. Na figura 4.3, A é um ponto do terreno e A' é a sua posição num mapa plano tangente à superfície da Terra no ponto nadiral terrestre (o ponto do solo situado na vertical que passa pelo estação de exposição).

A equação para calcular a distorção devida à curvatura terrestre (dr) é

$$dr = \frac{H' r^3}{2Rc^2}$$

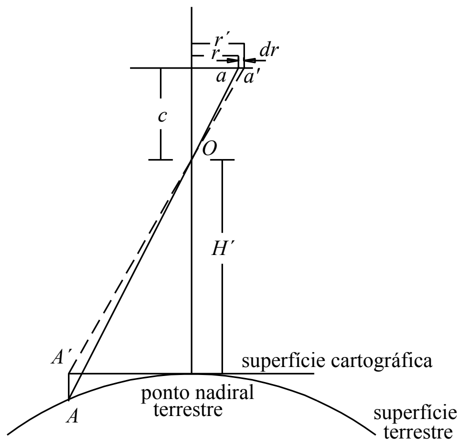


Figura 4.3: Curvatura terrestre

Nesta equação: H' é a altitude de vôo acima do solo, r é a distância radial do ponto principal ao ponto imagem a, R é o raio de curvatura terrestre e c é a distância focal da camara. A distância radial correcta r', para um ponto imagem é

$$r' = r + dr$$

E, portanto, as coordenadas fotográficas correctas são dadas por

$$\begin{cases} x' = (1 - \dfrac{dr}{r})x \\ y' = (1 - \dfrac{dr}{r})y \end{cases} \tag{4.12}$$

Exercício 4.10

4.3.6 Deslocamento da Imagem

As várias espécies de deslocamentos da imagem, são as principais causas de degradação da qualidade das fotografias aéreas. O deslocamento, a rotação e a vibração da aeronave durante o momento de exposição podem causar uma falta de nitidez na imagem, o que por sua vez pode resultar na degradação da resolução e deslocamento do ponto imagem. Assim, as câmaras são projectadas de forma a incluirem um dispositivo de compensação do deslocamento da imagem, o qual provoca um deslocamento do filme durante a exposição. Existem, basicamente, 3 métodos de compensação do deslocamento da imagem:

1. através do movimento (simultâneo) do filme,
2. através do movimento do cone de lentes,
3. utilizando um obturador no plano focal.

De modo geral, combina-se o terceiro método com um dos dois primeiros. De facto, enquanto que o primeiro e o segundo método provocam uma distorção da geometria interior da camara, o terceiro cria uma situação semelhante à camara fotográfica de faixa continua, isto é representa um número infinito de fotografias relativamente a um centro de perspectiva em contínuo movimento. No entanto no uso normal das fotografias aéreas verticais para cartografia a escalas pequenas e grandes, a utilização do dispositivo de compensação do deslocamento da imagem pode não ser necessário. No caso especial de trabalhos de grande precisão, podemos considerar o deslocamento da imagem de duas espécies:

1. devido a deslocamentos lineares,
2. devido a deslocamentos rotacionais.

Por enquanto estudaremos, apenas, os deslocamentos lineares da imagem. Considerando que a aeronave voa a uma altitude e velocidades constantes e admitindo que não existem rotações da camara a velocidade do filme é dada por:

$$v_F = \frac{c\,v}{H}$$

A velocidade da imagem é:

$$v_i = \frac{c\,v}{H-h}$$

Nestas expressões: c é a distância focal, H é a altura de vôo acima do datum, h é a cota do terreno acima do datum e v é a velocidade da aeronave. A velocidade relativa é:

$$\Delta v = c\,v \frac{h}{(H-h)H}$$

Se o tempo de exposição for t_e então a mancha do ponto imagem na direcção do deslocamento é dada por:

$$d\,r = \Delta v\,t_e \tag{4.13}$$

4.4 Orientação externa

4.4.1 Caso normal

A orientação externa de uma imagem é determinada por seis parâmetros os quais descrevem a orientação (w, ϕ, k) e a posição espacial do sistema de coordenadas da câmara (X_0, Y_0, Z_0) relativamente ao sistema de coordenadas objecto. O caso padrão na fotogrametria aérea de um plano imagem horizontal é também usado como o modelo básico na fotogrametia terrestre e de curta-distância.

O sistema de coordenadas da câmara tem a sua origem no centro de perspectiva (ver figura 4.4). É também definido através de entidades de referência fixas na câmara (marcas fiduciais, sistema sensor, reseau) e pode, consequentemente, ser reconstruido a partir da imagem e ser relacionado com o dispositivo de medição das coordenadas imagem ou pixel (ex. comparador). Como já foi dito anteriormente este procedimento é designado em fotogrametria por reconstrução da orientação interna, ou simplesmente orientação interna e constitui um passo fundamental da orientação externa.

A posição espacial da câmara é definida pelo vector $\mathbf{X}_0$ definido a partir do origem dos sistema de coordenadas para o centro de perspectiva (ou exposição) O'. A matriz de rotação ortogonal $\mathbf{R}$ define a orientação angular espacial. Ela é resultante de três rotações independentes ω, ϕ, κ em torno dos eixos X, Y, Z, respectivamente no sentido directo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_0 &= \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{R} = \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\kappa & -\cos\phi\sin\kappa & \sin\phi \\ \cos\omega\sin\kappa+\sin\omega\sin\phi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa-\sin\omega\sin\phi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\phi \\ \sin\omega\sin\kappa-\cos\omega\sin\phi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa+\cos\omega\sin\phi\sin\kappa & \cos\omega\cos\phi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

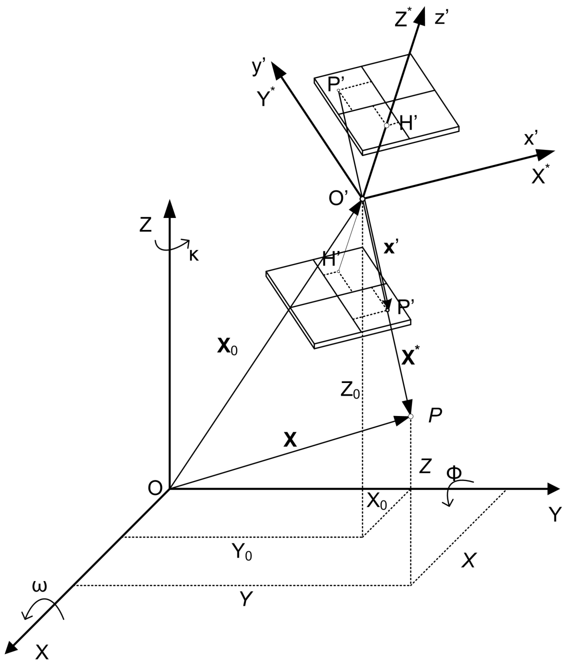


Figura 4.4: Orientação externa e imageamento projectivo

Designando por s a função sin e por c a função cos, teremos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\kappa & -c_\phi s_\kappa & s_\phi \\ c_\omega s_\kappa + s_\omega s_\phi c_\kappa & c_\omega c_\kappa - s_\omega s_\phi s_\kappa & -s_\omega c_\phi \\ s_\omega s_\kappa - c_\omega s_\phi c_\kappa & s_\omega c_\kappa + c_\omega s_\phi s_\kappa & c_\omega c_\phi \end{bmatrix}$$

Os elementos r_{ij} da matriz de rotação podem ser definidos quer como funções trigonométricas dos três ângulos de rotação ou como funções de quatro variáveis algébricas.

Exercício 4.11

Dados 3 ângulos de rotação ($w = -1.3948$gon, $\phi = 0.1041$gon, $\kappa = -0.8479$ gon) calcular a matriz de rotação **R**. Implemente uma função MatLab que devolva uma matriz de rotação 3,3.

Solução 4.11

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.999910 & 0.013319 & 0.001635 \\ -0.013351 & 0.999671 & 0.021907 \\ -0.001343 & -0.021927 & 0.999759 \end{pmatrix}.$$

Note-se que há determinados autores que em vez da matriz de rotação **R** consideram a matriz de rotação $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\kappa \mathbf{M}_\phi \mathbf{M}_\omega$ definida do seguinte modo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\kappa & c_\omega s_\kappa + s_\omega s_\phi c_\kappa & s_\omega s_\kappa - c_\omega s_\phi c_\kappa \\ -c_\phi s_\kappa & c_\omega c_\kappa - s_\omega s_\phi s_\kappa & s_\omega c_\kappa + c_\omega s_\phi s_\kappa \\ s_\phi & -s_\omega c_\phi & c_\omega c_\phi \end{bmatrix} = \mathbf{R}^\top$$

Além disso, conhecendo os elementos da matriz **M** ou **R** podemos calcular os ângulos de rotação w, ϕ, κ (ver Equações 4.19)

Exercício 4.12

Para a matriz de rotação **R** cálculada no exercício anterior calcule os ângulos de rotação da sequência w, ϕ, κ.

Solução 4.12

Como $\sin\phi = r_{13}$ teremos $\phi = 5'37''$. Por outro lado $\tan\kappa = -r_{12}/r_{11}$ e portanto $\kappa = -45'47''$. Finalmente $\tan w = -r_{23}/r_{33}$, vem que $w = -1^o 15'19''$.

4.4.2 Caso especial da fotogrametria terrestre

Para o caso especial da fotogrametria terrestre convencional o eixo da câmara é aproximadamente horizontal. Para evitarmos singularidades nas funções trignométricas, ou mudamos a sequência de rotação ou alteramos o sistema de coordenadas imagem, definindo o plano imagem pelos eixos x' e z' (em vez de x' e y'). Neste caso os sistemas de aquisição de imagem que fornecem também medições de ângulos (video-teodolitos) utilizam os ângulos de rotação w (tilt sobre o eixo horizontal), κ (rolamento sobre o eixo óptico) e ϕ ou α (azimute) em vez da sequência padrão w, ϕ e κ. Além disso é importante recordar que os ângulos em topografia se medem positivamente no sentido dos ponteiros do relógio.

A sequência de rotação ϕ, w e κ conduz à matriz de rotação:

$$\mathbf{R}_{\text{Terr.}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\kappa - s_\phi s_w s_\kappa & -s_\phi c_w & c_\phi s_\kappa + s_\phi s_w c_\kappa \\ s_\phi c_\kappa + c_\phi s_\omega s_\kappa & -c_\phi c_w & s_\phi s_\kappa - c_\phi s_s c_\kappa \\ -c_\omega s_\kappa & s_w & c_\omega c_k \end{bmatrix}$$

Exercício 4.13

Dados os parâmetros de orientação interna e externa duma imagem calcule as coordenadas imagem do ponto objecto P.

4.4.3 Modelos matemáticos

A orientação duma imagem significa, nesta abordagem, o cálculo dos parâmetros de orientação externa da imagem utilizando métodos indirectos de orientação. Estes métodos recorrem a pontos de apoioXYZ cujas coordenadas imagem podem ser medidas na imagem. Os procedimentos de cálculo da orientação externa podem ser divididos em dois grandes grupos:

1. Cálculo da orientação externa utilizando as equações de colinearidade. A este procedimento de cálculo é designado por recessão espacial.

2. Cálculo da orientação externa utilizando as equações projectivas. Neste caso o método mais vulgarmente utilizado é a Transfomação Linear Directa (DLT - *Direct Linear Transform*), o qual requere um mínimo de 5 pontos e fornece uma solução directa do problema sem a necessidade de aproximações iniciais.

Recessão espacial por colinearidade

A recessão espacial é utilizada para calcular a orientação externa duma única imagem. O procedimento requer que sejam conhecidas as coordenadas XYZ de pelo menos três pontos, que não estejam situados sobre uma mesma linha recta. De facto o feixe de raios oriundo dos pontos de referência e que passa pelo centro de perspectiva pode apenas encontrar os pontos imagem numa única posição e atitude (orientação) da imagem.

Utilizando as coordenadas imagem medidas dos pontos de referência, com parâmetros de orientação interna conhecidos podemos obter as seguintes equações de observação

$$x' + vx' = F(\underbrace{X_0, Y_0, Z_0, w, \phi, \kappa}, x'_0, y'_0, \Delta x', X, Y, Z)$$

$$x' + vx' = G(\underbrace{X_0, Y_0, Z_0, w, \phi, \kappa}, x'_0, y'_0, \Delta x', X, Y, Z)$$

As funções F e G representam as equações de colinearidade, onde se identificou as variáveis desconhecidas. Este sistema pode ser linearizado utilizando uma expansão em série de Taylor em torno de uma aproximação inicial $()^0$ para as variáveis desconhecidas, ou seja

$$\begin{aligned} v x_i' &= \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}\right)^0 dX_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z_0}\right)^0 dZ_0 \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^0 dw + \left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^0 d\phi + \left(\frac{\partial F}{\partial \kappa}\right)^0 d\kappa - (x' - (x_i')^0) \\ v y_i' &= \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}\right)^0 dy_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial Z_0}\right)^0 dZ_0 \\ &+ \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^0 dw + \left(\frac{\partial G}{\partial \phi}\right)^0 d\phi + \left(\frac{\partial G}{\partial \kappa}\right)^0 d\kappa - (y' - (y_i')^0) \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais são dadas pelas equações

Estas equações podem ser representadas na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} v x' \\ v y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -b_{14} & -b_{15} & -b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & -b_{24} & -b_{25} & -b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw \\ d\phi \\ dk \\ dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix}$$

Considerando agora n pontos o sistema de equações anteriores pode ser escrito na forma :

$$\underset{(2n,1)}{\mathbf{l}} + \underset{(2n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(2n,6)}{\mathbf{A}}\underset{(6,1)}{\mathbf{dx}}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{13}^1 & -b_{14}^1 & -b_{15}^1 & -b_{16}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{23}^1 & -b_{24}^1 & -b_{25}^1 & -b_{26}^1 \\ b_{11}^2 & b_{12}^2 & b_{13}^2 & -b_{14}^2 & -b_{15}^2 & -b_{16}^2 \\ b_{21}^2 & b_{22}^2 & b_{23}^2 & -b_{24}^2 & -b_{25}^2 & -b_{26}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{11}^n & b_{12}^n & b_{13}^n & -b_{14}^n & -b_{15}^n & -b_{16}^n \\ b_{21}^n & b_{22}^n & b_{23}^n & -b_{24}^n & -b_{25}^n & -b_{26}^n \end{pmatrix}; \mathbf{dx} = \begin{pmatrix} dw \\ d\phi \\ dk \\ dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix}; \mathbf{l} = \begin{pmatrix} J_1 \\ K_2 \\ J_2 \\ K_2 \\ \vdots \\ J_n \\ K_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v x_1' \\ v y_1' \\ v x_2' \\ v y_2' \\ \vdots \\ v x_n' \\ v y_n' \end{pmatrix}$$

A solução mínimos quadrados deste sistema é dada por:

$$\hat{\mathbf{dx}} = (\mathbf{APA})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{Pl}; \quad \hat{s}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^\top\mathbf{Pv}}{2n-6}}$$

onde $\hat{s}_0$ é o desvio padrão à posteriori do ajustamento.

Exercício 4.14

Para uma imagem com os seguintes elementos de orientação interna ($c = 153.24mm$, $x_0 = y_0 = 0.0$) e para os seguintes pontos presentes na imagem e dos quais se conhecem as respectivas coordenadas imagem e coordenadas terreno

	Coord. imagem (mm)		Coord. terreno (m)		
	x	y	X	Y	Z
P1	-86.15	-68.99	36589.41	25273.32	2195.17
P2	32.183	82.21	37631.08	31324.51	728.69
P3	-45.762	-76.63	39100.97	24934.98	2386.5
P4	28.472	64.43	40426.54	30319.81	757.31

calcule os parâmetros de orientação externa da imagem.

Solução 4.14
Considerando como parâmetros iniciais o vector $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1.7873, 1014.7463, 1038.1456, 655.2098)^\top$ teremos para a primeira iteração:

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -0.21483 & 0.97665 & 0 \\ -0.97665 & -0.21484 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -204.9154 & 3.3195 & -85.7110 & 0.0519 & -0.2361 & -0.1333 \\ 89.3349 & -69.6178 & -84.3257 & 0.2361 & 0.0519 & 0.1355 \\ -228.4676 & 12.5155 & 92.2553 & 0.0519 & -0.2360 & 0.1606 \\ 104.6845 & -74.0397 & 101.6175 & 0.2360 & 0.0519 & -0.1458 \\ -195.4704 & -99.0427 & -87.9198 & 0.0519 & -0.2361 & 0.1505 \\ -9.7457 & -93.9808 & 95.2001 & 0.2361 & 0.0519 & 0.1390 \\ -177.9455 & -91.2117 & 98.8492 & 0.0519 & -0.2360 & -0.1243 \\ -3.0854 & -106.1839 & -78.6672 & 0.2360 & 0.0519 & -0.156 \end{pmatrix}$;

- $\mathbf{l} = (2.09534, 1.73399, 0.70150, 0.32673, -3.12190, -1.24120, 0.14483, -0.72620)^\top$;

- $\mathbf{dx} = (0.01150, 0.03241, -0.00106, 12.51716, -13.07250, -3.14647)^\top$;

No final da iteração nº 7 teríamos:

$$\mathbf{x} = (0.01052, 0.03247, 1.78608, 1042.492, 1029.344, 651.345)^\top$$

Transformação Linear Directa

Utilizando a transformação linear directa (DLT- *Direct Linear Transformation*) e resolvendo um sistema linear é possível determinar a orientação de uma imagem sem ser necessário o uso de aproximações iniciais. O método é baseado nas equações de colinearidade em conjunção com uma transformação afim das coordenadas imagem. De facto, considerando as equações de colinearidade, as correcções para as distorções das lentes e introduzindo uma transformação afim de forma a ter em conta também a transformação das coordenadas pixel para as coordenadas fotográficas

$$\begin{aligned} x' - \delta_x &= x'_0 - c_x \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \\ y' - \delta_y &= y'_0 - c_y \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde x, y ão as coordenadas pixel, dx, dy são os erros sistemáticos nas coordenadas pixel (neste caso as devidas às distorções das lentes) e c_x c_y são as distâncias principais nas direcções ox, e oy. Estas distâncias principais nestas direcções aparecem devido aos factores escala utilizados na transformação entre os sistema de coordenadas pixel e o sistema de coordenadas fotográficas. Designado por (x, y) as coordenadas imagem (por exemplo no sistema de coordenadas pixel) a equação anterior pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x - \delta_x &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ y - \delta_y &= \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde,

$L_1 = (x_0' r_{13} - c_x r_{11})/L$ $\quad$ $L_7 = (y_0' r_{33} - c_y r_{32})/L$
$L_2 = (x_0' r_{23} - c_x r_{21})/L$ $\quad$ $L_8 = x_0' + c_x(r_{12}X_0 + r_{22}Y_0 + r_{32}Z_0)/L$
$L_3 = (x_0' r_{33} - c_x r_{31})/L$ $\quad$ $L_9 = r_{13}/L$
$L_4 = x_0' + c_x(r_{11}X_0 + r_{21}Y_0 + r_{13}Z_0)/L$ $\quad$ $L_{10} = r_{23}/L$
$L_5 = (y_0' r_{13} - c_y r_{21})/L$ $\quad$ $L_{11} = r_{33}/L$
$L_6 = (y_0' r_{23} - c_y r_{22})/L$ $\quad$ $L = -(r_{13}X_0 - r_{23}Y_0 + r_{33}Z_0)$

As equações resultantes podem ser resolvidas utilizando tanto um métodos iterativo como um método directo. Os métodos iterativos

Incluindo as correcções devidas às imperfeições das lentes nas coordenadas imagem (x,y), a equação da transformação DLT fica

$$x = \frac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \qquad (4.17)$$
$$y = \frac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}$$

onde x e y são as coordenadas imagem e XYZ são as coordenadas $3D$ dos pontos de apoio. Os 11 coeficientes L_i $(i = 1, \dots, 11)$ são os parâmetros DLT a serem estimados. A partir destes parâmetros podemos calcular os 3 parâmetros de orientação interna e os 6 parâmetros de orientação externa. Os restantes 2 parâmetros modelam o efeito da transformação afim (escala e corte).

Recombinando as equações anteriores obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4 - xL_9X - xL_{10}Y - xL_{11}Z - x = 0 \qquad (4.18)$$
$$L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8 - yL_9X - yL_{10}Y - yL_{11}Z - y = 0$$

Na resolução deste sistema de equações para n pontos de apoio ($n \geq 6$) de acordo com o modelo $v = Ax - l$ a matriz de projecto (*design matrix*) do sistema é

$$\underset{(n,11)}{A} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x1Y_1 & -x_1Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -x_2Y_2 & -x_2Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2X_2 & -y_2Y_2 & -y_2Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n & n & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_nX_n & -xnY_n & -x_nZ_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & n & -y_nX_n & -y_nY_n & -y_nZ_n \end{bmatrix}$$

A determinação dos 11 parâmetros DLT requer no mínimo 6 pontos de apoio. Uma vez que as equações 4.18 estão na forma linear relativamente às incógnitas L_i não é necessário conhecer os valores aproximados das incógnitas. Por outro lado, atendendo a que é aplicada uma transformação afim às coordenadas medidas, não é necessário estabelecer um sistema de coordenadas imagem através de pontos de referência, fixos na câmara, como por exemplo as marcas fiduciais. Assim, é possível utilizar directamente as medições feitas na imagem num sistema de coordenadas arbitrário (por exemplo utilizar as coordenadas pixel), com eixos não ortogonais e com diferentes factores de escala nos dois eixos. Assim, com este método também podemos utilizar camâras digitais não-metricas e sem orientação interna conhecida.

Devido à sua forma linear robusta, a DLT é também utilizada no cálculo dos valores aproximados dos parâmetros de orientação externa antes de se efectuar um ajustamento por feixe das imagens. Os habituais parâmetros de orientação podem ser obtidos a partir dos parâmetros DLT. De facto, fazendo

$$L = \frac{-1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}}$$

os parâmetros de orientação interna serão então: 1) coordenadas do ponto principal

$$x_0' = L^2(L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11})$$
$$y_0' = L^2(L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11})$$

2) distância principal (escalas diferentes em x e em y)

$$c_x = \sqrt{L^2(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - x_0'^2}$$
$$c_y = \sqrt{L^2(L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) - y_0'^2}$$

Os parametros de orientação externa, implícitos nos elementos r_{ij} da matriz de rotação **R** serão dados por:

$$\begin{array}{ccc} r_{11} = L(x_0' L_9 - L_1)/c_x & r_{12} = L(y_0' L_9 - L_1)/c_y & r_{13} = LL_9 \\ r_{21} = L(y_0' L_{10} - L_2)/c_y & r_{22} = L(y_0' L_{10} - L_2)/c_y & r_{23} = LL_{10} \\ r_{31} = L(y_0' L_{11} - L_3)/c_y & r_{32} = L(y_0' L_{11} - L_3)/c_y & r_{33} = LL_{11} \end{array}$$

As coordenadas do centro de projecção serão

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_4 \\ L_5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para evitarmos algumas instabilidades numéricas, os elementos da matriz de rotação deverão ser normalizados segundo uma matriz ortonormal. Os diferentes ângulos de rotação podem ser obtidos através das seguintes equações:

$$\sin\phi = r_{13} \text{ ; } \tan\omega = -\frac{r_{23}}{r_{33}} \text{ ; } \tan\kappa = -\frac{r_{21}}{r_{11}} \tag{4.19}$$

Estas equações mostram que a determinação de ϕ é ambigua devido às soluções para $\sin\phi$ em dois quadrantes. Além disso, não existe uma solução única para os ângulos de rotação se a segunda rotação (neste caso ϕ) for igual a 90 ou 270, pois o $\cos\phi$ em r_{11} e r_{33} provoca uma divisão por zero. Embora este problema não seja crítico em fotogrametria aérea ele assume uma importância particular em fotogrametria terrestre. A solução para este problema de ambiguidade consiste em trocar a ordem das rotações em ω e ϕ conduzindo a uma nova ordem (ϕ, ω, κ).

Apesar dos benefícios mencionados anteriormente existem algumas desvantagens. Em primeiro lugar se os parâmetros de orientação interna forem conhecidos, o método DLT tem um excesso de parâmetros. Além disso, se todos os pontos de apoio estiverem no mesmo plano, ou ainda se o denominador das equações 4.17 for próximo de zero o sistema de equações torna-se singular ou mal condicionado. Mais ainda, como os erros de medição nas coordenadas imagem não são detectados pelo DLT, os parâmetros determinados também não estão correctos. Por último em aplicações reais, é por vezes difícil e dispendioso arranjar 6 pontos de referência (i.e. com coordenadas conhecidas).

Exercício 4.15

Resolva o exercício anterior considerando agora como modelo matemático a transformação DLT.

4.4.4 Aproximações iniciais

Opção 1

Podemos considerar para aproximações iniciais dos parâmetros angulares da O.E. a informação registada pela câmara no momento do voo. Para o caso de fotografia aérea vertical fazemos $w^0 = \phi^0 = 0$. Para o valor de κ teremos de saber em que direcção foi voada a câmara relativamente ao sistema de coordenadas terreno. Se o voo foi feito na direcção Oeste-Este e admitindo que a câmara foi montada com o eixo dos xx no alinhamento horizontal do avião $\kappa^0 = 0$. No entanto, um valor inicial pode ser calculado a partir do ângulo que uma dada recta de controlo faz com o eixo X objecto e do ângulo que essa mesma recta faz com o eixo x fotográfico. Assim tendo em conta a figura 4.5 vem

$$\kappa^0 = \alpha_2 - \alpha_1; \quad \tan\alpha_1 = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \text{ e } \tan\alpha_2 = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

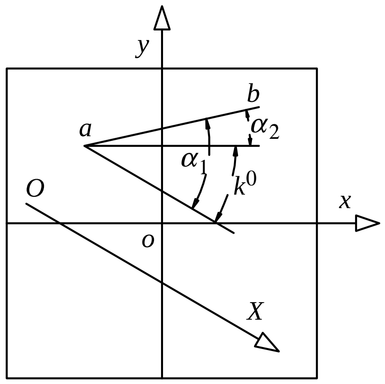


Figura 4.5: Cálculo da aproximação inicial para o parâmetro κ

Para as aproximações dos parâmetros de posição do centro de perspectiva da câmara no instante de exposição, vamos escolher dois pontos de controlo Pi e Pj que tenham aproximadamente a mesma altitude e calculamos:

$$\lfloor Z_0 \rfloor_0 = \frac{c(X_j - X_i) + x_j Z_j - x_i Z_i}{x_j - x_i} \tag{4.20}$$

$$\lfloor X_0 \rfloor_0 = \frac{X_i - x_i(\lfloor Z_0 \rfloor_0 - \lfloor Z_i \rfloor_0)}{c} \tag{4.21}$$

$$\lfloor Y_0 \rfloor_0 = \frac{Y_i - y_i(\lfloor Z_0 \rfloor_0 - \lfloor Z_i \rfloor_0)}{c} \tag{4.22}$$

Opção 2

A linearização das equações de colinearidade pela fórmula de Taylor obriga-nos a calcular aproximações iniciais para os POE (parâmetros de orientação externa)

1. $\omega_0 = \phi_0 = 0$ - atendendo a que estamos a tratar de fotografias aéreas

2. Z_0, isto é, a altura de voo H - Utilizamos dois pontos A e B com coordenadas objecto $\{(X_A, Y_A, Z_A), (X_B, Y_B, Z_B)\}$ e coordenadas imagem $\{(x_a, y_a), (x_b, y_b)\}$ conhecidas e fazemos $d = \overline{AB}$

$$d^2 = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Calculamos a quádrica $0 = a_1 H^2 + a_2 H + a_3$

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\left(\frac{x_a}{c} - \frac{x_b}{c} \right)^2 + \left(\frac{y_a}{c} - \frac{y_b}{c} \right)^2 \right) H^2 \\ & + \left(-2 \left(\frac{Z_A\, x_a}{c} - \frac{Z_B\, x_b}{c} \right) \left(\frac{x_a}{c} - \frac{x_b}{c} \right) - 2 \left(\frac{Z_A\, y_a}{c} - \frac{Z_B\, y_b}{c} \right) \left(\frac{y_a}{c} - \frac{y_b}{c} \right) \right) H \\ & + \left(\frac{Z_A\, x_a}{c} - \frac{Z_B\, x_b}{c} \right)^2 - d^2 + \left(\frac{Z_A\, y_a}{c} - \frac{Z_B\, y_b}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

O valor de H é obtido considerando apenas o valor positivo e real de

$$H = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 a_1}$$

3. X_0, Y_0 e κ - Começamos por calcular as coordenadas terreno locais dos pontos imagem $x_i$utilizando as formulas
$$U_i = x_i\left(\frac{H-h_i}{c}\right) \quad ; \quad V_i = y_i\left(\frac{H-h_i}{c}\right)$$
Depois utilizamos uma transformação a 4 parâmetros para estabelecermos a transformação entre os dois sistemas $\{U,V\}$ e $\{X\,Y\}$.
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} U & V & 1 & 0 \\ -V & U & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
e fazemos
$$X_0 = a_3 \quad ; \quad Y_0 = a_4 \quad ; \quad \kappa = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

4.5 Orientação de pares de imagens estereo

A orientação de um par estereo fornece os parâmetros de orientação externa das duas imagens. A figura 4.6). Em princípio este procedimento pode ser realizado efectuando separadamente para cada imagem utilizando uma recessão espacial (ver secção 4.4.3). No entanto, serão necessários, para cada fotografia, três pontos de apoio completos (i.e com coordenadas 3D), os quais podem ser diferentes ou idênticos para cada imagem. Note-se que neste procedimento a relação geométrica entre as duas imagens do estereomodelo não é utilizada.

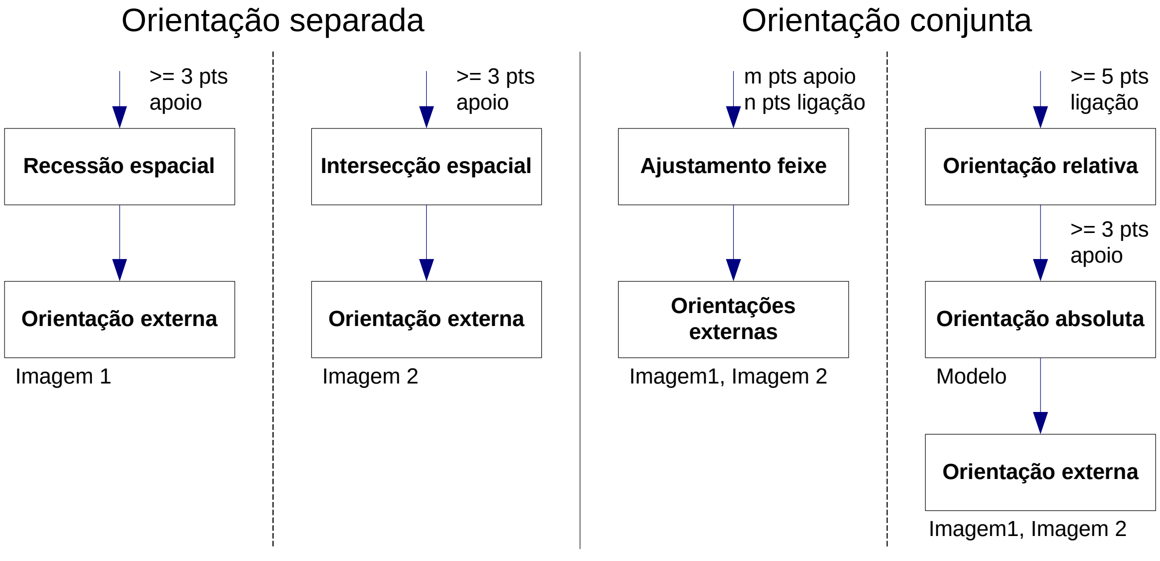


Figura 4.6: Métodos de orientação de um par estereo

A solução de um único passo (orientação separada) utiliza o princípio da triangulação por feixe para o caso especial de termos apenas duas imagens. Neste caso, os elementos de orientação de ambas imagens são determinados simultâneamente num único passo utilizando as coordenadas imagens dos pontos de referência e as dos pontos de ligação.

A solução de dois passos deste problema funciona do seguinte modo: num primeiro passo são determinadas, num sistema de coordenadas local a correspondência entre as imagens e as coordenadas dos pontos (i.e. é realizada a orientação relativa); num segundo passo é feita a transformação para um sistema de coordenadas global utilizando pontos de apoio (orientação absoluta).

4.5.1 Pontos de ligação

Os pontos de ligação são identificados como pontos homólogos nas imagens, ou seja, representam o mesmo ponto objecto. Estes pontos auxiliam a ligação geométrica entre duas ou mais imagens e não precisam de ter coordenadas objecto conhecidas (i.e serem pontos de apoio). Além disso devem ser seleccionados de forma a cobrir uma área suficiente da imagem e do espaço objecto para estabelecerem uma ligação robusta entre as imagens.

Os pontos homólogos podem ser identificados (ou medidos) visualmente, quer utilizando a visão estereoscópica quer utilizando monoscopia numa imagem. Se os pontos forem não sinalizados então estes são identificados de forma mais fiável pela visão estereoscópica. A correspondência entre pontos homólogos pode também ser feita por correspondência digital de imagens stereo (*digital stereo image matching*). Neste caso as semelhanças nos padrões de nível de cinzento são comparadas a fim de os pontos correspondentes serem emparelhados (correlação de imagem).

Em geral, não existe informação de orientação disponível durante a fase de medição dos pontos de apoio e existem poucas ferramentas para evitar medições falseadas. Consequentemente, em grandes projectos fotogramétricos, erros grosseiros estão sempre presentes nas observações devido a erros na medição ou identificação.

4.5.2 Geometria epipolar

A importância da geometria epipolar reside no facto de que, assumindo uma intersecção de raios sem erros, um ponto imagem P'' na fotografia direita e o seu correspondente P' na imagem esquerda deverão estar no plano epipolar e consequentemente na linha epipolar k". Desta forma pode-se reduzir significativamente o espaço de procura dos pontos correspondentes.

4.5.3 Orientação relativa

A orientação relativa descreve a rotação e translação de uma imagem relativamente ao seu par estereo num sistema de coordenadas local comum. É a primeira fase de um método de orientação realizado em duas etapas de um par estereo de imagens.

O sistema de coordenadas modelo pode ser escolhido de diversas formas. Uma delas conduz à orientação relativa dependente e é definido da seguinte forma:

- a origem do sistema coincide com o centro de perspectiva da fotografia esquerda,
- os três eixos são paralelos aos sistema de coordenadas imagem da fotografia esquerda.

Nestas condições os parâmetros de orientação da fotografia esquerda neste sistema de coordenadas são:

$$\begin{array}{rcl} x_{01}=0 & ; & \omega_1=0 \\ y_{01}=0 & ; & \phi_1=0 \\ z_{01}=0 & ; & \kappa_1=0 \end{array}$$

A segunda imagem (a da direita) vai ser orientada no sistema de coordendas modelo através de 3 translações e 3 rotações.

$$\begin{array}{rcl} x_{02}=b_x & ; & \omega_2 \\ y_{02}=b_y & ; & \phi_2 \\ z_{02}=b_z & ; & \kappa_2 \end{array}$$

O vector base **b** definido entre os centros de perspectiva O_1 e O_2 tem as componentes b_x, b_y, b_z. É dito na secção seguinte que a condição para uma orientação relativa correcta é que todos os pares de raios homólogos deverão ser coplanares com a base. Suponhamos que o centro de perspectiva direito é deslocado ao da linha de base em direcção a O' e a imagem não é rodada. Se olharmos atentamente para a figura 4.7 verificamos que os raios r' e r" permanecerão ainda coplanares com a base e que se intercetarão num ponto de r' entre O' e P. Tendo em conta a semelhança de triângulos podemos concluir que a escala do modelo será directamente proporcional ao comprimento da base. Por outras palavras, a escala do sistema de coordenadas modelo é determinada pelo comprimento da base escolhido. Podemos, portanto, atribuir um valor constante a uma das componentes da base, escolhendo normalmente

$$b_x = 1$$

Restarão então cinco elementos para a definição da orintação relativa dependente: b_y, b_z, ω_2, ϕ_2 e κ_2.

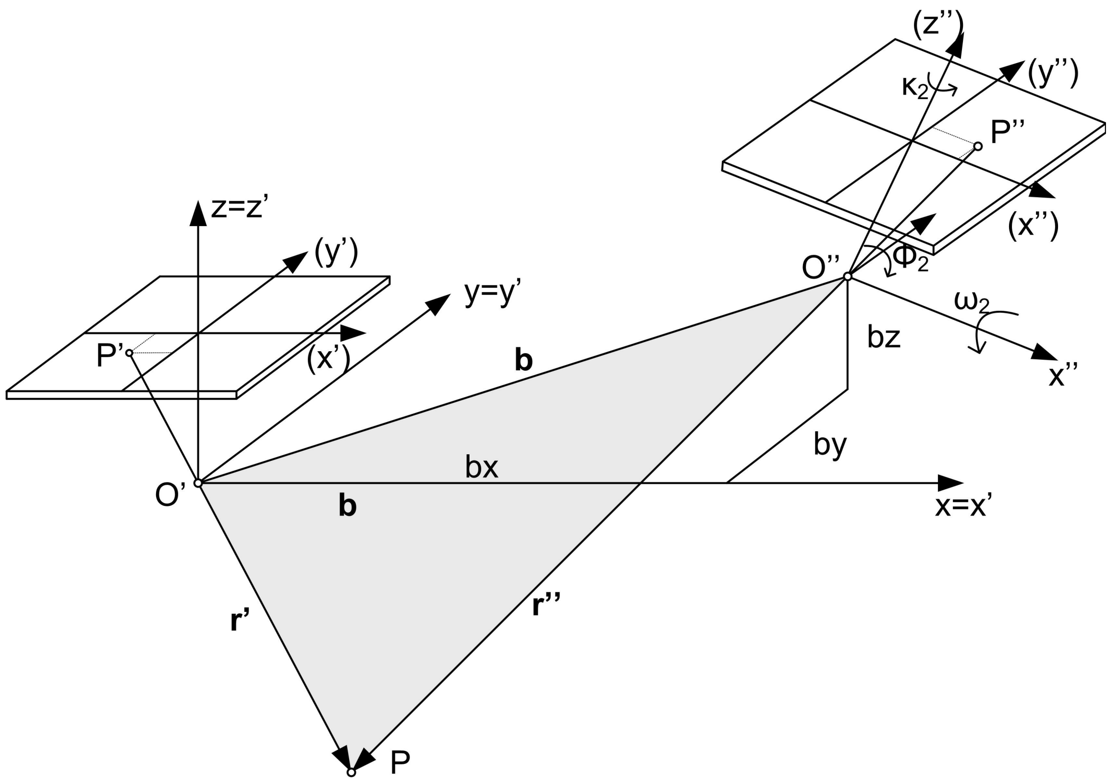


Figura 4.7: Sistema de coordenadas modelo e orientação relativa dependente (a imagem esquerda é fixa)

Condição de coplanaridade

A solução numérica da orientação relativa utiliza a condição de que um ponto objecto P, as suas duas imagens p' e p'' e os dois centros de perspectiva O' e O'' deverão estar situados num único plano (constrangimento de coplanaridade). Este plano, que é o plano epipolar definido pelos vectores $\mathbf{b}$, $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$, contém também os pontos imagem p' e p'' (figura 4.7).

A condição de coplanaridade é apenas satisfeita se os raios r' e r'' se intersectarem rigorosamente no ponto objecto P, ou seja, se as posições dos pontos imagem p' e p'' e os parâmetros de orientação estiverem isentos de quaisquer erros. Para cada par de pontos homólogos podemos escrever uma condição de coplanaridade. Consequentemente, para calcular os cinco parâmetros de orientação, serão necessários, no mínimo cinco pares de pontos homólogos (pontos de ligação) e as suas coordenadas imagem medidas. A condição é equivalente a minimizar as paralaxes y de todos os pontos P observados.

A condição de coplanaridade pode ser expressa utilizando o produto misto (ou triplo) de três vectores. Estes estarão situados no mesmo plano se o volume do paralelipípedo que eles definem for zero:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'' = 0 \tag{4.23}$$

A equação pode ser escrita numa outra forma alternativa utilizando o determinante da seguinte matriz formada por três vectores: o vector base **b** é dado pelas suas três componentes, o vector imagem $\mathbf{r}'$ é dado pelas coordenadas imagem na imagem esquerda, o vector imagem $\mathbf{r}''$ é dado pelas coordenadas imagem na imagem direita, transformadas pelos parâmetros de rotação relativos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x' & \overline{x}'' \\ b_y & y' & \overline{y}'' \\ b_z & z' & \overline{z}'' \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

onde $\mathbf{r}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} \overline{x}'' \\ \overline{y}'' \\ \overline{z}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

Nestas equações, **A** é a matriz de rotação da imagem direita e portanto os elementos a_{ij} são funções dos ângulos de rotação ω_2, ϕ_2, κ_2. A formulação adoptada permite introduzir diferentes distâncias principais (focais) para as duas imagens, fazendo por exemplo $z' = -c_1$ e $z'' = -c_2$. Para cada ponto de ligação P_i medido pode estabelecer-se uma equação de observação utilizando a equação 4.24.

Cálculo

O cálculo dos cinco elementos de orientação relativa é feito utilizando o princípio do ajustamento pelos mínimos quadrados. Baseando-nos nas condições de coplanaridade podemos escrever para cada ponto de ligação a seguinte equação de correcção

$$v_\Delta = \frac{\partial \Delta}{\partial b_y} d\,b_y + \frac{\partial \Delta}{\partial b_z} d\,b_z + \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} d\,\omega_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial \phi_2} d\,\phi_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} d\kappa_2 + \Delta^0$$

No caso de termos uma geometria com direcções de visada aproximadamente paralelas, os valores para as aproximações iniciais dos parâmetros incógnita serão:

$$b_y^0 = b_z^0 = \omega_2^0 = \phi_2^0 = \kappa_2^0 = 0$$

Δ^0 é o volume do paralelipípedo calculado a partir dos valores iniciais.Os coeficientes diferenciais podem ser calculados utilizando os seguintes determinantes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial b_y} &= \begin{vmatrix} 0 & x' & \overline{x}'' \\ 1 & y' & \overline{y}'' \\ 0 & z' & \overline{z}'' \end{vmatrix} ; \frac{\partial \Delta}{\partial b_z} = \begin{vmatrix} 0 & x' & \overline{x}'' \\ 0 & y' & \overline{y}'' \\ 1 & z' & \overline{z}'' \end{vmatrix} \\
\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} &= \begin{vmatrix} 1 & x' & 0 \\ b_y & y' & -\overline{z}'' \\ b_z & z' & \overline{y}'' \end{vmatrix} ; \frac{\partial \Delta}{\partial \phi_2} = \begin{vmatrix} 1 & x' & -\overline{y}'' \sin\omega_2 + \overline{z}'' \cos\omega_2 \\ b_y & y' & \overline{x}'' \sin\omega_2 \\ b_z & z' & -\overline{x}'' \cos\omega_2 \end{vmatrix} \\
\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} &= \begin{vmatrix} 1 & x' & -\overline{y}'' \cos\omega_2 \cos\phi_2 - \overline{z}'' \sin\omega_2 \cos\phi_2 \\ b_y & y' & \overline{x}'' \cos\omega_2 \cos\phi_2 - \overline{z}'' \sin\phi_2 \\ b_z & z' & \overline{x}'' \sin\omega_2 \cos\phi_2 + \overline{y}'' \sin\phi_2 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

As aproximações iniciais são iterativamente melhoradas pelas correcções ajustadas até que não existe uma mudança significativa.

Neste caso o desvio padrão da unidade de peso

Exercício 4.16
Supondo que para um par de fotografias tiradas com uma câmara fotogrametrica com distância focal c=152.67mm se obtém

	Imagem esquerda		Imagem direita	
	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)
1	93.176	5.890	6.072	5.176
2	-27.403	6.672	-112.842	1.121
3	83.951	107.422	-4.872	105.029
4	-11.659	101.544	-99.298	95.206
5	110.326	-97.800	34.333	-99.522
6	-12.653	-87.645	-96.127	-93.761
7	37.872	40.969	-48.306	37.862
8	41.503	-37.085	-42.191	-40.138

calcule: i) os elementos de orientação relativa

Coordenadas Modelo

A relação entre imagem e coordenadas modelo pode ser expressa pelos seguintes quocientes:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \lambda$$
$$\frac{x - b_x}{\overline{x}''} = \frac{y - b_y}{\overline{y}''} = \frac{z - b_z}{\overline{z}''} = \mu$$

Note-se que estas duas expressões podem ser deduzidas fácilmente a partir da Figura 4.7 considerando as equações vectoriais da recta ($\vec{r} : X = P_0 + \lambda\overrightarrow{P_0P_1}$) no sistema coordenadas modelo e que passa por: no primeiro caso por $P_0 : (0,0,0)$ e $P_1 : (x', y', z')$ e no segundo caso por $P_0 : (b_x, b_y, b_z)$ e $P_1 : (\overline{x}'', \overline{y}'', \overline{z}'')$.

A eliminação das coordenadas modelo dá-nos os factores escala

$$\lambda = \frac{b_x\overline{z}'' - b_z\overline{x}''}{x'\overline{z}'' - z'\overline{x}''} \qquad ; \qquad \mu = \frac{b_x z' - b_z x'}{x'\overline{z}'' - z'\overline{x}''}$$

e consequentemente as coordenadas modelo

$$\begin{array}{ll} x = \lambda x' & z = \lambda x' \\ y_1 = \lambda y' & y_2 = b_y + \mu\overline{y}'' \\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) & p_y = y_2 - y_1 \end{array} \tag{4.26}$$

Devido à incerteza que caracterizam as medições, existem duas soluções para as coordenadas modelo na direcção y. Ou seja, os raios são enviasados e não se intersectam realmente, o que resulta na paralaxe-y p_y.

Adicionalmente podemos medir pontos imagem homólogos no modelo orientado relativamente e transformadas em coordenadas modelo utilizando as equações 4.26. Estas descrevem uma superfície objecto 3D, com a forma correcta, mas numa escala arbitrária que resulta da escolha arbitrária para o parâmetro b_x (por exemplo, $b_x = 1$).

Qualidade da orientação relativa

A existência de paralaxe-y py (definida na secção 4.5.3) num ponto do modelo indica que os raios homólogos não se intersectam nesse ponto. Assim, considerando as paralaxes py sobre todo o modelo teremos uma medida da qualidade da orientação relativa, cujo valor pode ser normalizado se for calculo à escala da foto. Ou seja, designando por py_i a paralaxe de um ponto i no modelo, a paralaxe à escala do modelo é dada por

$$py_{ip} = \frac{z'}{z_i} py_i$$

Assumindo que by e bz são pequenos relativamente a bx, a expressão seguinte dá-nos uma medida da qualidade da orientação relativa:

$$s_{py_p} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} py_{ip}^2}$$

O ângulo de intersecção α de dois raios imagem homólogos é o algulo entre os dois vectores do espaço $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$, ou seja

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{r}'^{\mathsf{T}}\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|\,|\mathbf{r}''|}$$

Considerando os n pontos de ligação (tie points), o ângulo médio de intersecção pode ser calculado através de:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

Este ângulo médio descreve aproximadamente o quociente entre a estereo-base b e a a distância média ao objecto h. A configuração geométrica optima para a intersecção dos raios homólogos e portanto para o estabelecimento da orientação relativa é quando estes se intersectam segundo ângulos rectos. Portanto, um indicador quantitativo da qualidade desta geometria é dado por:

$$\tan\frac{\alpha}{2} \approx \frac{b}{2h}$$

Em termos gerais podemos dizer que a qualidade da orientação relativa depende:

- Da precisão das coordenadas imagem. A precisão das coordenadas imagem depende quer da precisão do instrumento de medição quer da facilidade de identificar os pontos homólogos em ambas as imagens.
- Do número e distribuição dos pontos de ligação no espaço modelo. Os pontos deverão ser escolhidos no espaço modelo por forma a assegurar uma ligação geométrica forte entre as duas imagens. Para o caso normal da fotogrametria uma distribuição apropriada é a distribuição de von Gruber a qual tem um ponto de ligação em cada um dos cantos do modelo e um ponto de ligação no meio de cada um dos lados perfazendo um total de seis pontos
- Do quociente base-altura. Se a base do estereo-modelo é relativamente pequena à distancia do objecto (altura) então a geometria dos ângulos de intersecção dos raios homólogos é fraca e os parâmetros de orientação relativa serão determinados com grande incerteza.
- Da distribuição dos pontos de ligação no espaço objecto. Existem poucos casos excepcionais em que as equações normais do ajustamento podem tornar-se mal condicionadas ou mesmo singulares. Um destes casos é quando os pontos de ligação e os centros de perspectiva das duas imagens se situam no mesmo cilindro. Neste caso não existe uma solução única para o problema visto que é valida qualquer configuração geométrica realizada entre os pontos de ligação e os centros de perspectiva das duas imagens.

Formulação alternativa da orientação relativa

Uma formulação alternativa para a orientação relativa, designada por orientação relativa independente, é conseguida no caso em que o eixo ox do sistema de coordenadas modelo é definido pela base estereo (i.e o vector que une os dois centros de perspectiva do par estereo) e a origem do sistema de coordenadas é localizada no centro de perspectiva da imagem esquerda. Nestas condções os elementos de orientação externa das duas fotos são dados por

imagem esquerda			imagem direita		
$x_{01}=0$	;	ω_1	$x_{02}=b_x$	;	$\omega_2=0$
$y_{01}=0$	;	ϕ_1	$y_{02}=0$	;	ϕ_2
$z_{01}=0$	;	κ_1	$z_{02}=0$	;	κ_2

Os cinco elementos a serem determinados são expressos pelos cinco ângulos de rotação independentes ω_1, ϕ_1, κ_1 e ϕ_2, κ_2. Em vez de ω_1 (rotação em torno do eixo x) ou de ω_2, podemos considerar uma rotação diferencial ω como alternativa. A escala do modelo é considerada arbitrária fixando, por exemplo, o parâmetro b_x ($b_x = 1$).

4.5.4 Orientação absoluta

Modelo matemático

A orientação absoluta descreve a transformação de sistema de coordenadas modelo local ($x\,y\,z$), resultante de uma orientação relativa de um par estereo com uma posição, rotação e escala arbitrários, num sistema de coordenadas objecto ($X\,Y\,Z$) a

A figura ilustra a transformação do sistema de coordenadas modelo $x\,y\,z$ com origem em M no sistema de coordenadas objecto $X\,Y\,Z$. As coordenadas de M no sistema $X\,Y\,Z$ são $\mathbf{X}_M$. A matriz de rotação $\mathbf{R}$ é função dos três ângulos de rotação ξ, η, ζ em torno dos eixos X, Y, Z, respectivamente. A transformação para um ponto do espaço modelo com coordenadas $x\,y\,z$ (vector x) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= F(X_M, Y_M, Z_M, m, \xi, \eta, \zeta, x, y, z) \\ &= \mathbf{X}_M + m\mathbf{R}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{4.27}$$

ou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

onde m é um escalar.

As equações 4.27 são não-lineares relativamente aos parâmetros de orientação absoluta e podem ser resolvidas da forma seguinte.

Definição do Datum

Em muitas aplicações da fotogametria de curta distância, dispomos de pontos de apoio 3D completos. Assim cada ponto de apoio fornece três equações de observação. Em fotogrametria aérea é possível que alguns dos pontos de apoio tenham apenas posições $X\,Y$ conhecidas e outros tenham apenas cota Z conhecida, resultando num conjunto reduzido de equações de observação. Para se determinarem os 7 parâmetros de orientação absoluta é necessário conhecer, no mínimo, 2 coordenadas X, 2 coordenadas Y e 3 coordenadas Z.

Os pontos de apoio deverão estar bem distribuídos no espaço objecto a ser transformado. Se todos os pontos de apoio estiverem sobre (ou muito próximo) uma mesma linha recta ficaremos com um sistema de equações singular.

4.5.5 Cálculo da orientação externa

A partir dos elementos de orientação relativa e absoluta de um par de imagens, podemos calcular os elementos de orientação externa de cada uma das imagens. De facto a posição do centro de perspectiva $\mathbf{X}_{0i}$ de uma imagem i é obtida a partir da origem do sistema de coordenadas modelo $\mathbf{X}_M$ e das componentes transformadas da base $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{X}_{0i} = \mathbf{X}_M + m\mathbf{R}_{\xi\eta\zeta}\mathbf{b}_i$$

Como para a imagem esquerda ($i = 1$) as componentes do vector base são zero virá $\mathbf{X}_{0_1} = \mathbf{X}_M$.

Para calcularmos a matriz de rotação da imagem i relativamente ao sistema de coordenadas objecto $\mathbf{R}_{i_{\omega\phi\varkappa}}$ é necessário multiplicar a matriz da orientação relativa $\mathbf{A}_{\omega_i\phi_i\varkappa_i}$ pela matriz de rotação $\mathbf{R}_{\xi\eta\zeta}$ da orientação absoluta, isto é

$$\mathbf{R}_{i_{\omega\phi\varkappa}} = \mathbf{R}_{\xi\eta\zeta}\mathbf{A}_{\omega_i\phi_i\varkappa_i}$$

Note-se que depois da orientação absoluta, os pontos modelo serão dados também pelas suas coordenadas objecto e consequentemente poderemos determinar os parâmetros de orientação externa de cada imagem utilizando uma resecção espacial e usando as coordenadas modelo transformadas no espaço objecto.

Exercício 4.17

Dados os parâmetros de orientação relativa dependente e absoluta de um par estereo de fotografias aéreas determinar os elementos de orientação externa de cada uma das fotografias.

4.6 Geometria epipolar e normalização de imagens

4.6.1 Cálculo das linhas epipolares

A equação da linha epipolar k'' na imagem da direita pode escrever-se na forma paramétrica por:

$$\mathbf{k}'' = \mathbf{p}'' + t(\mathbf{q}'' - \mathbf{p}'') \tag{4.28}$$

Nesta equação $\mathbf{k}''$ é o local geométrico da recta que passa pelos pontos $\mathbf{p}''$ e $\mathbf{q}''$ que correspondem aos pontos modelo arbitrários P e Q situados no raio $\mathbf{r}'$. Se inserirmos os parâmetros de orientação relativa (orientação externa das duas imagens no sistema de coordenadas modelo) nas equações de colinearidade, podemos obter as coordenadas imagem da imagem direita

$$\begin{aligned} x_i'' &= z''\frac{r_{11}(x_i - bx) + r_{21}(y_i - b_y) + r_{31}(z_i - b_z)}{r_{13}(x_i - b_x) + r_{23}(y_i - b_y) + r_{33}(z_i - bz)} \\ y_i'' &= z''\frac{r_{12}(x_i - bx) + r_{22}(y_i - b_y) + r_{32}(z_i - b_z)}{r_{13}(x_i - b_x) + r_{23}(y_i - b_y) + r_{33}(z_i - bz)} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Nestas equações, r_{ij} são os elementos da matriz de rotação da imagem direita, isto é, $\omega_2, \phi_2, \kappa_2$. O centro de perspectiva O' pode ser utilizado no lugar do ponto P. Neste caso $P : (x_P = 0,\ y_P = 0,\ z_P = 0)$. O ponto Q é dado multiplicando o vector imagem $\mathbf{x}'$ por um factor escala arbitrário λ, isto é $Q : (x_Q = -\lambda x',\ y_Q = -\lambda y',\ z_Q = -\lambda z')$.

Inserindo as coordenadas modelo nas equações 4.29 obteremos as coordenadas imagem dos pontos $\mathbf{p}''$ e $\mathbf{q}''$ e, consequentemente a equação da linha epipolar. Devido a erros de medição inevitáveis, a procura do ponto P'', homologo do ponto P', não deverá ser feita ao longo da recta k'', mas sim ao longo de uma faixa estreita que tenha por eixo esta recta.

Existem basicamente duas metodologias para determinar as linhas epipolar de imgens de sensores matriciais. Ambas requerem o conhecimento dos POI e pelo menos os parâmetros de Orientação Relativa (POR) das duas imagens.

Utilizando as equações de colinearidade

Como vimos, as equações de colinearidade relacionam um ponto no espaço objecto com o seu ponto correspondente no espaço imagem. Considerando a imagem esquerda, estas equações podem ser escritas na forma matricial para um ponto imagem p:

$$\begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{R}'_{(w',\phi',\kappa')}\begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \\ -c \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

onde

- (x', y') são as coordenadas de um ponto de interesse na imagem da esquerda para o qual se pretende encontrar a linha epipolar na imagem direita,
- $\{x_0, y_0, c\}$ são os parâmetros de orentação interna (POI) da câmara,

- $\{X'_0, Y'_0, Z'_0, w', \phi', \kappa'\}$ são os POE da imagem esquerda,
- (X_j, Y_j, Z_j) são as coordenadas do ponto objecto correspondente a um dado factor escala λ'_j,
- $\mathbf{R}_{(w,\phi,\kappa)}$ é a matriz de rotação da fotografa esquerda

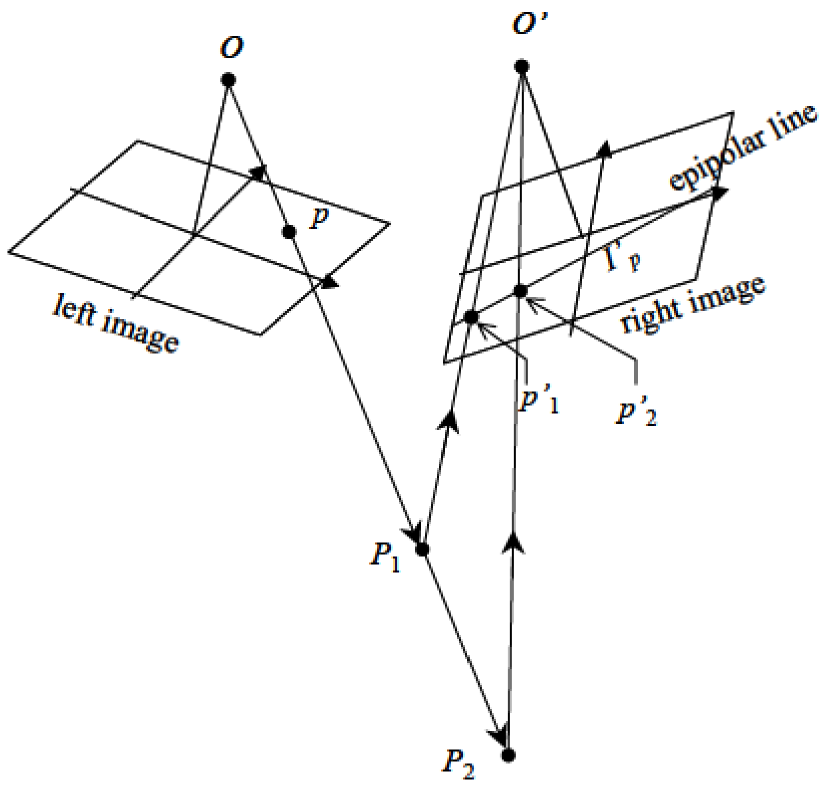


Figura 4.8: Determinação das linhas epipolares por retroprojecção dos pontos doraio de luz esquerdo sobre a imagem direita

Nas equações 4.30, existem quatro incógnitas e três equações. As incógnitas são: as coordendas 3D no espaço objecto e o factor escala. Note-se que não é necessário dispormos dum DEM, ou da altitude correcta do ponto objecto. Além disso o raio de luz esquerdo pode ser definido recorrendo apenas aos parâmetros de orientação. Assim, seleccionamos dois pontos deste raio, ou seja fixando dois valores para o factor escala (λ_1, λ_2), e resolvemos o sistema de equações lineares 4.30 relativamente às seis incógnitas dos dois pontos objecto: (X_1, Y_1, Z_1) e (X_2, Y_2, Z_2). Os dois factores escala podem ser escolhidos de forma a que as coordenadas Z dos dois pontos representem as altitudes máxima e mínima dos pontos do espaço objecto.

Seguidamente, reprojectando estes dois pontos objecto na imagem direita, recorrendo aos seus parametros de orientação $(\{x_0, y_0, c\}$ e $\{X''_0, Y''_0, Z''_0, w'', \phi'', \kappa''\})$ e resolvendo as equações

$$
\begin{aligned}
x'' &= x_0 - c\,\frac{r''_{11}(X - X''_0) + r''_{21}(Y - Y''_0) + r''_{31}(Z - Z''_0)}{r''_{13}(X - X''_0) + r''_{23}(Y - Y''_0) + r''_{33}(Z - Z''_0)} \\
y'' &= y_0 - c\,\frac{r''_{12}(X - X''_0) + r''_{22}(Y - Y''_0) + r''_{32}(Z - Z''_0)}{r''_{13}(X - X_0) + r''_{23}(Y - Y^{r}_0) + r''_{33}(Z - Z''_0)}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

obtemos dois pontos (x''_1, y''_1) e (x''_2, y''_2) que formam a linha epipolar.

Utilizando as equações de coplanaridade

Utilizando as equações 4.30 podemos relacionar qualquer ponto $(X,Y;Z)$ do espaço objecto pode ser relacionado com a imagem esquerda e com a imagem direita

$$\begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda_j'}\mathbf{R}'_{(w',\phi',\kappa')}\begin{bmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0'' \\ Y_0'' \\ Z_0'' \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda_j''}\mathbf{R}''_{(w'',\phi'',\kappa'')}\begin{bmatrix} x''-x_0 \\ y''-y_0 \\ -c \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

As equações anteriores representam três equações a quatro incógnitas $(\lambda_j', \lambda_j'', x'', y'')$. Simplificando estas equações obteremos a equação da linha epipolar na imagem direita a qual dará uma relação entre (x', y').

A simplificação destas equações por eliminação das incógnitas λ_j' e λ_j'' é semelhante à dedução das equações de coplanaridade ou seja:

$$\begin{bmatrix} B_x & B_y & B_z \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

onde

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \mathbf{R}'_{(w',\phi',\kappa')}\begin{bmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \\ -c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \end{bmatrix} = \mathbf{R}''_{(w'',\phi'',\kappa'')}\begin{bmatrix} x''-x_0 \\ y''-y_0 \\ -c \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0'' \\ Y_0'' \\ Z_0'' \end{bmatrix}$$

Simplificando as equações 4.33 obteremos uma relação linear entre x' e y', ou seja a equação da linha epipolar.

Note-se que em geral as linhas epipolares de pontos diferentes não são paralelas. Uma excepção a esta regra acontece quando as imagens são paralelas à base aérea, uma vez que todas as linhas epipolares se encontram nos epipólos e estes situam-se no infinito e, consequentemente as linhas epipolares serão paralelas. Esta observação será utilizada quando iremos reamostrar as imagens para gerarmos as imagens normalizadas.

4.6.2 Reamostragem epipolar e normalização das imagens

O principal objectivo da reamostragem epipolar é gerar imagens normalizadas as quais possuem a propriedade inata de que pontos correspondentes estão sobre as mesmas linhas (ou colunas). Esta característica primordial reduz o espaço de procura e o tempo de cálculo e ainda as ambiguidades de correspondência (ou emparelhamento), o que é importante para uma variedade de aplicações tais como:

- Correspondência automática
- Orientação relativa automática
- Triangulação aérea automática
- Geração automática de MDE
- Geração de ortofotos
- Visão estereoscópica

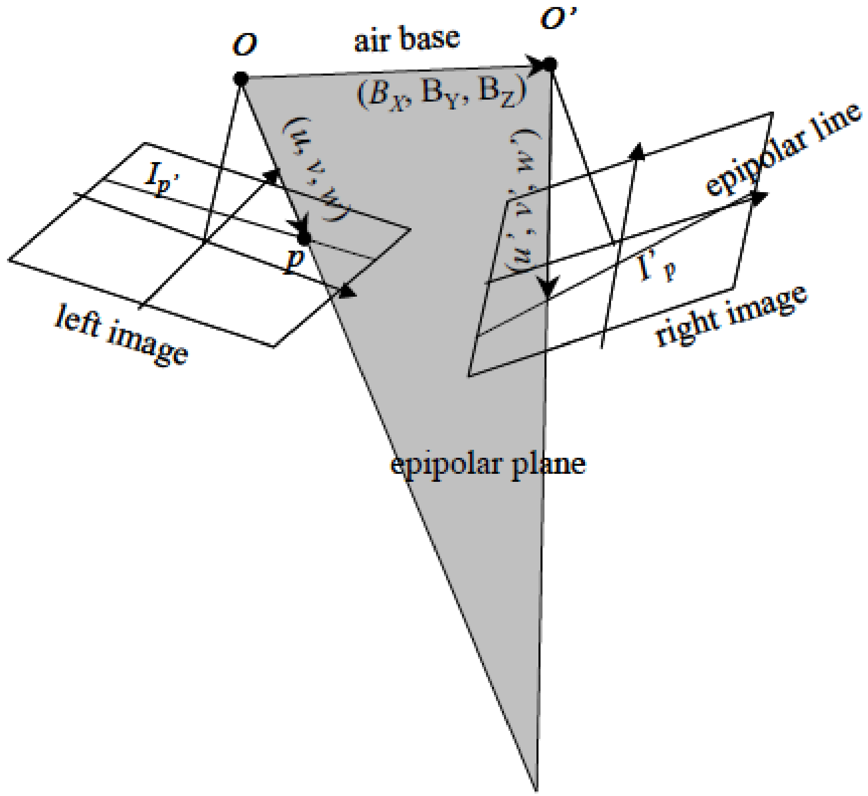


Figura 4.9: Equação de coplanaridade para os vectores (B_x, B_y, B_z),(u', v', w') e (u'', v'', w'')

A figura seguinte mostra duas imagens estereo normalizadas. Consideremos na imagem esquerda um ponto a' de coordenadas $(x'_{a'}, y'_{a'})$. Como se trata de imagens normalizadas o seu ponto conjugado a'' na imagem da direita terá coordenadas $(x_{a''}, y''_{a''} = y'_{a'})$. Assim, para um dado ponto na imagem esquerda o espaço de procura do ponto conjugado na imagem direita será feito ao longo da recta $y'' = y'_{a'}$. De forma análoga se considerássemos um ponto b'' na imagem da direita o seu ponto conjugado na imagem da esquerda estará situado na recta $y' = y''_{a''}$.

Conceito

Na reamostragem de imagens matriciais como é requerido que as novas imagens sejam paralelas ao vector base, as linhas epipolares nas duas imagens serão paralelas. Por outras palavras, as imagens normalizadas deverão estar situadas num plano paralelo ao vector base. Mas como se pode observar facilmente não existe um único plano paralelo que produza linhas epipolares paralelas. Por exemplo, se considerarmos dois planos paralelos ao vector base, cada um utilizado para efectuar a reamostragem de cada imagem teremos em cada plano linhas epipolares paralelas. No entanto o espaçamento (distâncias normais) entre as linhas epipolares numa imagem será diferente do espaçamento entre as correspondentes linhas epipolares na outra imagem, ou seja, as imagens reamostradas terão escalas diferentes. Assim, as duas imagens deverão ser reamostradas segundo o mesmo plano paralelo ao vector base e situado a uma distancia c_n. Acontece que existe uma infinidade de planos que são paralelos à base e estão a uma distância c_n desta: este planos são tangentes ao cilindro que tem por eixo o vector base e cujo raio é c_n. Assim para fixarmos o plano teremos de fixar a rotação ω_n atribuindo-lhe um determinado valor. Para minimizarmos as distorções de escla nesta direcção este valor é escolhido como a média entre ω' e ω''.

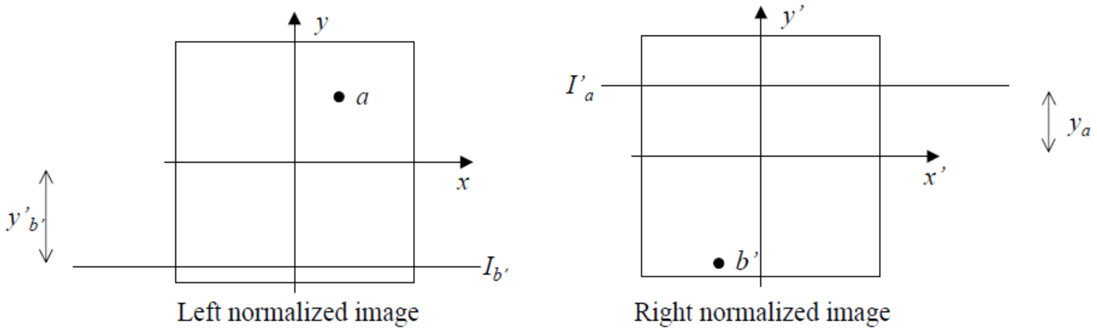


Figura 4.10: Estereopar normalizado

Note-se, que a escolha dos POI das imagens normalizadas é arbitrária, mas estes deverão ser iguais em ambas as imagens normalizadas esquerda e direita. No entanto, é aconselhável utilizar os mesmos POI das imagens originais para que a escala das imagens normalizadas seja similar à das imagens originais.

No novo plano imagem as duas imagens deverão ser rodadas (rotação κ) para assegurar que os pontos correspondentes e as linhas epipolares estarão situadas sobre a mesma linha (ou coluna). Consequentemente, os POE das novas imagens serão seleccionados da seguinte forma:

- Os centros de perspectiva das imagens normalizadas
- As orientações das imagens normalizadas deverão ser escolhidos da seguinte forma:
  - Uma rotação primária ϕ_n
  $$\phi_n = -\arctan(\frac{b_x}{b_y}) \tag{4.34}$$
  - Uma rotação secundária κ_n
  $$\kappa_n = \arctan(\frac{b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_z^2}}) \tag{4.35}$$
  - Uma rotação terciária ω_n
  $$\omega_n = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{4.36}$$
  - Consequentemente a matriz de rotação R_n correspondente será dada por
  $$R_n = R_{\phi_n} R_{\kappa_n} R_{\omega_n}$$

Modelo matemático

A derivação do modelo matemático para a normalização das imagens é relativamente simples. Consideremos uma das imagens, a esquerda por exemplo. Os valores dos seus pixeis deverão ser transformados para a imagem normalizada cujo centro de perspectiva é idêntico ao da imagem original e a sua orientação é definida pelas equações 4.34, 4.35, 4.36 e a sua orientação interna é arbitrária e dada por (x_{0n}, y_{0n}, c_n). No caso de esta transformação ser realizada no espaço objecto então considerando as equações de colinearidade para um ponto P qualquer, definido através do vector de localização $\mathbf{X}$ teremos

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + m\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Como este ponto P também irá aparecer na imagem normalizada, então podemos escrever as equações para este ponto na forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + m_n \mathbf{R}_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{0n})$$

Igualando as duas equações vem

$$m_n \mathbf{R}_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{0n}) = m\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Isto é

$$(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{0n}) = \frac{m}{m_n}\mathbf{R}_n\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{4.37}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} x_n - x_{0n} \\ y_n - y_{0n} \\ -c_n \end{bmatrix} = \lambda\bar{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{bmatrix}$$

onde $\lambda = \frac{m}{m_n}$ e

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_n\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{11} & \bar{r}_{12} & \bar{r}_{13} \\ \bar{r}_{21} & \bar{r}_{22} & \bar{r}_{23} \\ \bar{r}_{31} & \bar{r}_{32} & \bar{r}_{33} \end{bmatrix}$$

O coeficiente λ pode ser eliminado nas equações 4.37: De facto dividindo a primeira e a segunda pela terceira vem

$$\begin{aligned} x &= x_0 - c\,\frac{\bar{r}_{11}(x_n - x_{0n}) + \bar{r}_{21}(y_n - y_{0n}) + \bar{r}_{31}(-c_n)}{\bar{r}_{13}(x_n - x_{0n}) + \bar{r}_{23}(y_n - y_{0n}) + \bar{r}_{33}(-c_n)} \\ y &= y_0 - c\,\frac{\bar{r}_{12}(x_n - x_{0n}) + \bar{r}_{23}(y_n - y_{0n}) + \bar{r}_{32}(-c_n)}{\bar{r}_{13}(x_n - x_{0n}) + \bar{r}_{23}(y_n - y_{0n}) + \bar{r}_{33}(-c_n)} \end{aligned} \tag{4.38}$$

O procedimento para a reamostragem epipolar e geração das imagens normalizadas pode ser sumariado da seguinte forma:

1. Para cada pixel da imagem normalizada (x_n, y_n),
2. Calcular a correspondente localização na imagem original (x,y) utilizando as equações 4.38. Os valores de x e de y são habitualmente não inteiros,
3. Calcular o valor de cinzento $g(x, y)$ na imagem original utilizando um método de interpolação apropriado, tal como o vizinho mais próximo, a interpolação linear, ou a interpolação bicúbica,
4. Atribuir o valor interpolado de cinzento ao pixel na imagem normalizada, i.e $g(x_n, y_n) = g(x, y)$,
5. Repetir os passos anteriores para todos os pixeis da imagem normalizada,
6. Repetir os passos anteriores para a outra imagem do estreo-par.

4.6.3 Caso Prático

Dadas as orientações externas dum par estereo de imagens aéreas digitais e a necessária orientação interna da câmara, iremos normalizar estas duas imagens utilizando o procedimento indicado na secção anterior.

4.7 Reconstrução do objecto

4.7.1 Processamento monoscópico

Os procedimentos fotogramétricos de processamento monoscópico tem por objectivos quer a determinação de coordenadas objecto, quer a rectificação numérica ou óptica da imagem numa projecção geométrica diferente. Em ambos os casos é necessário conhecer os parâmetros de orientação da imagem e a geometria do objecto (pontos de apoio, elementos geométricos, DSM). Geralmente, é necessário fazer a distinção entre os objectos planos e as superfícies 3D arbitrárias.

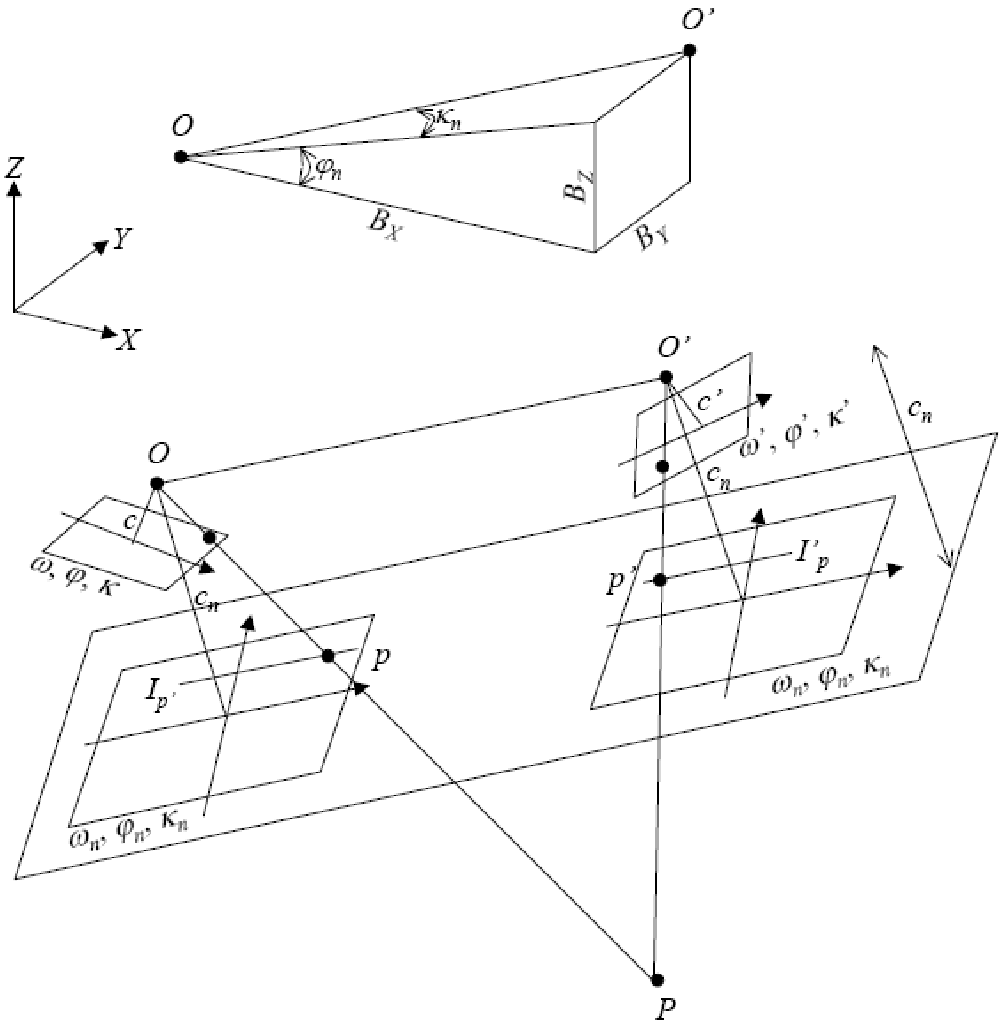


Figura 4.11: Construção do plano epipolar para um dado ponto P

Transformação projectiva

Um caso especial é a reconstrução de superfícies de objectos planos. A projecção central de um objecto plano numa imagem plana é descrita pela transformação projectiva. Ignorando os parâmetros de distorção, a inversão das equações d colinearidade dá

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(x' - x'_0) + r_{12}(y' - y'_0) + r_{13}z'}{r_{31}(x' - x'_0) + r_{32}(y' - y'_0) + r_{33}z'}$$
$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{21}(x' - x'_0) + r_{22}(y' - y'_0) + r_{23}z'}{r_{31}(x' - x'_0) + r_{32}(y' - y'_0) + r_{33}z'}$$

Assumindo que os parâmetros de orientação interna $(x'_0, y'_0, z' = -c)$ e os parâmetros de orientação externa (r_{ij}) são conhecidos, então para um dado Z (e.g $Z = 0$ para o plano) podemos calcular as coordenadas objecto

X e Y utilizando as equações anteriores. De facto,

$$X = \frac{a_0 + a_1 x' + a_2 y'}{c_1 x' + c_2 y' + 1}$$
$$Y = \frac{b_0 + b_1 x' + b_2 y'}{c_1 x' + c_2 y' + 1} \tag{4.39}$$

Para determinarmos os 8 parâmetros da equação anterior, precisamos de, no mínimo, 4 pontos de apoio no plano, 3 dos quais não podem estar situados sobre a mesma recta. Além disso como estas equações são não-lineares relativamente aos coeficientes a_i, b_i, c_i. No entanto, utilizando as equações lineares

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i - c_1 x_i X_i - c_2 y_i X_i = X_i$$
$$b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i - c_1 x_i Y_i - c_2 y_i Y_i = Y_i$$

podemos calcular directamente os parâmetros desconhecidos (a_i, b_i, c_i) sem termos de passar por um método iterativo.

Depois de determinados os parâmetros (a_i, b_i, c_i), utilizamos as equações 4.39 para transformar as coordenadas imagem em coordenadas objecto.

4.7.2 Processamento estereoscópico

Princípio do processamento estereoscópico

O processamento estereoscópico engloba todos os métodos, visuais ou computacionais, do processamento dum par estereo de imagens. Embora seja aplicado frequentemente na maioria das aplicações da fotogrametria aérea, no caso da fotogrametria terrestre é aplicado nas seguintes situações:

- Processamento visual das entidades geográficas naturais
- Na reconstrução visual ou digital de formas livres
- Na aquisição de imagens com câmaras estereo
- Na medição em tempo real de objectos pontuais
- No controlo da visão de robots.

O princípio do processamento estéreo é baseado na correspondência de pontos homólogos situados num dado plano epipolar. O plano epipolar intersecta os planos das imagens nas linhas epipolares. No caso normal da estereo-fotogrametria as linhas epipolares são paralelas e a informação de profundidade é determinada pela medição da paralaxe x, px'.

Intersecção no caso normal

O caso normal da estereo-fotogrametria é de facto um caso especial no qual duas câmaras idênticas têm eixos paralelos e apontam na mesma direcção com ângulos rectos relativamente à base. Num sistema de coordenadas XYZ localizado no centro de projecção da imagem esquerda, as coordenadas objecto podem ser obtidas a partir dos quocientes indicados na figura 4.12.

$$X = \frac{h}{c} x' = m x' \qquad ; \qquad Y = \frac{h}{c} y' = m y' = m y''$$

Como na direcção da visada

$$\frac{h}{c} = \frac{b}{x' - x''} = m$$

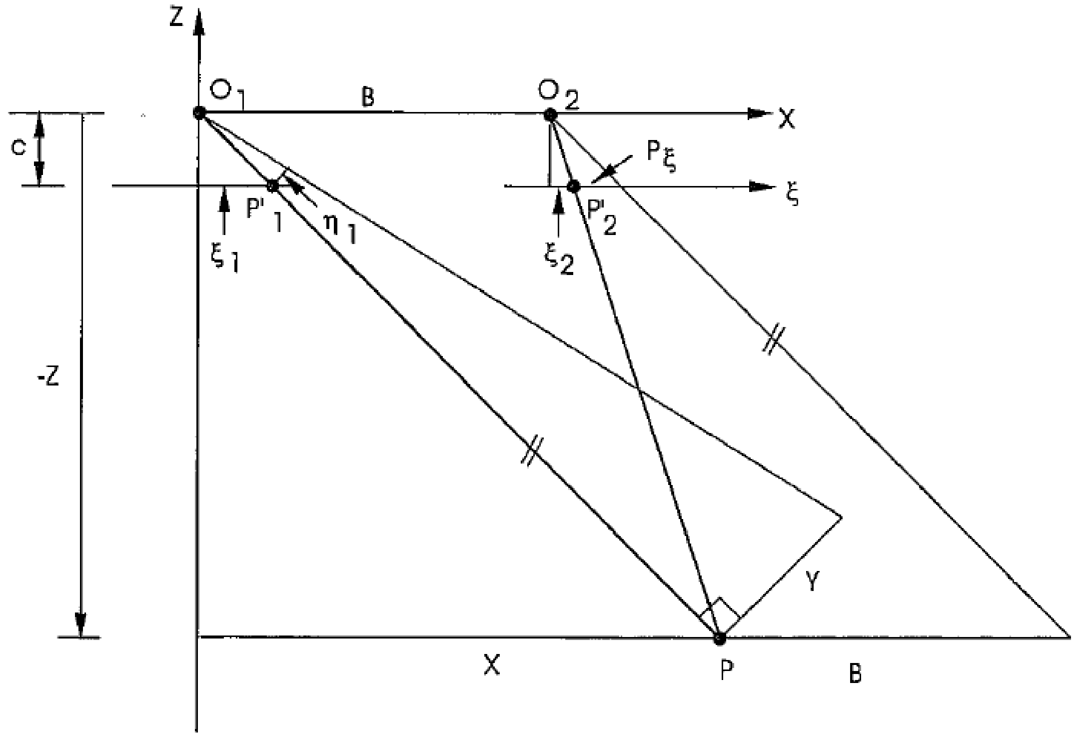


Figura 4.12: Caso normal

vem que

$$Z = h = \frac{bc}{x' - x''} = \frac{bc}{px'}$$

Note-se que estas equações também podem ser obtidas a partir das equações de colinearidade. De facto tomando como zero os ângulos de rotação em ambas as imagens e deslocando a imagem da direita ao longo da direcção X de um valor igual ao comprimento da base b relativamente à imagem esquerda temos que

$$\begin{aligned}
&X_{01} = Y_{01} = Z_{01} = Y_{02} = Z_{02} \\
&X_{02} = b \\
&w_1 = \phi_1 = k_1 = w_2 = \phi_2 = k_2 = 0 \\
&\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{I} \\
&x'_{01} = y'_{01} = x'_{02} = y'_{02} = 0
\end{aligned}$$

Donde vem que

$$\begin{cases} x'_1 = -c\,\frac{r_{11}X}{r_{33}Z} \\ y'_1 = -c\,\frac{r_{22}Y}{r_{33}Z} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x'_2 = -c\,\frac{r_{11}(X-b)}{r_{33}(Z-0)} \\ y'_2 = -c\,\frac{r_{22}(Y-0)}{r_{33}(Z-0)} \end{cases}$$

Combinando estas quatro equações podemos calcular as coordenadas X,Y,Z do ponto da seguinte forma:

$$Z\frac{x'_1}{-c} = b + Z\frac{x'_2}{-c}$$

Designado por $px = x_1 - x_2$ teremos

$$-Z = \frac{bc}{px}$$

As outras coordenadas podem ser determinadas da seguinte forma

$$Y = -Z\frac{y_1'}{c} \qquad \text{ou} \qquad Y = -Z\frac{y_2'}{c} \text{ (verificação)}$$

e

$$X = -Z\frac{x_1'}{c}$$

Exercício 4.18
Para um dado par de imagens estreo ($b = 1.2$m e $c = 64$mm) obtiveram-se as seguintes coordenadas

	Coord. imagem (mm)		Coord. imagem (mm)	
	x	y	x	y
P1	-3.924	-29.586	-23.704	-29.590
P2	7.955	45.782	6.642	45.780

Calcule a distância real entre os dois pontos?

Intersecção pelas equações de coplanaridade.

Um par estereo que não foi configurado de acordo com caso estrito normal tem parâmetros de orientação que não são iguais a zero. Além disso as imagens podem ter parâmetros diferentes de orientação interna. Se forem conhecidos os parâmetros de orientação interna e externa de ambas imagem, podemos calcular as coordenadas objecto por intersecção espacial dos raios $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$. Os dois raios espaciais são definidos pelas coordenadas imagem medidas e transformados através dos parâmetros de orientação.

Para o caso especial de um par estereo a intersecção espacial pode ser feita utilizando os seguintes passos:

1. Transformação das coordenadas imagem

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{02} \\ Y_{02} \\ Z_{02} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

2. Cálculo das componentes da base

$$b_x = X_{02} - X_{01}$$
$$b_y = Y_{02} - Y_{01}$$
$$b_z = Z_{02} - Z_{01}$$

Para a versão simples da intersecção os raios enviesados intersectam o plano horizontal XY de cota Z do ponto P, ou seja:

$$X = X_1 = X_2$$
$$Z = Z_1 = Z_2$$
$$Y = \tfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2)$$

3. Cálculo dos factores escala. Os factores escala para a transformação das coordenadas imagem são:

$$\lambda = \frac{b_x(Z'' - Z_{02}) - b_z(X'' - X_{02})}{(X' - X_{01})(Z'' - Z_{02}) - (X'' - X_{02})(Z' - Z_{01})}$$
$$\mu = \frac{b_x(Z' - Z_{01}) - b_z(X' - X_{01})}{(X' - X_{01})(Z'' - Z_{02}) - (X'' - X_{02})(Z' - Z_{01})}$$

4. Cálculo das coordenadas objecto

$$X = X_{01} + \lambda(X' - X_{01}) \qquad Y_1 = Y_{01} + \lambda(Y' - Y_{01})$$
$$Z = Z_{01} + \lambda(Z' - Z_{01}) \qquad Y_2 = Y_{02} + \mu(Y'' - Y_{02})$$
$$Y = \tfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \qquad pY = Y_2 - Y_1$$

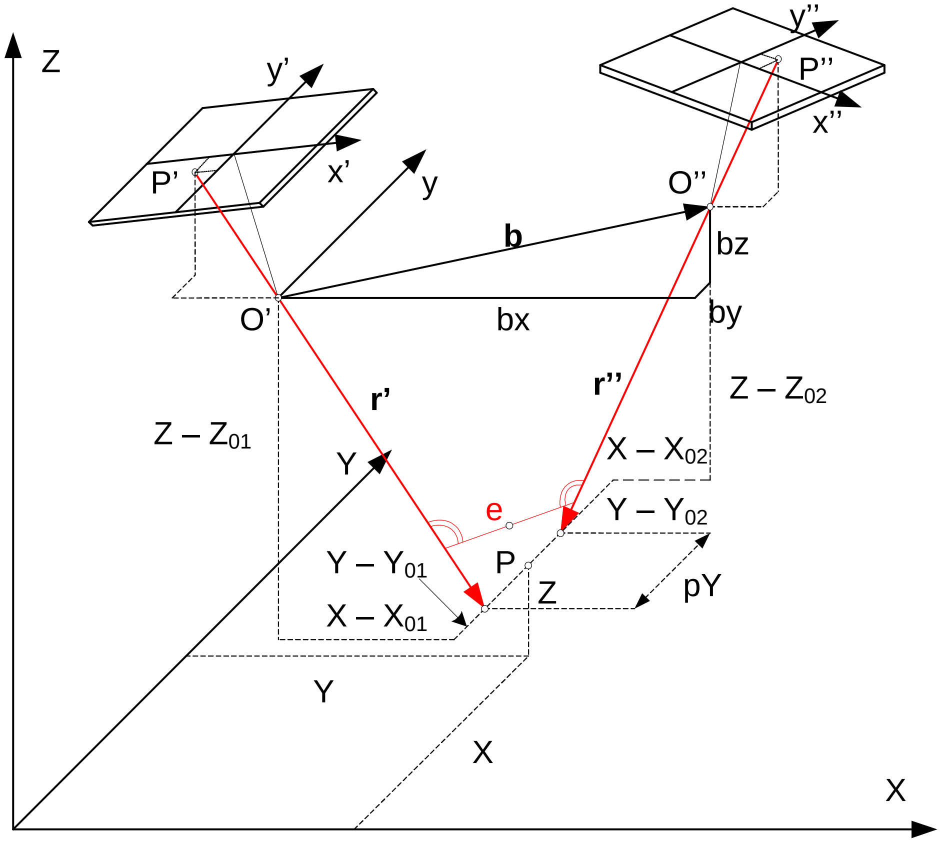


Figura 4.13: Intersecção espacial para o caso geral de um par estereo

Aqui a paralaxe-Y no espaço objecto (pY) é uma medida de qualidade da determinação das coordenadas. É zero quando os dois raios se intersectarem exactamente.

A solução não é completamente rigorosa mas na maioria dos casos é suficiente desde que a base esteja aproximadamente alinhada com a direcção X e quando a base bx é grande quando comparada com as outras componentes by e bz da base.

Exercício 4.19

Para uma câmara com distância focal $c = 152.113mm$ e para os seguintes parâmetros de orientação externa de duas fotografias

Parâmetros de orientação externa

Parâmetro	Foto esquerda	Foto direita
Omega (^{o})	0.0000	2.4099
Phi (^{o})	0.0000	0.5516
Kappa (^{o})	0.0000	−0.2067
X_0	0.0000	91.9740
Y_0	0.0000	−1.7346
Z_0	152.1130	148.3015

;

Coordenadas fiduciais

	Foto esquerda		Foto direita	
Ponto	$x(mm)$	$y(mm)$	$x(mm)$	$y(mm)$
a	−4.870	1.992	−97.920	−2.910
b	89.307	2.709	−1.507	−1.856

determine as coordenadas objecto dos pontos A e B cujas de fotocoordenadas são dadas na tabela anterior.

Solução 4.19
$A = (-4.8352, 1.9730, 1.0888)^T$; $B = (89.0970, 2.7047, 0.3391)^T$

Intersecção pelas equações de colinearidade.

O caso geral da intersecção espacial pode resolver-se de forma rigorosa pelas equações de colinearidade. De facto, considerando a linearização destas equações

$$\begin{bmatrix} v\,x' \\ v\,y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -b_{14} & -b_{15} & -b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & -b_{24} & -b_{25} & -b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\,w \\ d\,\phi \\ d\,k \\ d\,X_0 \\ d\,Y_0 \\ d\,Z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\,X \\ d\,Y \\ d\,Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix}$$

e admitindo que conhecemos os POE das duas imagens, ou seja $\{X_0', Y_0', Z_0', w', \phi', \kappa'\}$ para a imagem esquerda e $\{X_0', Y_0', Z_0', w', \phi', \kappa'\}$ para a imagem direita , então para um ponto P no espaço objecto com coordendas (X, Y, Z) podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_x'' \\ v_y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{14}' & b_{15}' & b_{16}' \\ b_{24}' & b_{25}' & b_{26}' \\ b_{14}'' & b_{15}'' & b_{16}' \\ b_{24}'' & b_{25}'' & b_{26}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\,X \\ d\,Y \\ d\,Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J' \\ K' \\ J'' \\ K'' \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Nestas equações os termos b_{ij}', b_{ij}'' são calculados com os POI e POE das imagens esquerda e direita, respectivamente, e os termos independentes J e K são dados pelas expressões da secção 4.2.2. Assim, para cada par de pontos homólogos com coordenadas imagem (x', y') e (x'', y'') formamos um sistema linear com 4 equações e três incógnitas $(d\,X, d\,Y, d\,Z)$, cuja solução pode ser obtida pelo método dos mínimos quadrados.

Note-se que mais uma vez como as equações de colinearidade foram linearizadas recorrendo ao teorema de Taylor, será necessário fornecer aproximações iniciais para as coordenadas objecto do ponto de intersecção. No caso normal da fotogrametria aérea estas aproximações podem ser calculadas utilizando as equações de paralaxe, a saber:

$$\begin{cases} \bar{X} = B\,\frac{x'}{p_x} \\ \bar{Y} = B\,\frac{y'}{p_x} \\ \bar{Z} = H - \frac{B\,c}{p_x} \end{cases}$$

onde $p_x = x' - x''$ é a paralaxe x ponto em questão. Além disso, como as coordenadas (X, Y, Z) dos dois centros de exposição são conhecidas no sistema de coordenadas objecto estas podem ser utilizadas para calcular $H = \frac{Z_0' + Z_0''}{2}$ e $B = \sqrt{(X_0'' - X_0')^2 + (Y_0'' - Y_0')^2}$. No entanto, atendendo a que as coordenadas (X, Y) do ponto de intersecção são dadas num referencial local $\{\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$, será necessário transformar estas coordenadas nas coordenadas objecto pretendidas. Para isso utilizam-se as coordenadas dos dois centros de exposição e recorre-se a uma transformação bidimensional de coordenadas considerando que no referencial local as coordenadas destes pontos são $\bar{X}' = \bar{Y}' = \bar{Y}'' = 0$, e $\bar{X}'' = B$.

Exercício 4.20
Resolva o problema anterior considerando agora as equações de colinearidade no cálculo da intersecção.

Referências

Kraus, K., I. Harley e S. Kyle (2007). *Photogrammetry: geometry from images and laser scans.* de Gruyter Textbook vol. 1. Walter De Gruyter. ISBN: 9783110190076.

Luhmann, T. et al. (2007). *Close range photogrammetry: principles, techniques and applications*. Whittles. ISBN: 9780470106334.

Mikhail, E.M., J.S. Bethel e J.C. McGlone (2001). *Introduction to modern photogrammetry*. vol. 1. Wiley. ISBN: 9780471309246.

Wolf, Paul R. e Bon A. Dewitt (2000). *Elements of photogrammetry : with applications in GIS*. 3rd ed. / Paul R. Wolf, Bon A. Dewitt. McGraw-Hill, Boston : xiii, 608 p. ISBN: 0072924543.

4.A A matriz da projecção central

Em Fotogrametria Terrestre e em Visão por Computador é habitual representar a geometria da projecção central duma câmara (*pinhole camera* - câmara sem lentes) por uma matriz P de dimensão (3×4). Em geral a matriz P não é invertível, ou seja não podemos passar do plano imagem para o objecto, a não ser no caso especial de o objecto ser também um plano.

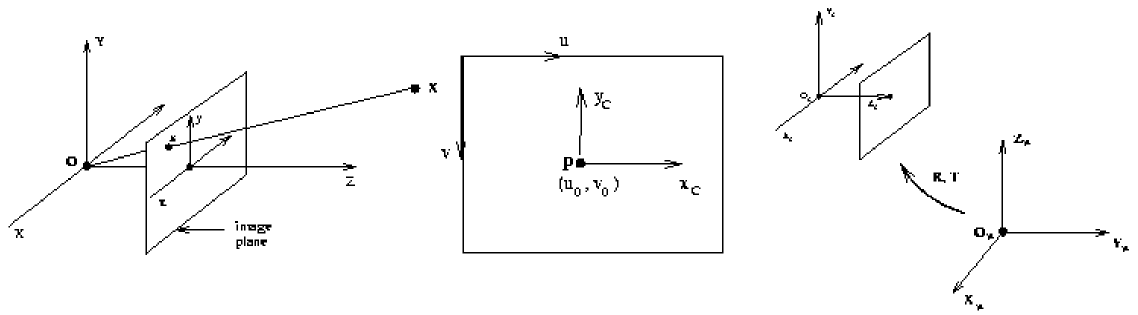


Figura 4.14: Matriz de projecção P 3×4

No caso especial de a distância focal c ser infinita estaremos perante uma transformação afim 3D ($y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) a qual pode ser escrita na forma:

$$y = Ax + b \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

As transformações euclidianas são dadas por

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde R é uma matriz ortogonal, isto é $R\,R^\top = R^\top R = I$.

Por outro lado as transformações projectivas, são definidas como:

$$\lambda \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda(y_1, y_2, y_3, 1)^\top$ são as coordenadas homogéneas de (y_1, y_2, y_3)

Atendendo à figura 4.14 podemos representar o sistema de coordenadas num referencial ligado à câmara.

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\frac{x}{c} = \frac{X}{Z}\,;\ \frac{x}{c} = \frac{X}{Z}$$

Em notação vectorial temos

$$\mathbf{x} = c\,\frac{\mathbf{X}}{Z}$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{X}$ são vectores de dimensão $(3,1)$, $\mathbf{x} = (x, y, c)^T$ e $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$.

Como não temos acesso directo a este referencial é comum fazer-se o mapeamento do sistema coordenadas objecto num sistema de coordenadas imagem. Neste caso existem 3 sistemas de coordenadas envolvidos: o sistema câmara, o sistema imagem e o sistema objecto.

1. Câmara: projecção perspectiva

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{bmatrix} \text{; com } \lambda = \frac{f}{Z_O}$$

   Esta relação pode ser escrita como um mapeamento linear entre coordenadas homogéneas (diferindo apenas dum factor escala):

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Imagem (parâmetros internos/intrínsecos da câmara). Neste caso, fazendo

$$k_u x_o = u - u_0 \text{ ; } k_v y_o = v_0 - v$$

   onde as unidades de k são pixeis/L (L=unidade de comprimento), teremos para qualquer ponto da imagem:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,k_u & 0 & u_0 \\ 0 & -c\,k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ c \end{bmatrix}$$

   A matriz $\mathbf{K}$ é uma matriz triangular superior e é designada por matriz de calibração da câmara:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } \alpha_u = c\,k_u \text{ e } \alpha_v = -c\,k_v.$$

   Esta matriz fornece a transformação entre um ponto imagem e um raio do espaço euclidiano 3D. Há 4 parâmetros envolvidos na matriz: i) Dois factores escala nas direções x (α_u) e y (α_v) da imagem; ii) o ponto principal (u_0, v_0) que é o ponto onde o eixo óptico intersecta o plano imagem. O quociente (α_u/α_v) dá-nos o aspect ratio da imagem. Se conhecermos a matriz $\mathbf{K}$ dizemos que a câmara está calibrada, e poderemos utilizá-la para medir a direcção dos raios (isto é teremos um sensor directo).

3. Objecto (parâmetros externos/extrinsecos da câmara). A transformação euclidiana entre a câmara e o sistema de coordenanas objecto é dada em notação matricial por

$$\mathbf{X}_O = \mathbf{R}\mathbf{X}_w + \mathbf{T}$$

   Isto é (em coordenadas homogéneas)

$$\begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo as matrizes anteriores nesta relação teremos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} | & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Designando por $\mathbf{P} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} | & \mathbf{T} \end{bmatrix}$ teremos então definido uma matriz de projecção do espaço euclidiano $3D$ no espaço imagem $2D$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note-se que as coordenadas homogéneas do centro da câmara (ponto folcal) C podem ser calculadas a partir de:

$$PC = 0$$

Exercício 4.21

Dada a seguinte matriz que descreve a posição, orientação, zoom e distorções da câmara/projector

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 & 17 \\ -10 & -5 & -10 & 50 \\ 10 & 2 & -11 & 19 \end{bmatrix}$$

calcule as coordenadas imagem do ponto objeto $X = (0,3,2)^T$ e do centro da câmara

Solução 4.21

As coordenadas imagem do ponto são $x = (-21/3, 15/3)^\top$ e as coordenadas do centro são $C = t[2,4,6,2]^\top$ ou seja $(1,2,3)^\top$

Exercício 4.22

Considerando os seguintes elementos de orientação interna

Parâmetros intrínsecos da Câmara Canon PowerShot ELPH300HS_4.3_3000×4000
Distância focal (mm) assumindo o tamanho do sensor (SwxSh)mm
$c = 4.4116218564469518$
Ponto principal (mm)
$u_0 = 3.1109186425579636$; $v_0 = 2.3388996807641442$
Tamanho do Sensor (mm)
$Sw = 6.1976000000000004$; $S_h = 4.6481999999999992$
Coeficientes das distorções simétricas
k_1 = -0.042466740269368482; k_2 = 0.031712642668591459;
k_3 = -0.015481524268674817
Coeficientes das distorções tangenciais
p_1 = 0.00021602989655093052 ; p_2 = 4.5317187672407569e-005

e os parâmetros de orientação externa duma dada câmara

		Parâmetros extrinsecos				
imagemNome	X	Y	Z	Omega	Phi	Kappa
IMG_0799.JPG	-24457.136442	60182.804732	192.613908	-4.857635	-2.799213	-171.507300
IMG_0800.JPG	-24459.938033	60154.351336	192.406608	-7.444937	-0.346005	170.882203

calcule a matriz de projeção P.

Capítulo 5

Triangulação aérea

Conteúdo

5.1 Considerações iniciais

A triangulação aérea (ou aerotriangulação), mesmo sem apoio de equipamento GPS e IMU aerotransportado, liberta o fotogrametrista da obrigação de determinar, em cada estereomodelo, pelo menos três pontos de apoio utilizando métodos de levantamento terrestres.

A triangulação por feixes perspectivos (ajustamento por feixe de um bloco, orientação multi-imagem) é um método que permite um ajustamento numérico simultâneo de um número ilimitado de imagens espacialmente distribuídas (feixes de raios). Utiliza observações fotogramétricas (medições de pontos imagem), observações topográficas (estações e/ou receptores GPS) e um sistema de coordenadas objecto. Utilizando pontos de ligação, faz a junção de imagens isoladas num modelo global o qual permitirá por sua vez a reconstrução 3D da superfície objecto pontos.

Os resultados da triangulação são os elementos de orientação de todas as fotografias (ou imagens) e as coordendas XYZ de pontos discretos num sistema de coordenadas global (usualmente um sistema de coordenadas terreno). Falamos então de medição fotogramétrica de pontos. Estes pontos podem ser:

- pontos sinalizados antes do voo
- pontos "naturais"seleccionados nas fotografias, habitualmente acompanhados de cróquis
- pontos automáticaamente selecionados em imagens métricas digitais com coordenadas imagem previamente conhecidas.

5.2 Modelo matemático

5.2.1 Modelo de ajustamento

O modelo matemático para o ajustamento por feixe é baseado nas equações de colinearidade[1]

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 - c\,\frac{r_{11}(X-X_0)+r_{21}(Y-Y_0)+r_{31}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0)+r_{23}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)} \\ y' &= y'_0 - c\,\frac{r_{11}(X-X_0)+r_{21}(Y-Y_0)+r_{31}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0)+r_{23}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

as quais se escrevem na forma simplificada por

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 + z'\frac{k_X}{N} + \Delta x' \\ y' &= y'_0 + z'\frac{k_Y}{N} + \Delta y' \end{aligned}$$

A estrutura destas equações permite a formulação directa dos valores de observação primários (coordenadas imagem) como funções de todos os parâmetros do processo de imageamento fotogramétrico. As equações de colinearidade linearizadas nas aproximações iniciais, poder ser então utilizadas como equações de observação num ajustamento de mínimos quadrados de acordo com o modelo de Gauss-Markov.

Desta forma utilizando basicamente as coordenadas imagem de pontos homólogos como observações, os parâmetros seguintes são determinados iterativamente como funções dessas observações:

- coordenadas objecto tridimensionais de cada novo ponto j (u_p, 3 incógnitas cada)
- orientação externa de cada imagem i (u_I, 6 incógnitas cada)
- orientação interna de cada canera k (u_C, 0 ou 3 incógnitas cada)

Portanto o ajustamento de bundle representa uma forma extensiva da ressecção espacial:

$$\begin{cases} x'_j + v x'_j = F(\omega_i, \phi_i, \kappa_i, X_{0j}, Y_{0i}, Z_{0i}, x'_{0k}, y'_{0k}, c_k, \Delta x'_k, X_j, Y_j, Z_j) \\ y'_j + v y'_j = G(\omega_j, \phi_j, \kappa_j, X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j}, x'_{0k}, y'_{0k}, c_k, \Delta y'_k, X_i, Y_i, Z_i) \end{cases} \tag{5.2}$$

onde:

- j: índice de ponto
- i: índice imagem
- k: índice câmara

[1] Estas equações podem ser extensíveis a mais do que uma câmara. Basta para isso fazer fazer uma substituição de variável $z' = -c$.

A linearização das equações 5.1 é feita utilizando valores aproximados para as incógnitas que estão dentro dos parêntesis da equação 5.2, isto é:

$$
\begin{aligned}
v x' = & \left(\frac{\partial x'}{\partial \omega}\right)^0 d\omega + \left(\frac{\partial x'}{\partial \phi}\right)^0 d\phi + \left(\frac{\partial x'}{\partial \kappa}\right)^0 d\kappa + \\
& + \left(\frac{\partial x'}{\partial X_0}\right)^0 dX_0 + \left(\frac{\partial x'}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 + \left(\frac{\partial x'}{\partial Z_0}\right)^0 dZ_0 + \\
& + \left(\frac{\partial x'}{\partial X}\right)^0 dX + \left(\frac{\partial x'}{\partial Y}\right)^0 dY + \left(\frac{\partial x'}{\partial Z}\right)^0 dZ - (x' - x_i'^0) \\
v y' = & \left(\frac{\partial y'}{\partial \omega}\right)^0 d\omega + \left(\frac{\partial y'}{\partial \phi}\right)^0 d\phi + \left(\frac{\partial y'}{\partial \kappa}\right)^0 d\kappa + \\
& + \left(\frac{\partial y'}{\partial X_0}\right)^0 dX_0 + \left(\frac{\partial y'}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 + \left(\frac{\partial y'}{\partial Z_0}\right)^0 dZ_0 + \\
& + \left(\frac{\partial y'}{\partial X}\right)^0 dX + \left(\frac{\partial y'}{\partial Y}\right)^0 dY + \left(\frac{\partial y'}{\partial Z}\right)^0 dZ - (y' - y'^0)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Os coeficientes diferenciais já foram derivados anteriormente e são dados por

$$
\frac{\partial x'}{\partial \omega} = \frac{z'}{N}\left\{\frac{k_x}{N}\left[r_{33}(Y - Y_0) - r_{23}(Z - Z_0)\right] - r_{31}(Y - Y_0) + r_{21}(Z - Z_0)\right\} = b_{11} \tag{5.4a}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial \phi} &= \frac{z'}{N}\left\{\frac{k_x}{N}\left[k_Y \sin\kappa - k_X \cos\kappa\right] - N\cos k\right\} = b_{12} \\
\frac{\partial x'}{\partial \kappa} &= \frac{z'}{N} k_Y = b_{13} \\
\frac{\partial x'}{\partial X_0} &= \frac{z'}{N^2}(r_{13}k_X - r_{11}N) = -b_{14} \\
\frac{\partial x'}{\partial Y_0} &= \frac{z'}{N^2}(r_{23}k_X - r_{21}N) = -b_{15} \\
\frac{\partial x'}{\partial Z_0} &= \frac{z'}{N^2}(r_{33}k_X - r_{31}N) = -b_{16} \\
\frac{\partial x'}{\partial X} &= -\frac{z'}{N^2}(r_{13}k_X - r_{11}N) = b_{14} \\
\frac{\partial x'}{\partial Y} &= -\frac{z'}{N^2}(r_{23}k_X - r_{21}N) = b_{15} \\
\frac{\partial x'}{\partial Z} &= -\frac{z'}{N^2}(r_{33}k_X - r_{31}N) = b_{16}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y'}{\partial \omega} &= \frac{z'}{N}\left\{\frac{k_Y}{N}[r_{33}(Y-Y_0)-r_{23}(Z-Z_0)]-r_{32}(Y-Y_0)+r_{22}(Z-Z_0)\right\}=b_{21} \\
\frac{\partial y'}{\partial \phi} &= \frac{z'}{N}\left\{\frac{k_Y}{N}[k_X\cos\kappa+k_Y\sin\kappa]+N\sin k\right\}=b_{22} \\
\frac{\partial y'}{\partial \kappa} &= -\frac{z'}{N}k_X=b_{23} \\
\frac{\partial y'}{\partial X_0} &= \frac{z'}{N^2}(r_{13}k_Y-r_{12}N)=-b_{24} \\
\frac{\partial y'}{\partial Y_0} &= \frac{z'}{N^2}(r_{23}k_Y-r_{22}N)=-b_{25} \\
\frac{\partial y'}{\partial Z_0} &= \frac{z'}{N^2}(r_{33}k_Y-r_{32}N)=-b_{26} \\
\frac{\partial y'}{\partial X} &= -\frac{z'}{N^2}(r_{13}k_Y-r_{12}N)=b_{24} \\
\frac{\partial y'}{\partial Y} &= -\frac{z'}{N^2}(r_{23}k_Y-r_{22}N)=b_{25} \\
\frac{\partial y'}{\partial Z} &= -\frac{z'}{N^2}(r_{33}k_Y-r_{32}N)=b_{26}
\end{aligned}
\tag{5.4b}
$$

Assim cada ponto i medido na imagem j fornece duas equações de observação do tipo 5.3, nas quais as incógnitas são as seis correcções dos parâmetros de orientação externa da imagem j e as três correcções para as coordenadas do ponto i. Note-se se um raio passar por um ponto de apoio (i.e considerado fixo) os termos dX_i, dY_i, dZ_i desaparecem. Os quocientes diferenciais $()^0$ dados nas equações 5.4a e 5.4b são calculados com os valores aproximados das incógnitas.

No caso de os parâmetros de orientação externa serem introduzidos como incógnitas teremos de adicionar os seguintes coeficientes diferenciais

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial x'_0} &= 1; & \frac{\partial y'}{\partial y'_0} &= 1 \\
\frac{\partial x'}{\partial z'} &= -\frac{k_X}{N}; & \frac{\partial y'}{\partial z'} &= -\frac{k_Y}{N}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

As derivadas relativamente aos parâmetros de distorção são introduzidas de forma análoga.

5.2.2 Equações normais

Para uma imagem i e para um ponto j as equações de colinearidade linearizadas podem ser escritas na forma

$$
\begin{bmatrix} vx'_{ij} \\ vy'_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^{ij} & b_{12}^{ij} & b_{13}^{ij} & -b_{14}^{ij} & -b_{15}^{ij} & -b_{16}^{ij} \\ b_{21}^{ij} & b_{22}^{ij} & b_{23}^{ij} & -b_{24}^{ij} & -b_{25}^{ij} & -b_{26}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega_i \\ d\phi_i \\ d\kappa_i \\ dX_{0_i} \\ dY_{0_i} \\ dZ_{0_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14}^{ij} & b_{15}^{ij} & b_{16}^{ij} \\ b_{24}^{ij} & b_{25}^{ij} & b_{26}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix}
$$

ou ainda

$$
\underset{2\times 1}{v_{ij}} + \underset{2\times 6}{\dot{B}_{ij}}\ \underset{6\times 1}{\dot{\delta}_i} + \underset{2\times 3}{\ddot{B}_{ij}}\ \underset{3\times 1}{\ddot{\delta}_j} = \underset{2\times 1}{f_{ij}}
$$

onde $\dot{\delta}$ contem as correcções a adicionar aos parâmetros iniciais das imagens i e $\ddot{\delta}$ contém as correcções a adicionar às coordenadas iniciais dos pontos j. O termo independente f_{ij} é dado pela diferença entre as coordenadas imagem observadas (i.e medidas) e as calculadas com as aproximações iniciais. Se agora formarmos as equações normais do ajustamento de mínimos quadrados para uma dada imagem i e um ponto j teremos

$$\begin{bmatrix} \left(\dot{B}_{ij}^T\right)_{6\times 2} \\ \left(\ddot{B}_{ij}^T\right)_{3\times 2} \end{bmatrix} P_{ij} \begin{bmatrix} \left(\dot{B}_{ij}\right)_{2\times 6} & \left(\ddot{B}_{ij}\right)_{2\times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dot{B}_{ij}^T\right)_{6\times 2} \\ \left(\ddot{B}_{ij}^T\right)_{3\times 2} \end{bmatrix} P_{ij} \left(f_{ij}\right)_{2\times 1}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} \left(\dot{B}_{ij}^T\right)_{6\times 2} P_{ij} \left(\dot{B}_{ij}\right)_{2\times 6} & \left(\dot{B}_{ij}^T\right)_{6\times 2} P_{ij} \left(\ddot{B}_{ij}\right)_{2\times 3} \\ \left(\ddot{B}_{ij}^T\right)_{3\times 2} P_{ij} \left(\dot{B}_{ij}\right)_{2\times 6} & \left(\ddot{B}_{ij}^T\right)_{3\times 2} P_{ij} \left(\ddot{B}_{ij}\right)_{2\times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dot{\delta}_i\right)_{6\times 1} \\ \left(\ddot{\delta}_j\right)_{3\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dot{B}_{ij}^T\right)_{6\times 2} P_{ij} \left(f_{ij}\right)_{2\times 1} \\ \left(\ddot{B}_{ij}^T\right)_{3\times 2} P_{ij} \left(f_{ij}\right)_{2\times 1} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

onde P_{ij} é a matriz peso (inversa da matriz de covariância) de ordem 2×2 associada às coordenadas imagem do ponto j na imagem i.

O peso de uma dada observação i, com variância σ_i^2, é dado por

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

onde σ_0^2 é um factor escala constante e denominado de variância da unidade de peso. Num dado problema podemos escolher um valor arbitrario para σ_0^2. No entanto, uma vez fixado este valor, este deve ser mantido para todas as observações do ajustamento. Note-se que se uma dada observação tiver uma variância $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$ ela terá um peso $p_i = 1$.

A equação 5.6 pode ser escrita em notação matricial na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{N}} & \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{N}}^T & \ddot{\mathbf{N}} \end{bmatrix}_{9\times 9} \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix}_{9\times 1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \ddot{\mathbf{t}} \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

Nestas equações $\dot{N}$ contém as correcções (i.e incógnitas) a adicionar aos parâmetros das imagens, $\ddot{N}$ contém as correcções (i.e incógnitas) a adicionar às coordenadas iniciais dos pontos de ligação e finalmente $\bar{N}$ contém os dois tipos de correcções (isto se o ponto j aparecer na imagem i).

5.3 Aspectos numéricos do ajustamento

Um dos factores mais importantes na adopção do ajustamento por feixe foi o desenvolvimento de algoritmos eficientes para a formação e solução das equações normais. A análise detalhada da estrutura das matrizes B e N reduz em grande medida os requisitos em termos de cálculo e armazenamento da solução do problema de ajustamento.

5.3.1 Formação das equações normais

No caso de termos um bloco constituído por m_1 imagens e neste bloco tivermos m_2 pontos de ligação. Suponhamos também que foram observadas (i.e medidas) n pares de coordenadas imagem, das quais $2m_2$ serão relativas aos pontos de ligação e s serão relativas aos pontos de apoio.

$$\left\| \begin{array}{l} n = \text{ observações} \begin{cases} s = \text{ pontos de apoio} \\ m_2 = \text{ pontos de ligação} \end{cases} \\ m = \text{ incógnitas} \begin{cases} m_1 = \text{ imagens} \\ m_2 = \text{ pontos de ligação} \end{cases} \end{array} \right.$$

As equações de observação serão

$$v_{n\times 1} + \begin{bmatrix} \dot{B}_{n\times 6m_1} & \ddot{B}_{n\times 3m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_{6m_1\times 1} \\ \ddot{\delta}_{3m_2\times 1} \end{bmatrix} = t_{n\times 1} \tag{5.7}$$

ou seja

$$v_{n\times 1} + B_{n\times m}\delta_{m\times 1} = t_{n\times 1}$$

Partimos do pressuposto que os erros em cada coordenada imagem não estão correlados com quaisquer outros erros de outras coordenadas imagem, sejam eles referentes a outros pontos da mesma imagem sejam eles referentes ao mesmo ponto mas pertencente a outras imagens; apesar de para a mesmo ponto imagem as coordenadas x e y poderem estar correlados. Se estiveem correlados então eles estarão afectados pelos mesmos erros sistemáticos em vez de serem puramente aleatórios. Quando assumimos que os erros não estão correlados estamos a assumir que todos os erros sistemáticos foram eliminados.

Este pressuposto significa que os matrizes de covariância e as matrizes peso que contêm informação sobre a covariância e o peso de todas as coordenadas imagem são matrizes diagonais por bloco. Cada bloco é uma matriz 2×2 e corresponde a um conjunto de medições das coordenadas imagem para um dado ponto. Uma vez que as medições são independentes umas das outras, podemos somar as contribuições de cada conjunto de equações de colinearidade nas equações normais.

Nestas condições, as equações normais serão

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{N}}_{6m_1\times 6m1} & \bar{\mathbf{N}}_{6m_1\times 3m_2} \\ \bar{\mathbf{N}}^T_{3m_2\times 6m_1} & \ddot{\mathbf{N}}_{3m_2\times 3m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\delta}_{6m_1\times 1} \\ \ddot{\delta}_{3m_2\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}}_{6m_1\times 1} \\ \ddot{\mathbf{t}}_{3m_2\times 1} \end{bmatrix}$$

onde:

- A matriz superior esquerda ($\dot{N}$) é uma matriz hiperdiagonal composta por submatrizes com 6×6 elementos, isto é (onde a soma é feita sobre todos os pontos j que aparecem na imagem):

$$\dot{N} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_2+s}\dot{N}_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{m_2+s}\dot{N}_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=1}^{m_2+s}\dot{N}_{m_1 j} \end{bmatrix}$$

- A matriz inferior direita é também uma matriz hiperdiagonal composta por submatrizes com 3×3 elementos, isto é (onde a soma é feita sobre todas as imagens i para as quais um dado ponto de ligação aparece):

$$\ddot{N} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m_1}\ddot{N}_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{m_1}\ddot{N}_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=1}^{m_1}\ddot{N}_{i m_2} \end{bmatrix}$$

  Note-se que a inversão de duas matrizes hiperdiagonais é marticularmente simples: cada submatriz pode ser invertida independentemente.

- Por último a matriz $\bar{N}$ é dada por

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} & \cdots & \bar{N}_{1m_2} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} & \cdots & \bar{N}_{2m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{N}_{m_1 1} & \bar{N}_{m_1 2} & \cdots & \bar{N}_{m_1 m_2} \end{bmatrix}$$

A estrutura desta matriz depende da relação de pertença entre os pontos e as imagens (i.e se um ponto j aparece ou não na imagem i). De facto, como cada submatriz é calculada pelo produto das submatrizes $\dot{B}_{ij}$, P_{ij}, $\ddot{B}_{ij}$ pertencentes a um conjunto de equações de colinearidade, então se um dado ponto j não aparecer na imagem i teremos $\bar{N}_{ij} = 0$.

Em termos genéricos as equações normais do ajustamento por feixe podem ser escritas na forma

$$N_{(6m_1+3m_2)\times(6m_1+3m_2)}\delta_{(6m_1+3m_2)\times 1} = t_{(6m_1+3m_2)}$$

onde

$$N = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \dot{N}_1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} & \cdots & \bar{N}_{1n} \\ 0 & \dot{N}_2 & \cdots & 0 & \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} & \cdots & \bar{N}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{N}_m & N_{m1} & N_{m2} & \cdots & N_{mn} \\ \hline \bar{N}_{11} & \bar{N}_{21} & \cdots & \bar{N}_{m1} & \ddot{N}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{N}_{12} & \bar{N}_{22} & \cdots & \bar{N}_{m2} & 0 & \ddot{N}_2 & \cdots & 0 \\ & & & & & & & \\ \bar{N}_{1n} & \bar{N}_{2n} & \cdots & \bar{N}_{mn} & 0 & 0 & \cdots & N_n \end{array}\right]; \delta = \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\delta}_{m_1} \\ \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_{m_2} \end{bmatrix}; t = \begin{bmatrix} \dot{t}_1 \\ \dot{t}_2 \\ \vdots \\ \dot{t}_{m_1} \\ \ddot{t}_1 \\ \ddot{t}_2 \\ \vdots \\ \ddot{t}_{m_2} \end{bmatrix}$$

Nestas matrizes, as diferentes submatrizes são dadas por

- $\dot{N}_i = \sum_{j=1}^{m_2+s} \dot{B}_{ij}^T P_{ij} \dot{B}_{ij}$,
- $\ddot{N}_j = \sum_{i=1}^{m_1} \ddot{B}_{ij}^T P_{ij} \ddot{B}_{ij}$,
- $\bar{N}_{ij} = \dot{B}_{ij}^T P_{ij} \ddot{B}_{ij}$,
- $\dot{t}_i = \sum_{j=1}^{m_2+s} \dot{B}_{ij}^T P_{ij} f_{ij}$,
- $\ddot{t}_j = \sum_{i=1}^{m_1} \ddot{B}_{ij}^T P_{ij} f_{ij}$

O algoritmo 5.1 implementa o processo de construção das equações normais (Mikhail, Bethel e McGlone, 2001). A interpretação do algoritmo pode ser feita supondo o que aconteceria se todos os pontos aparecessem em todas as imagens.

Neste algoritmo, a matriz dos pesos é calculada de acordo com a equação . No entanto, e caso todas as observações nos mereçam o mesmo grau de confiança então podemos tornar a matriz dos pesos igual à matriz identidade ($P_{ij} = I$). Nestas condições, o algoritmo deverá ser modificado ligeiramente de forma a incluir este caso: basta para isso modificar as linhas relativas à inicialização das matrizes $\dot{N}$ e $\ddot{N}$ e fazer $\dot{N} = \ddot{N} = 0$.

A vantagem da formação das equações utilizando este método é obvia, uma vez que a solução alternativa consistiria em construir em primeiro lugar a matriz B e depois calcular N através de $N = B^T PB$, ou seja, utilizando multiplicações "à força bruta". De facto, para número realistas de pontos imagem a matriz total B será constituída quase totalmente por zeros, significando que por uma lado iríamos gastar grandes quantidades de memória para armazenar zeros e por outro lado que a maioria do esforço computacional na formação de N seria gasto em multiplicações por zero.

5.3.2 Redução das equações normais

O número total de equações conduzem a um grande sistema de equações com uma estrutura bem definida. Podemos aproveitar esta estrutura para eliminarmos assim um conjunto de variáveis (neste caso as correcções aos pontos) e reduzir assim o tamanho das matrizes que temos para inverter. Depois de encontramos os valores dos parâmetros de correcção das imagens as correcções às coordenadas dos pontos são obtidos

Algoritmo 5.1: Formação das equações normais

Entrada: Lista de pontos
Saída: POE e coordenadas dos pontos
início
  para cada *Ponto j* **faça**
    $\ddot{N}_j = \ddot{P}_j$
    $\ddot{t}_j = -\ddot{P}_j \ddot{f}_j$
  fim

  para cada *Imagem i* **faça**
    $\dot{N}_i = \dot{P}_i$
    $\dot{t}_i = -\dot{P}_i \dot{f}_i$
    para cada *Ponto j* **faça**
      se *Ponto j está na Imagem i* **então**
        calcular $\dot{B}_{ij}$, $\ddot{B}_{ij}$ e f_{ij}
        $\dot{N}_i = \dot{N}_i + \dot{B}_{ij}^\top P_{ij} \dot{B}_{ij}$
        $\dot{t}_i = \dot{t}_i + \dot{B}_{ij}^\top P_{ij} f_{ij}$
        $\ddot{N}_j = \ddot{N}_j + \ddot{B}_{ij}^\top P_{ij} \ddot{B}_{ij}$
        $\ddot{t}_j = \ddot{t}_j + \ddot{B}_{ij}^\top P_{ij} f_{ij}$
        $\bar{N}_{ij} = \dot{B}_{ij}^\top P_{ij} \ddot{B}_{ij}$
      fim
    fim
  fim
fim

por substituição regressiva. De facto podemos tratar as equações normais completas como dois conjuntos de equações:

$$\begin{aligned} \dot{N}\dot{\delta} + \bar{N}\ddot{\delta} &= \dot{t} \\ \bar{N}^T + \ddot{N}\ddot{\delta} &= \ddot{t} \end{aligned}$$

Resolvendo o segundo conjunto de equações em ordem a $\ddot{\delta}$ teremos

$$\ddot{\delta} = \ddot{N}^{-1}(\ddot{t} - \bar{N}^T \dot{\delta})$$

Substituindo no primeiro conjunto de equações e simplificando teremos

$$(\dot{N} - \bar{N}\ddot{N}^{-1}\bar{N}^T)\dot{\delta} = \dot{t} - \bar{N}\ddot{N}^{-1}\ddot{t}$$

Estas equações são denominadas equações normais reduzidas. Note-se que esta solução implica apenas o cálculo da inversa de $\ddot{N}$. Uma vez que $\ddot{N}$ é uma matriz diagonal por blocos, a sua inversa é precisamente a inversa de cada bloco diagonal de tamanho 3×3, que é uma operação fácil de implementar e que requer poucos recursos.

O algoritmo 5.2 implementa este processo de redução (Mikhail, Bethel e McGlone, 2001). A matriz não diagonal $\bar{N}_{ij}$ é zero se a imagem i e o ponto j não aparecerem simultaneamente numa equação de colinearidade, ou seja se o ponto j não estiver imageado na imagem i.

Neste algoritmo, também podemos constatar onde é que as contribuições de cada ponto são subtraídas das equações normais reduzidas. Antes da redução, a matriz $\dot{N}$ é uma matriz diagonal por blocos. Cada bloco corresponde a uma imagem e as dimensões de cada bloco são determinadas pelo número de parâmetros de cada imagem (i.e. 6 para o caso de câmaras matriciais). Se um ponto aparece apenas numa numa única

Algoritmo 5.2: Redução das equações normais

Entrada: Lista de pontos
Saída: POE e coordenadas dos pontos
início
  para cada *Imagem i* **faça**
    para cada *Ponto j* **faça**
      se *Ponto j está na imagem i* **então**
        $\dot{N}_{ii} = \dot{N}_{ii} - \bar{N}_{ij}\ddot{N}_j^{-1}\bar{N}_{ij}^T$
        $\dot{t}_i = \dot{t}_i - \bar{N}_{ij}\ddot{N}_j^{-1}\ddot{t}_j$
        para cada *Imagem k contendo o ponto j* **faça**
          $\dot{N}_{ik} = \dot{N}_{ik} - \bar{N}_{ij}\ddot{N}_j^{-1}\bar{N}_{jk}^T$
        fim
      fim
    fim
  fim
fim

imagem, as suas contribuições são subtraídas apenas da diagonal por blocos correspondente a essa imagem ($\dot{N}_{ii} = \dot{N}_i$). No entanto, se um ponto aparece em ambas as imagens i e k, as suas contribuições são subtraídas do bloco diagonal e também da submatriz $\dot{N}_{ik}$ localizada fora da diagonal. Esta submatriz diferente de zero diagonalmente excentrica muda a estrutura da matriz e afecta directamente o custo comoutacional da solução.

Em fotogrametria aérea, para um bloco corrente de ajustamento por feixe, a matriz das equações normais reduzidas é uma matriz esparsa, o que significa que a maioria dos seus elementos são zeros. É também uma matriz por banda, uma vez que os seus não-zeros estão a uma distância fixa (largura da banda) da diagonal principal. Uma matriz por banda por ser analisada de forma mais eficiente do que uma matriz completa uma vez que os elementos zero podem ser ignorados no tratamento da matriz.

Exercício: Suponhamos que pretendemos fazer a triangulação por feixe de uma cobertura simples composta por apenas 4 imagens e 8 pontos, dos quais 4 são pontos de apoio e os outros 4 são pontos de ligação, conforme indicado no layout da figura 5.1.

As equações de observação relativas a este exemplo são dadas na figura 5.2. Note-se, em primeiro lugar que pelo facto dos pontos 1,2,7 e 8 serem pontos de apoio não estão asssociados a estes pontos quaisquer incógnitas (correcções). Ou seja, este pontos não vão contribuir para a construção das matrizes $\ddot{N}_j$, $\bar{N}_{ij}$, $\dot{t}_i$ e $\ddot{t}_j$. Por outro lado, os pontos 7 e 8 não aparecem nas imagens 1 e 2, e os pontos 1 e 2 não aparecem nas imagens 3 e 4. Consequentemente não têm observações associadas a eles.

Se agora calcularmos as equações normais do ajustamento de acordo com as equações 5.7 teremos as equações 5.8. Nestas condições, a estrutura das equações normais é dada na figura 5.3 a qual se pode escrever em notação matricial na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{13} & \bar{N}_{14} & \bar{N}_{15} & \bar{N}_{16} \\ 0 & \dot{N}_2 & 0 & 0 & \bar{N}_{23} & \bar{N}_{24} & \bar{N}_{25} & \bar{N}_{26} \\ 0 & 0 & \dot{N}_3 & 0 & \bar{N}_{33} & \bar{N}_{34} & \bar{N}_{35} & \bar{N}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{N}_4 & \bar{N}_{33} & \bar{N}_{34} & \bar{N}_{35} & \bar{N}_{36} \\ \bar{N}_{13}^T & \bar{N}_{23}^T & \bar{N}_{33}^T & \bar{N}_{43}^T & \ddot{N}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{14}^T & \bar{N}_{24}^T & \bar{N}_{34}^T & \bar{N}_{44}^T & 0 & \ddot{N}_4 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{15}^T & \bar{N}_{25}^T & \bar{N}_{35}^T & \bar{N}_{45}^T & 0 & 0 & \ddot{N}_5 & \\ \bar{N}_{16}^T & \bar{N}_{26}^T & \bar{N}_{36}^T & \bar{N}_{46}^T & 0 & 0 & 0 & \ddot{N}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \dot{\delta}3 \\ \dot{\delta}4 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{t}_1 \\ \dot{t}_2 \\ \dot{t}_3 \\ \dot{t}_4 \\ \ddot{t}_3 \\ \ddot{t}_4 \\ \ddot{t}_5 \\ \ddot{t}_6 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

onde

- $\dot{N}_i = \sum_{j=1}^{6} \dot{B}_{ij}^T P_{ij} \dot{B}_{ij}$, $i = \overline{1,4}$. Note-se que são observados 6 pontos em cada foto

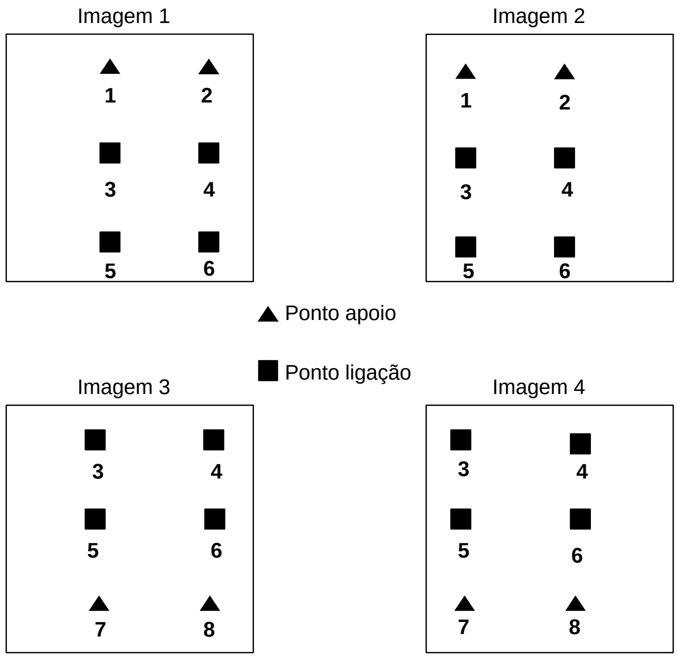


Figura 5.1: Configuração de um exemplo prático: 4 imagens; 4 pontos de apoio; 4 pontos de ligação

- $\ddot{N}_j = \sum_{i=1}^{4} \ddot{B}_{ij}^T P_{ij} \ddot{B}_{ij}$, $j = \overline{3,6}$. Note-se que apenas os pontos 3, 4, 5 e 6 são pontos de ligação.
- $\bar{N}_{ij} = \dot{B}_{ij}^T P_{ij} \ddot{B}_{ij}$, com $i = \overline{1,4}$ e $j = \overline{3,6}$
- $\dot{t}_i = \sum_{j=3}^{6} \dot{B}_{ij}^T P_{ij} f_{ij}$, $i = \overline{1,4}$.
- $\ddot{t}_j = \sum_{i=1}^{4} \ddot{B}_{ij}^T P_{ij} f_{ij}$, $j = \overline{3,6}$.

Será também interessante, calcular, para este exemplo, as equações normais reduzidas aplicando o algoritmo 5.2.

Finalmente, note-se que os algoritmos de formação e redução apresentados anteriormente foram delineados tendo em conta a claridade de exposição e não necessariamente a eficiência: por exemplo as fases de formação e redução podem ser combinadas numa só. Possivelmente existem também intercâmbios entre a quantidade de memória e o volume de cálculo necessários, dependendo por exemplo se as submatrizes $\bar{N}$ são calculadas uma única vez e depois armazenadas ou se são recalculadas cada vez que forem necessárias. Dentro dos algoritmos a ordem dos ciclos pode também ser trocada, dependendo se existem mais pontos ou mais fotos. Além disso, a utilização dos parâmetros de auto-calibração, constrangimentos geométricos, ou informação posicional e navigacional altera imediatamente a estrutura das equações normais, a formação das equações e o procedimento de obtenção da solução.

5.4 Aproximações iniciais

Como no ajustamento se utilizaram as equações de colinearidade linearizadas é necessário conhecer os valores para as aproximações iniciais das incógnitas. Além disso, para que a solução convirja, as aproximações iniciais devem estarrazoavelmente próximas dos valores correctos das incógnitas. Apesar de existirem vários métodos para a obtenção das aproximações iniciais, o ajustamento por fiada é mais utilizado.

		foto1						foto2						foto3						foto4						pt3			pt4			pt5			pt6		
		dw1	dφ	dk1	dxc1	dyc1	dzc1	dw2	dφ2	dk2	dxc1	dyc2	dzc2	dw3	dφ3	dk3	dxc3	dyc3	dzc3	dw4	dφ4	dk4	dxc4	dyc4	dzc4	dx3	dy3	dz3	dx4	dy4	dz4	dx5	dy5	dz5	dx6	dy6	dz6
		b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt1	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt2	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt3	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0
	pt4	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0
		b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0
	pt5	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0
		b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16
foto1	pt6	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26
		0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt1	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt2	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt3	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0
	pt4	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0
	pt5	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16
foto2	pt6	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0
	pt4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0
	pt5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16
	pt6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
foto3	pt8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0	0	0	0
	pt4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16	0	0	0
	pt5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b14	b15	b16
	pt6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b24	b25	b26
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	pt7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b11	b12	b13	-b14	-b15	-b16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
foto4	pt8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b12	b22	b23	-b24	-b25	-b26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 5.2: Estrutura da matriz de observações do ajustamento por feixe do layout mostrado na figura

O primeiro passo é efectuar uma orientação relativa analítica para cada estereopar do bloco. Os resíduos das coordenadas fotográficas devem ser inspeccionados nesta altura como uma verificação inicial das medições. De seguida, os modelos relativamente orientados são ligados para formar fiadas. Os resíduos obtidos neste passo podem também fornecer um controlo de qualidade das medições das coordenadas fotográficas e da identificação dos pontos. Depois de todos os modelos de uma dada fiada terem sido formados e validados, cada fiada é ajustada individualmente aos pontos de controlo do terreno localizados dentro de cada faixa. Este ajustamento ao controlo do terreno pode ser efectuado por uma transformação tridimensional de coordenadas conformes ou por uma transformação polinomial tridimensional. Os resíduos desta etapa fornecem uma verificação das coordenadas de controlo do terreno, bem como a identificação do ponto.

Nesta fase, as coordenadas terreno terão sido calculadas para todos os pontos do bloco fotográfico. Por isso, podemos efectuar uma verificação adicional para validar a identificação dos pontos de ligação entre as fiadas. Se a identificação dos pontos de ligação for consistente, as suas coordenadas, tal como determinadas em fiadas adjacentes, deverão concordar dentro de uma pequena tolerância. Assumindo que nesta fase é tudo consistente, as coordenadas terreno resultantes podem ser utilizadas como aproximações iniciais para o ajustamento do feixe.

As aproximações para os parâmetros de orientação externa também podem ser obtidas directamente a partir do ajustamento da fiada, no caso do ajustamento ter sido efectuado por uma transformação de coordenadas conforme tridimensional. Nesse caso, uma vez que os centros de perspectiva (posições da câmara) são incluídos quando os modelos adjacentes são ligados, as suas coordenadas no espaço-objeto estarão disponíveis após o ajustamento final aos pontos de controlo terreno. Assumindo a fotografia vertical, podemos

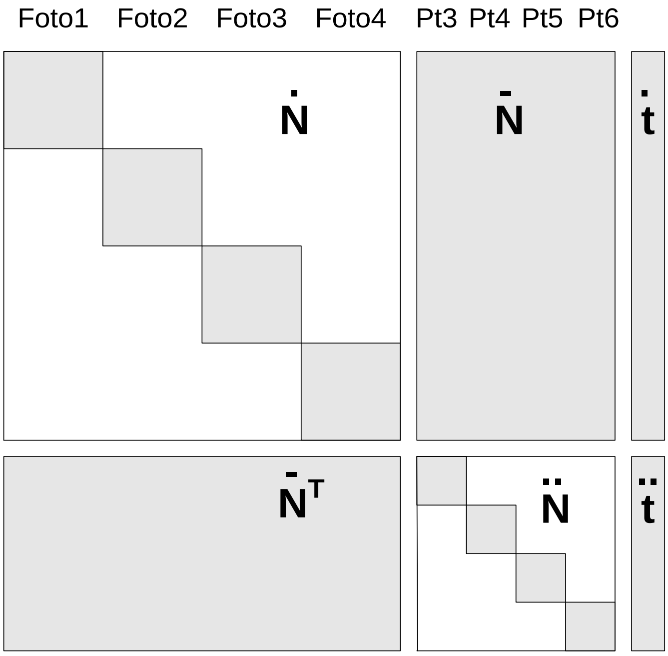


Figura 5.3: Estrutura das equações normais

ser utilizados como aproximações para ω e ϕ o valor zero. As aproximações para κ podem ser obtidas diretamente a partir da transformação final das coordenadas conformes tridimensionais para o controlo do terreno, que contém um ângulo κ compatível. Se for realizado um ajuste polinomial da fiada, os centros de perspectiva não são incluídos no ajuste. Nesse caso, após a conclusão do ajustamento polinomial, o problema da ressecção espacial pode ser resolvido para cada fotografia. Nestes cálculos, as coordenadas terreno obtidas para os pontos de passagem no ajustamento polinomial são utilizadas como coordenadas de controlo.

5.5 Planeamento e apoio de coberturas aero-fotogramétricas

5.5.1 Câmaras analógicas

A principal tarefa dos levantamentos aero-fotogramétricos consiste no registo tridimensional da superfície do terreno assim como dos objectos naturais e artificais que ocorrem sobre esta. É um requisito da estereo-fotogrametria que cada ponto no terreno seja imageado em pelo menos duas fotografias métricas. Este requisito é satisfeito quando duas imagens numa fiada se sobrepoêm em 50%. Note-se que em mono-restituição fotogramétrica é suficiente que cada ponto terreno apareça numa única imagem.

Consideraremos, em primeiro lugar, câmaras métricas com formato de imagem convencional (quadrado). A área a ser mapeada é imageada numa sequência de fotografias formando fiadas paralelas que em conjunto criam um bloco de fotografias. Para um terreno plano as fórmulas (ou relacções geométricas) envolvidas no planeamento de voo são ilustradas na figura onde se designa por:

- A a distância entre fiadas
- B a base aérea (entre duas imagens consecutivas)
- c a distância focal

- s o comprimento do lado da fotografia
- h a altura de voo acima do terreno
- Z a altitude do terreno
- v a velocidade da aeronave sobre o terreno
- L o comprimento da fiada
- Q a largura do bloco

Nestas condições, considerando o formato clássico da fotografia aérea, podemos deduzir facilmente as fórmulas do planeamento de voo dadas pela tabela 5.1.

Denominador da escala fotográfica	$m_b = h/c$
Lado da foto no terreno	$S = s \times m_b$
Base fotográfica	$b = B/m_b$
Altura de voo acima do terreno	$h = c\, m_b$
Altitude de voo	$Z_0 = Z + h$
Sobreposição frontal(%)	$l = \frac{S-B}{S} 100 = (1 - \frac{B}{S})100$
Sobreposição lateral	$q = \frac{S-A}{S} 100 = (1 - \frac{A}{S})100$
Área da fotografia no terreno	$F_b = S^2 = s^2 m_b^2$
Comprimento da base (para l%)	$B = S(1 - \frac{l}{100})$
Distância entre fiadas (para q%)	$A = S(1 - \frac{q}{100})$
Número de modelos numa fiada	$n_m = \lfloor \frac{L}{B} + 1 \rfloor$
Número de fotografias numa fiada	$n_b = n_m + 1$
Número de fiadas num bloco	$n_s = \lfloor \frac{Q}{A} + 1 \rfloor$
Área dum modelo estereoscópico	$F_m = (S - B)S$
Área dum modelo no bloco	$F_n = AB$
Intervalo de tempo entre duas fotografias	$\Delta T[s] = \frac{B[m]}{v[m/s]} \geq 2.0$

Tabela 5.1: Fórmulas de voo

Note-se que para a dedução destas fórmulas tivemos em conta a configuração da geometria da cobertura definida na figura 5.4. Atendendo a esta geometria podemos tecer alguns comentários sobre as fórmulas anteriores:

1. Cada par de imagens com sobreposição deverá corresponder ao caso normal da estereo-fotogrametria. Na pratica , este "caso normal"nunca é conseguido nos levantamentos aero-fotogramétricos, e portanto será necessário lidar com o "caso quase-normal". Assumindo que não existem auxiliares de navegação e que a câmara não dispõe de estabilizadores, são admitidos os seguintes valores:
   (a) rotação sobre o eixo longitudinal do avião (ângulo de rolamento) ±5 gon (4.5)
   (b) rotação sobre o eixo transversão do avião (ângulo de cabeceio): ±3 gon (2.7)
   (c) desvio do rumo nominal (ângulo yaw): ±15 gon (13.5)
   (d) variação na altura de voo: ±2%
   (e) desvio da linha de voo:±200m

2. Mesmo para uma linha de voo ideal, uma sobreposição frontal de $l = 50\%$ e uma sobreposição lateral de $q = 0\%$ não seria suficiente. De facto na aero-triangulação de um bloco de fotografias, as fiadas contíguas e os estereo-modelos dentro da fiada deverão sobrepor-se duma determinada quantidade. Por esta razão e também para considerar os casos das configurações de imageamento não ideais é comum utilizar-se uma sobreposição frontal de $l = 60\%$ e $q \in [25\%, 30\%]$. No caso de se utilizar mono-restituição fotogramétrica as sobreposições frontal e lateral são normalmente $l, q \in [25\%, 30\%]$.

3. As fórmulas anteriores assumem que o terreno é plano. Nos casos em que existem grandes diferenças de cotas é recomendado que as sobreposições frontal e lateral sejam calculadas para as secções de terreno mais altas. Desta forma as sobreposições nas secções de terreno mais baixas serão maiores. O planeamento de voo em zonas montanhosas exige assim um conhecimento adequado da variação de cotas.

4. O altura de voo e a escala da foto depende das especificações pretendidas para a resolução no terreno e para os produtos finais fotogrametricos.

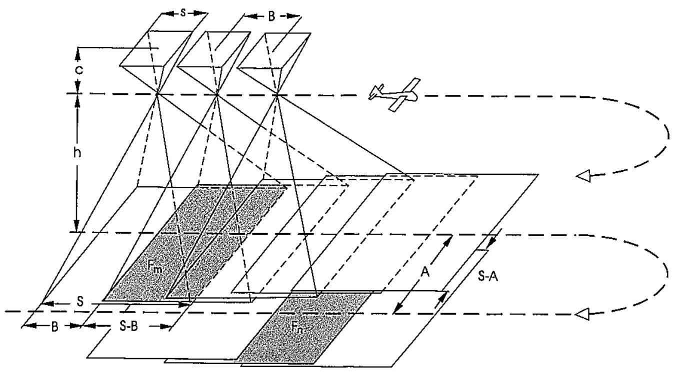


Figura 5.4: Planeamento do voo

Exercício 5.23
Pretende-se averiguar qual direcção de voo que minimiza o número total de fotografias para uma área de dimensões 20Km na direcção Norte-Sul e 5km na direcção Oeste-Este. Considere os seguintes elementos:

- Escala da fotografia = 1:7000
- Sobreposição longitudinal = 60%
- Sobreposição transversal = 40%
- Lado da fotografia = 23 cm

5.5.2 Câmaras digitais

As fórmulas para o planeamento de voo com câmaras digitais resultam duma adaptação das fórmulas anteriores tendo em conta o formato rectangular do sensor e do eventual formato rectangular do pixel. Assim se designarmos por:

- A a distância entre fiadas
- B a base aérea (entre duas imagens consecutivas)

- c a distância focal
- S_x a largura da imagem em mm (lado maior)
- S_y a altura da imagem em mm (lado menor)
- p_x o número de pixeis do lado maior (colunas)
- p_y o número de pixeis do lado menor (linhas)
- H a altura de voo acima do terreno
- Z a altitude do terreno
- v a velocidade da aeronave sobre o terreno
- C o comprimento da fiada
- D a largura do bloco

teremos:

- Tamanho do pixel no plano imagem: $dx = \frac{S_x}{P_x}$, $dy = \frac{S_y}{P_y}$
- Resolução do pixel no terreno: $GSD = d_x \times \frac{H}{c}$
- Pegada da imagem: $G_x = S_y \times \frac{H}{c}, G_y = S_y \times \frac{H}{f}$,
- Distância entre imagens (ou base aérea): $B = G_y(1 - \frac{S_f}{100})$,
- Distância entre fiadas: $A = G_x(1 - \frac{S_l}{100})$,
- Número de fiadas: $n_s = \lfloor \frac{D}{A} \rfloor$,
- Número de fotografias numa fiada: $n_f = \lfloor \frac{L}{B} + 1 \rfloor + 1$

5.6 Avaliação do ajustamento

Depois de termos efectuado o ajustamento por feixe, temos de avaliar o seu resultado de forma a assegurar que as especificações e requisitos do projecto (que constam no caderno de encargos) e os resultados obtidos são válidos Isto é, que não estão contaminados por medições ou suposições erradas. A avaliação começa logo na fase de planeamento, com a verificação da conveniência do bloco do projecto através da experiência prévia ou através da simulação. Depois de o bloco ter sido ajustado, um primeiro passo consiste na avaliação qualitativa, na qual o operador examina representaçãoes gráficas do output do ajustamento a fim de detectar tendências globais e inputs claramente errados. Um segundo passo, consiste em utilizar técnicas de análise estatística para protecção de más observações e para quantificar a qualidade do ajustamento.

Referências

Mikhail, E.M., J.S. Bethel e J.C. McGlone (2001). *Introduction to modern photogrammetry*. vol. 1. Wiley. ISBN: 9780471309246.

Capítulo 6

Geração de Modelos Digitais de Superfície e Ortomosaicos

Conteúdo

6.1 Introdução

Os pares de imagens estereoscópicas, capturados a partir de pontos de vista ligeiramente diferentes, fornecem informações valiosas para a reconstrução tridimensional de superfícies. Ao explorar as disparidades geométricas entre pontos correspondentes nessas imagens, as técnicas de reconstrução de superfície podem gerar representações detalhadas e precisas de objetos e cenas. Neste capítulo, exploramos o processo de reconstrução de superfícies a partir de pares de imagens estereoscópicas em pares, examinando os princípios, métodos e aplicações dessa abordagem.

6.1.1 Princípios de visão computacional estereoscópica

A visão estereoscópica baseia-se na capacidade do sistema visual humano de perceber profundidade comparando as disparidades entre as imagens capturadas por cada olho. Da mesma forma, em imagens estereoscópicas em pares, as diferenças de perspectiva entre as imagens esquerda e direita permitem a estimativa de informações de profundidade. Os princípios-chave da visão computacional incluem:

- Geometria Epipolar: Descrevendo a relação entre pontos correspondentes em imagens estereoscópicas e a geometria das posições das câmaras.
- Mapeamento de Disparidade: Medindo o deslocamento horizontal de pontos correspondentes entre imagens estereoscópicas para inferir informações de profundidade.
- Correspondência Estereoscópica: Identificação de pontos ou características correspondentes em imagens estereoscópicas por meio de técnicas como correlação, correspondência de características ou métodos baseados em otimização.

6.1.2 Pipeline da reconstrução estereoscópica

O processo de reconstrução de superfícies a partir de imagens estereoscópicas em pares geralmente envolve várias etapas:

- Retificação da imagem: Alinhamento das imagens estereoscópicas a um quadro de referência comum (por exemplo em geometria epipolar) para simplificar a correspondência estereoscópica e a estimativa de disparidade.
- Estimativa de Disparidade: Cálculo das disparidades ponto a ponto entre pontos correspondentes em imagens estereoscópicas usando métodos como correspondência por bloco, correspondência semi-global ou abordagens baseadas em aprendizagem profunda.
- Geração de Mapa de Profundidade: Conversão de disparidades de pixel em valores de profundidade usando a relação geométrica entre as câmaras e a função de mapeamento de disparidade-profundidade.
- Geração de Nuvem de Pontos: Reconstrução das coordenadas tridimensionais dos pontos de superfície usando as informações de profundidade obtidas pela correspondência estereoscópica.

6.2 Correlação de imagens

Os algoritmos de correlação resolvem a tarefa de encontrar os segmentos *patches* correspondentes em duas imagens tiradas a partir de duas posições diferentes da câmara. Assim, é costume falar-se de correspondência de imagem *image matching* e também de máxima similaridade ou ainda melhor concordância entre dois segmentos (i.e extratos) de imagem. Uma das duas imagens pode ser inclusivamente uma figura geométrica, o que neste caso o termo reconhecimento de padrões *pattern recognition* é muito apropriado.

6.2.1 Caso 1D

Nesta secção iremos explicar um algoritmo de correlação no contexto do reconhecimento de padrões. Neste caso a figura geométrica será uma cruz, que poderá existir na forma duma imagem artificialmente gerada, e é designada por imagem de referência ou *template*. A segunda imagem será designada por imagem de procura ou ainda janela de procura.

Coeficiente de correlação como medida de semelhança

Consideremos o problema ilustrado na figura 6.1. Pretendemos encontrar a posição da template na janela de procura utilizando a correlação. Uma medida para o cálculo da correlação ou similaridade é o coeficiente de correlação r, dado por

$$r = \frac{\sigma_{rs}}{\sigma_r \sigma_s} = \frac{\sum (g_r - \bar{g}_r)(g_s - \bar{g}_s)}{\sqrt{\sum (g_r - \bar{g}_r)^2 \sum (g_s - \bar{g}_s)^2}} \tag{6.1}$$

onde $\bar{g}_r$ e $\bar{g}_s$ são as médias aritméticas dos níveis de cinzento da template e os da correspondente secção da janela de procura, respetivamente. O coeficiente r será então avaliado para todas as posições possíveis da template na janela de procura e a posição com o maior coeficiente de correlação r é a posição desejada.

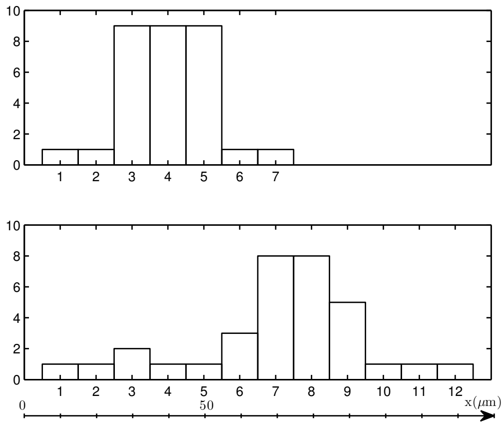


Figura 6.1: Template e janela de procura no caso unidimensional

Utilizando este conceito na figura 6.1 teremos para a 1^a posição ($i = 1$) a qual é calculada com $j = 1, \ldots, 7$:

$$r = \frac{\sum (g_r - 4.43)(g_s - 2.43)}{\sqrt{\sum (g_r - 4.43)^2 \sum (g_s - 2.43)^2}} = -0.40$$

Calculando o coeficiente de correlação para todas as posições possíveis obtínhamos a tabela:

Posição (i)	1	2	3	4	5	6
k	1–7	2–8	3–9	4–10	5–11	6–12
r	-0.4	-0.51	0.0	0.73	0.92	0.24
x(μm)	40	50	60	70	80	90

Para gerarmos esta tabela podemos utilizar o seguinte código:

```
gr=[1 1 9 9 9 1 1];
gs=[1 1 2 1 1 3 8 8 5 1 1 1];
% 1. Definição da função do coeficiente de correlação
%    xr=x-mean(x);yr=y-mean(y)
fnormxcor=@(xr,yr) dot(xr,yr)/(norm(xr,2)*norm(yr,2));
twidth=numel(gr); % template width
mposicoes=numel(gs)-twidth+1;
r=zeros(mposicoes,1);
grr=gr-mean(gr);   % ao vector gr é retirada a média
for i=1:mposicoes
```

```
    r(1,i)=fnormxcor(grr,gs(i:i+twidth−1)−mean(gs(i:i+twidth−1)));
end
```

Analisando a tabela a posição que nos dá o maior valor de correlação é a posição 5 e que corresponde à coordenada $x = 80\mu m$ (coordenada do centro da template na janela de procura $j = i+3$). Note-se que os valores de r nas posições vizinhas (i.e $i = 4,6$) indiciam que o valor ótimo deve ser atingido antes de 80. Portanto como segundo passo iremos fazer um ajustamento na região do subpixel.

Correlação na região do subpixel

Para termos um ajustamento na região do subpixel é necessário considerar:

- a construção duma função de correlação contínua na vizinhança do maior valor de correlação encontrado para as posições inteiras.
- a determinação do máximo desta função de correlação através dos zeros da $1a$ derivada.

Assim considerando as posições $i = 4,5,6$ iremos ajustar um polinómio de segunda ordem aos dados, ou seja:

$$p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

onde x são as coordenadas imagem e $p(x) = r$ o valor do coeficiente de correlação para essa posição. O código matlab que permite determinar os coeficientes do polinómio $p(x)$

$$a_i = \begin{pmatrix} -0.004 & 0.672 & -24.96 \end{pmatrix}$$

é:

```
% Vector das coordenadas
x=10:10:10+(numel(gs)−1)*10;
% Posição de máxima similaridade
[¬,imax]=max(r);
posi=[imax−1,imax,imax+1]; % posição i
posj=posi+3;               % posição j
% Calculo dos coeficientes do polinómio utilizando r arredondado às centésimas
p=polyfit(x(posj),roundn(r(posi),−2),2);
% Gráfico da função
f = polyval(p,x(posj(1)):0.01:x(posj(end)));
figure, plot(x(posj),roundn(r(posi),−2),'ko',x(posj(1)):0.01:x(posj(end)),f,'r−')
```

O gráfico desta função é dado por

Tarefa 1: Indique um método alternativo que lhe permita calcular os três coeficientes a_i do polinómio, supondo que conhece $(x_j, p(x_j))$ para $j = 1,\ldots,n$.

Tarefa 2: Indique um método numérico para determinar o máximo da função representada na figura 6.2.

Correlação na região do subpixel com mínimos quadrados. Uma outra alternativa para o problema de correlação na região do subpixel consiste em utilizar o método dos mínimos quadrados para encontrar o ajustamento ótimo. Neste método, que é designado de correspondência por mínimos quadrados (ou *Least Squares Matching - LSM*), começa-se por uma aproximação inicial para a posição de máxima correlação (utilizando por exemplo o método apresentado na secção 6.2.1). Se depois deste ajustamento aproximado a posição da template na janela de procura for definida no mesmo sistema de coordenadas da janela de procura então a translação (b) que é necessária para a template se situar na posição de correlação máxima é muito pequena, habitualmente inferior a um pixel. Nestas condições podemos escrever a relação entre os dois níveis de cinzento:

$$g_s(x) = g_r(x+b) \tag{6.2}$$

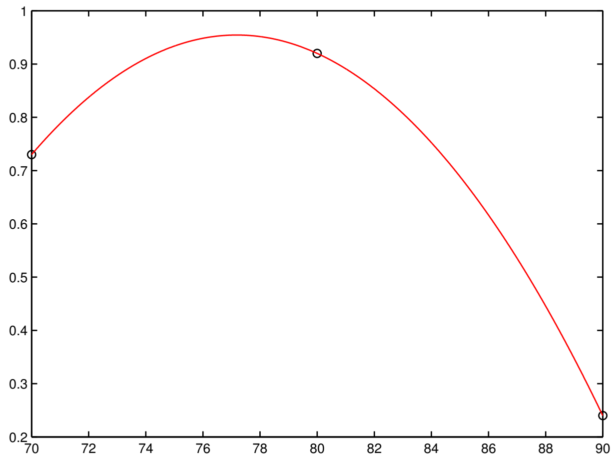


Figura 6.2: Polinómio de correlação

Consideremos também que g_s contem uma componente aleatória v. Linearizando a equação anterior e atendendo a que b é pequeno teremos:

$$v = \frac{\partial g_r(x)}{\partial x} b - \big(g_s(x) - g_r(x)\big) \tag{6.3}$$

onde:

- $(g_r(x)\,,\, g_s(x))$ são os correspondentes níveis de cinzento nas duas imagens, sendo que o seu número é determinado pelo tamanho da template.
- $\partial g_r(x)/\partial x$ é o declive do perfil do nível de cinzento da template numa dada posição, isto é

$$\partial g_r(x)\big/\partial x = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{dg}{dx} \quad i = 2, \ldots, n-1$$

  Para o primeiro pixel fazemos ($dg = g_2 - g_1$, $dx = \Delta x$) e para o último pixel fazemos ($dg = g_n - g_{n-1}$, $dx = \Delta x$), onde Δx é a dimensão do pixel.

Tendo em conta a equação 6.3, que se pode escrever na forma matricial

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \tag{6.4}$$

o ajustamento de mínimos quadrados é dado por

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{v}_{\mathbf{min}} = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l})^\top (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}) = \hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{l}^\top \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}^\top \mathbf{l}$$

cujo mínimo é dado por

$$\frac{\partial \mathbf{v}^\top \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = 2\hat{\mathbf{x}}\mathbf{A}^\top \mathbf{A} - 2\mathbf{l}^\top \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right)^{-\mathbf{1}} \mathbf{A}^\top \mathbf{l}$$

A exactidão da posição desconhecida b pode ser obtida depois de calcularmos o desvio padrão da unidade de peso σ_0 com os elementos do vector $\mathbf{v}$. Assim, o desvio padrão σ_b do vector translação b desconhecido é obtido a partir de:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A}), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-\mathbf{1}}, \quad \sigma_b = \sqrt{q_{bb}}\,\sigma_0$$

Note-se que a possibilidade do cálculo do erro do vector translação é uma grande vantagem da correspondência por mínimos quadrados.

Aplicando o que foi exposto anteriormente ao nosso caso teremos então que

$$\partial g_r(x) \big/ \partial x = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 & 0 & -0.4 & -0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

O código Matlab que permite calcular estas derivadas parciais é

```
% calculo das diferenças centrais da template
h=x(2)-x(1);
diffc_gr=zeros(1,numel(gr));
diffc_gr(1)=(gr(2)-gr(1))/h;
diffc_gr(end)=(gr(end)-gr(end-1))/h;
diffc_gr(2:end-1)=(gr(3:1:end)-gr(1:1:end-2))/(2*h);
```

Nestas condições o sistema de equações de observação é:

$$\mathbf{v} = (0.0, 0.4, 0.4, 0.0, -0.4, -0.4, 0)^\top \mathbf{b} - (0, 2, -1, -1, -4, 0, 0)^\top$$

A solução de mínimos será $b = 3.1$ e portanto $x = 76.9\mu m$. Calculando o vector **v** resíduos a atendendo a que

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{v^\top v}}{n-u}$$

onde n é o número de observações e u o número de incógnitas teremos que $\sigma_0 = 1.62$ níveis de cinzento e $\sigma_b = \sqrt{1/0.64}\sigma_0$, ou seja, $\pm 2.0\mu m$.

No entanto, a imagem de referência e a imagem de procura diferem frequentemente entre si, não apenas duma pequena diferença no seu posicionamento mas também dos seus níveis de cinzento. Nestas condições é aconselhável introduzir no nível de cinzento g_r um parâmetro c relativo ao ajustamento do contraste e um parâmetro d relativo ao ajustamento do brilho. Assim a equação 6.5 virá agora:

$$g_s(x) = c\, g_r(x+b) + d \tag{6.5}$$

Esta equação pode ser linearizada e reorganizada na forma de equações de correção num ajustamento pleo método de equações de observação indirectas, cujas incógnitas serão os três parâmetros de ajustamento b, c, d.

Tarefa 3: Linearize a equação 6.5, repita os cálculos anteriores e determine o valor dos parâmetros b, c, d. A determinação simultânea da posição na região do subpixel e dos ajustamentos do contraste e do brilho nem sempre é recomendada, pois pode prejudicar seriamente a convergência, especialmente com uma pequena janela de correlação e níveis de cinzento muito esbatidos. Nestes casos, antes do LSM devem-se efectuar os ajustamentos do contraste e do brilho devem e a correlação subsequente na região do subpixel deve ser feita utilizando a Equação 6.3.

6.2.2 Caso 2D

A formulação para a correlação LSM na região do subpixel pode ser generalizada de forma simples para o caso da correlação bidimensional. Neste caso, o processo é limitado às duas translações b_x e b_y. Os ajustes de contraste e brilho para as duas regiões da imagem a serem correlacionadas são, portanto, abandonados. Seguindo o exemplo da Equação 6.3, as equações de correção para as duas incógnitas b_x e b_y serão:

$$v = \left(\frac{\partial g_r}{\partial x}\right)_{(x,y)} b_x + \left(\frac{\partial g_s}{\partial x}\right)_{(x,y)} b_y - \big(g_s(x,y) - g_r(x,y)\big) \tag{6.6}$$

Partindo da equação anterior, obtém-se a matriz de equações normais para a correlação bidimensional seguinte:

$$\begin{pmatrix} \sum\left(\frac{\partial g_r}{\partial x}\right)^2 & \sum\left(\frac{\partial g_r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial g_s}{\partial y}\right) \\ \sum\left(\frac{\partial g_r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial g_s}{\partial y}\right) & \sum\left(\frac{\partial g_s}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Nesta matriz as somas incidem sobre todos os pixels da janela de correlação específica. Por outro lado, a equação é a base do que é conhecido como um operador de interesse (*interest operator*) e da correspondência baseada em features (*feature-based matching*).

6.2.3 Conclusão

A correlação de imagens na região do subpixel é necessária para aplicações fotogramétricas requerendo grande exactidão. No entanto, em Fotogrametria Digital existem muitos problemas associados à correspondência de imagens:

- Problemas radiométricos: resolução, reflectância, iluminação, ruído do processamento laboratorial, ruído da câmara digital.
- Problemas geométricos: deslocamento do relevo e áreas oclusas, deformação projectiva, variação de escala
- Problemas de textura: superfície sem características, textura repetitiva, níveis ambíguos como o topo de uma árvore e o chão por baixo, objectos finos.

Até à data, nenhum algoritmo de correspondência tem capacidade para ultrapassar as dificuldades de correspondência acima referidas. Cada algoritmo pode funcionar e dar bons resultados em algumas áreas, mas, em geral, há falta de algoritmos adaptáveis. Os resultados da correspondência não dependem principalmente do algoritmo de correspondência principal, mas são impostos pelas várias estratégias que estão a ser utilizadas para obter boas aproximações, para detectar e eliminar as correspondências erradas, mesmo em áreas difíceis.

6.3 Geração de ortoimagens e ortomosaicos

6.3.1 Introdução

Uma imagem representa uma vista perspectiva do espaço objecto. Consequentemente, o topo e base dos objectos serão projectado para posições diferentes na fotografia (este fenómeno é conhecido como deslocamento devido ao relevo). Além do deslocamento devido ao relevo uma imagem perspectiva não tem uma escala uniforme. O processo de ortorectificação visa a geração de uma ortofoto com escala uniforme e sem deslocamento dos objectos devido ao relevo. Consequentemente, uma ortofoto pode ser utilizada como um mapa planimétrico.

6.3.2 Rectificação diferencial

A rectificação diferencial é o método mais comummente utilizado na geração de uma ortofoto. É necessário:

- Uma imagem e um MDS cobrindo a mesma área,
- Os parâmetros de orientação externa da imagem, isto é o vector posição (três parâmetros por imagem) e o vector orientação/atitude (três parâmetros por imagem) da câmara no instante de exposição,
- A geometria interna da câmara (coordenadas do ponto principal, distância focal do sistema de lentes da câmara, e parâmetros de distorção) como os estimados do procedimento de calibração.

Existem duas técnicas de retificação diferencial: projeção directa e projeção inversa. Na projeção directa os pixéis da imagem são projectados no terreno utilizando as equações de colinearidade. Na projeção inversa, a mais utilizada na prática, cada pixel da ortoimagem é projectado na imagem utilizando o MDT (ou MDS) e as equações de colinearidade. Assim, o objectivo do procedimento de rectificação diferencial pela projeção indireta consiste em atribuir valores de cinzento da imagem a cada célula do DSM. Depois da rectificação, ambos os valores das altitudes e dos níveis cinzento/cor ficarão registado na mesma localização do MDS. Para determinar o valor de cinzento/cor, as coordenadas 3D (Xi,Yi,Zi) de cada célula do DSM são transformadas no domínio da imagem utilizando as equações de colinearidade. Este processo é representado na figura 6.3.

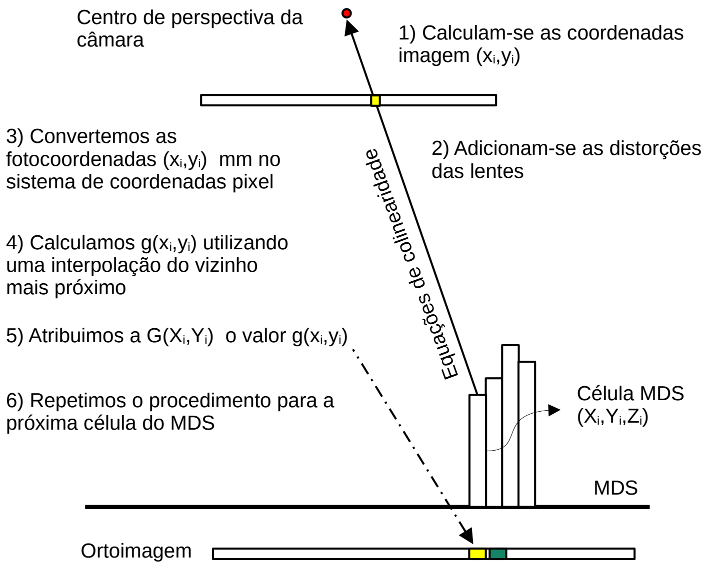


Figura 6.3: Geração duma ortoimagem utilizando a projecção inversa.

6.3.3 Procedimento

É dada uma grelha uniforme (MDS) sobre o plano do ortofoto (datum)

1. Para cada elemento da grelha (Xi,Yi,Zi) do DSM, e utilizando os POE e POI juntamente com as equações de colinearidade, determina-se o ponto imagem correspondente (xi,yi),

2. Uma vez que iremos utilizar as equações de colinearidade normais, as distorções radiais e outras distorções deverão ser adicionadas às coordenadas imagem calculadas (xi,yi).

3. Convertem-se as coordenadas em mm (xi,yi) do sistema de coordenadas fotográfico para coordenadas pixeis do sistema de coordenadas imagem com origem no canto superior esquerdo.

4. Determina-se g(x,y) utilizando uma das técnicas de reamostragem (utiliza-se a interpolação bilinear). Se o ponto estiver fora do domínio da imagem atribui-se a cor branca ou preta para este ponto,

5. Atribui-se o valor de cinzento interpolado da imagem de forma ao ponto do ortofoto, G(x,y)=g(x,y),

6. Repetem-se os passos anteriores para todos os pontos do plano do ortofoto.

6.3.4 Mosaicagem: geração de ortomosaicos

Os projectos de ortofotografia por fotografia aérea requerem a retificação de várias imagens de origem, que são depois reunidas. Este processo, que é conhecido como *mosaicagem*, envolve vários passos:

- Geração de linhas de costura/junção (*seamlines*)
- Correspondência de cores
- Alisamento (*Feathering*) e esbatimento (*dodging*)

As linhas de junção num ortomosaico definem as regiões onde as orto-imagens são unidas. A geração das linhas de junção pode ser efectuada automática ou manualmente. O objetivo é fazer um mosaico das imagens em locais onde elas são muito semelhantes. A colocação manual da linha de costura pode ser feita preferencialmente ao longo das linhas centrais das estradas. Se as ortoimagens forem reprojectadas num modelo de superfície que não inclua os edifícios, estes terão deslocamentos de relevo não corrigidos, e a colocação de uma linha de costura através de um edifício criará uma má correspondência.

Existem vários métodos para colocar as linhas de costura/junção automaticamente. Um método consiste em subtrair as imagens e colocar as linhas ao longo de um traço de menor custo, em que o custo é a diferença entre as duas imagens. Uma abordagem mais simples coloca as linhas de costura ao longo do centro da sobreposição (ver 6.4).

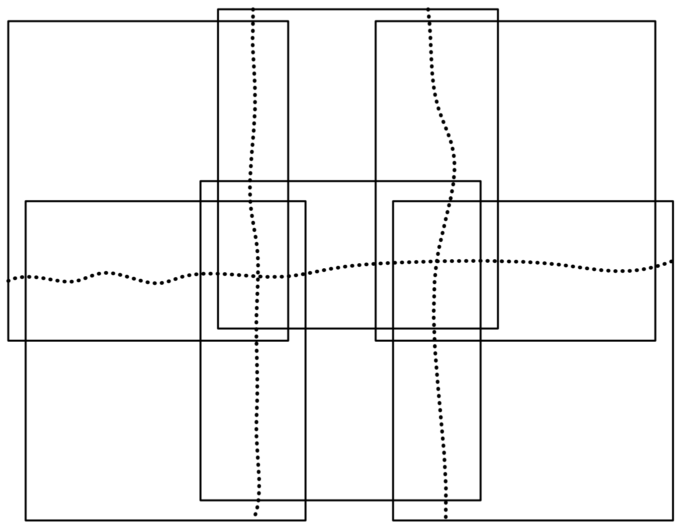


Figura 6.4: Exemplo da colocação de linhas de costura/junção em seis ortoimagens.

As imagens em mosaico devem ter as mesmas características de cor perto das linhas de junção. Se a cor ou o brilho das imagens forem muito diferentes, o resultado do mosaico será muito mau e a colocação das linhas de costura será visível. Existem vários truques que podem ser utilizados para ocultar as linhas de junção. As técnicas de correspondência de cores e esbatimento (tentam remover as diferenças radiométricas nas imagens, analisando e comparando as secções sobrepostas. O "Feathering"tenta ocultar a diferença restante fazendo um corte suave que desaparece lentamente de uma imagem para a outra.

Capítulo 7

Fotogrametria digital com drones

Conteúdo

7.1 Introdução

Um Sistema Aéreo Não Tripulado (SANT) é definido como um veículo (ou robô) aéreo que utiliza as forças aerodinâmicas para gerar sustentação, pode voar autonomamente ou ser pilotado remotamente através duma estação de controlo e de um sistema de comunicação e não transporta nenhum operador humano. Apesar dos UAS serem conhecidos sob vários nomes e acrónimos diferentes, os termos Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT) e drone são os mais utilizados. O termo UAS foi adotado pelo Departamento de Defesa dos EUA (DOD) e pela Autoridade de Aviação Civil (CAA) do Reino Unido. A Organização Internacional da Aviação Civil (ICAO) introduziu o conceito de Sistema Aéreo Remotamente Pilotado (RPAS *Remotely Piloted Aircraft Sytem*) como sendo uma classe específica de UAS. Dado que um drone é um sistema de sistemas, ou seja, um conjunto de tecnologias complementares reunidas para cumprir uma tarefa específica (Colomina e Molina, 2014), achamos que o termo SANT é o mais adequado para descrever esta tecnologia. Neste contexto, podemos identificar os principais componentes dum SANT: o Veículo Aéreo Não Tripolado (VANT), a estação terrestre de controlo (vulgarmente conhecida por controladora) e o sistema de comunicação de dados (*data-link*).

De modo geral, os drones, estiveram sempre associados a actividades militares. Recentemente, a comunidade civil têm vindo a utilizá-los num grande leque de aplicações científicas e não-científicas. Para além do factor económico, os SANT abrem um conjunto do novas possibilidades. Em muitos casos e devido à sua alta mobilidade e baixo custo podem introduzir a componente tempo em projectos onde as alterações que ocorrem no objecto são consideravelmente rápidas e onde o recurso a plataformas tradicionais seria incomportável do ponto de vista económico. Além disso nem todos os projectos precisam da elevada exactidão e precisão decorrente de uma plataforma aérea tradicional, apesar de, em determinadas situações, se poderem atingir níveis de exactidão semelhantes à dos voos tradicionais (Turner, Lucieer e Watson, 2012). Uma das principais desvantagens existentes actualmente em Portugal na utilização dos SANTS para actividades fotogramétricas reside na falta de legislação que regulamente o sua utilização. No entanto, o seu uso tem crescido rapidamente, o que obrigará, num futuro próximo, à criação de regulamentos e de fiscalização próprias pelas autoridades competentes. Outra desvantagem técnica importante, reside na deficiente exactidão das estimativa automática da orientação externa das imagens, dado que os SANT não são tão estáveis nem contêm unidades de medição inercial tão precisas como as utilizadas nas plataformas tradicionais (Küng et al., 2011). Na maior parte dos projectos é necessário a realização de ortofotos havendo apenas como dados entrada as fotos realizadas e apoio GNSS (usualmente em RTK). Para uma melhor compreensão comparemos a obtenção de imagens recorrendo a plataformas tradicionais com a obtenção de imagens através de SANT. A diferença de alturas de voo é significativa. A sobreposição deve ser maior nos SANTs, devido ao processo de obtenção automática de pontos de ligação assim como à fraca determinação das posições das câmaras e da sua atitude. Esta sobreposição, apresenta, geralmente uma maior variação, de par para par de fotos, no seu valor ,relativamente às plataformas tradicionais. Outra diferença são as elevadas distorções de perspectiva devido principalmente à grande variação de alturas relati- vamente à altura de voo realizada. Os parâmetros de orientação externa tornam-se deste modo, desconhecidos, ou, quando medidos, não tenham a exactidão desejada, caso que não acontece nas plataformas tradicionais onde existem unidades de medição inercial, câmaras e receptores GNSS de alta qualidade onde nem o espaço nem o peso do material é relevante (Küng et al., 2011). Este último facto é de relativa importância, tendo em conta que o ajustamento por feixe de um bloco de fotografias necessita de uma boa aproximação inicial para calcular os parâmetros de orienta- ção externa, podendo não convergir tal não aconteça. É usual, devido ao seu peso e dimensões, usar câmaras fotográficas amadoras de pequeno e médio formato. As imagens obtidas por SANTs apresentam também grandes variações tanto radiométricas como de resolução o que afecta também a qualidade final de um ortomosaico, factor que deve ser tido em consideração aquando da realização do processamento das imagens.

7.2 Sistemas Aéreos Não Tripulados

OS SANT podem ser categorizados utilizando vários atributos como por exemplo: aerodinâmica, peso, altitude de voo, carga útil, duração de voo e alcance. Dependendo do principio aerodinâmico de voo os SANT podem ser classificados em duas categorias principais: asa-fixa e asa-rotativa. Em aplicações fotogramétricas, a escolha da plataforma drone resume-se praticamente a estas duas opções, asas fixas e as asas rotativas, sendo a última opção a mais utilizada para mapeamento e monitorização ambiental. Existem também outras opções de plataforma que combinam elementos de sistemas de asa fixa e rotativa (particularmente a descolagem e aterragem verticais). No entanto, elas representam uma proporção relativamente pequena do mercado actual.

As principais vantagens das asas rotativas são a descolagem e aterragem verticais a capacidade de flutuação (hovering) e a facilidade generalizada de pilotagem. Embora o recente aumento da popularidade dos SANTS tenha sido impulsionado em grande parte pela flexibilidade dos multi-helicópteros de asa rotativa, as plataformas tradicionais de asa fixa, pelas suas características de eficiência energética, são ainda as preferidas para aplicações a larga escala (por exemplo, 1km2). Assim, para que um dado projecto seja bem sucedido é importante considerar os limites da plataforma a utilizar relativamente à duração de voo tendo em conta a capacidade da bateria e distância máxima de voo, os quais por sua vez aumentam consideravelmente com os novos avanços em termos de tecnologia energética e eficiência operacional. Além disso, a escolha da plataforma é ainda influenciada pela combinação de certos fatores os quais incluem a experiência do operador, o objetivo do mapeamento, o tipo de sensor e a carga útil necessária e o software disponível específico para o controlo de voo.

Um dos drones de asa-fixa mais utilizados é o Sensefly Ebee. Este drone é composto por uma asa eléctrica (tipo delta) com um peso de 500g, incluindo o piloto automático e a câmara digital de 12 MPix (ver figura 7.1). O seu baixo peso combinado com a fuselagem em espuma, torna-o relativamente seguro em aplicações urbanas, dado que a sua energia de impacto é equivalente à de uma ave de tamanho médio (Küng et al., 2011). Por outro lado, a sua baixa velocidade-ar aprox. 36 km/h), o facto da sua descolagem ser feita por lançamento manual e a aterragem ser feita em espirais apertadas e em espaços relativamente curtos, facilitam ainda o planeamento do voo em zonas urbanas. O Ebee vem equipado do software eMotion que controla o

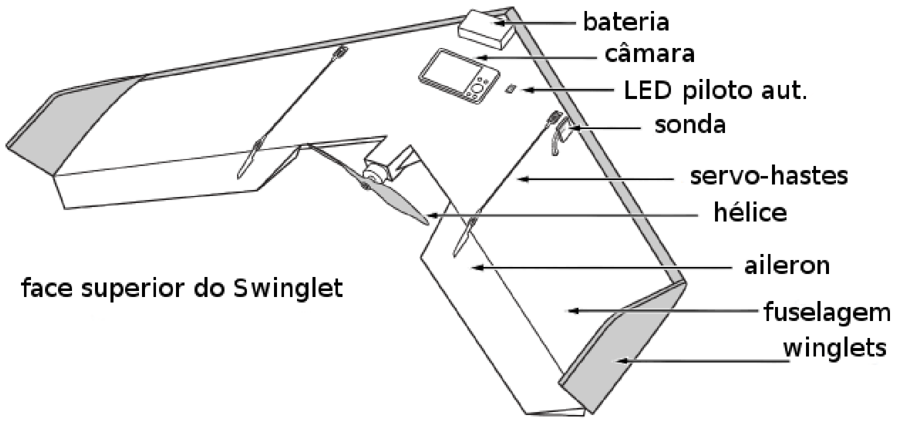


Figura 7.1: Ebee, o drone de asa-fixa da Sensefly

piloto automático a partir dum computador portátil localizado em terra. Além disso permite também efectuar o planeamento da cobertura fotográfica e injectar a trajetória na memória do drone juntamente com a localização das exposições.

O Phantom 4 Pro da DJI é um drone de asa-rotativa muito utilizado dado que oferece, atualmente, uma das melhores relações entre preço e qualidade de mapeamento, do mercado dos drones (ver figura 7.2). Os principais componentes deste sistema drone são:

i) a estação terrestre de controlo remoto (controladora) - constituído por vários manípulos e botões e ainda por um suporte para ligação dum dispositivo móvel (android ou IOS) com software de planeamento e controlo de voo, permitindo ao operador o controlo total do drone.

ii) controlador inteligente de voo - composto por uma unidade de registo de dados de cada voo provenientes dos diferentes sistemas, um sistema de sensores visuais que permite ao drone um voo mais estável em ambientes internos ou em casos em que o GPS não esteja disponível evitar a colisão com objetos. Possui ainda um sensor IMU e uma bússola proporcionando a redundância necessária em termos de navegação aérea.

iii) a câmara - constituída por um sensor CMOS de 1 polegada, com obturador mecânico, permitindo gravar vídeos em 4k e captar imagem com 20 megapixéis.

iv) o estabilizador da câmara (ou gimbal) - composto por 3 eixos que estabilizam a câmara permitindo uma grande qualidade de aquisição das imagens.

v) a bateria de voo inteligente - com capacidade de 5870mAh, possuindo um sistema avançado de gestão de energia, proporcionando voos com duração superior a 30 minutos. Para impedir que, em pleno voo, o drone fique sem bateria, a bateria incorpora um sistema que calcula uma estimativa do consumo energético de percurso entre a localização atual da aeronave e o ponto de descolagem. Assim é armazenada uma parte da bateria que permite ao drone regressar em segurança ao ponto de descolagem.

O Phantom 4 Pro permite ainda os três modos de voo seguintes. O P-mode (P = Positioning) onde são utilizados, quer o sinal GPS para estabilizar o drone, quer os sensores para detetar objetos evitando assim as colisões. É o modo de voo mais autónomo e o mais eficiente em termos de consumo de bateria. O S-Mode (S = Sport) onde os sistemas de deteção de obstáculos estão desativados. Assim ganha-se liberdade na condução mas perde-se segurança na colisão com objetos. Pode ser utilizado para fazer modelação em 3D de objectos em interiores. Por último temos o A-Mode (A = Attitude), onde nem os GPS nem o Sistema de Visão estão disponíveis; o drone usa apenas o barómetro para controlar a altitude.

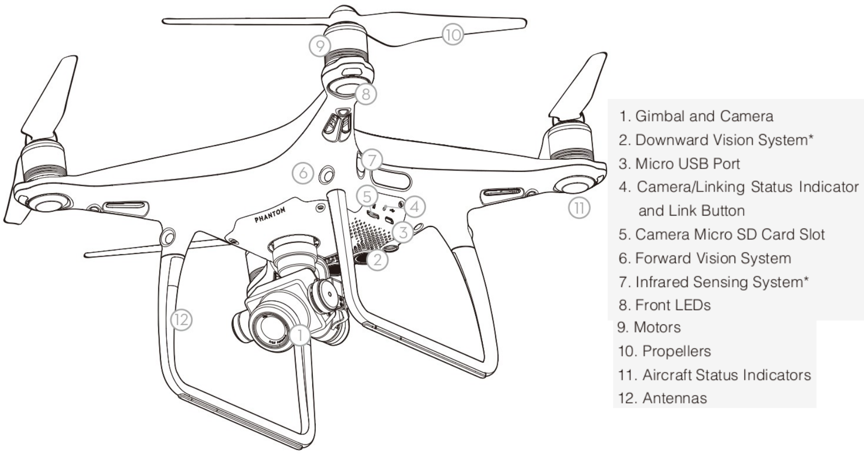


Figura 7.2: Phantom 4 Pro, o drone de asa-rotativa da DJI

Na tabela 7.1 resumem-se as principais vantagens e desvantagens associadas à utilização destas duas plataformas.

7.3 Planeamento e aquisição de coberturas fotogramétricas aéreas

Um dos elementos significativos do planeamento duma missão de voo reside na especificação das sobreposições frontal e lateral. Este pormenor, assume uma importância ainda mais significativa na reconstrução fotogramétrica utilizando a técnica SfM (structure from Motion), dado que para uma correcta geração de MDS, ortofotos e modelos 3D é requerido que o mesmo objecto apareça em multiplas imagens. A qualidade do produto geoespacial obtido por processamento SfM pode ser influenciada pela percentagem de sobreposição da imagem, sendo que o aumento de sobreposição pode conduzir a produtos geoespaciais com maior precisão e exatidão. No entanto uma maior sobreposição requer a aquisição de mais imagens, aumentando o volume de dados e o tempo de processamento. A literatura publicada sobre este assunto evidencia uma variabilidade significativa dos parâmetros de sobreposição utilizados nos diferentes casos de estudo. Os motivos que conduzem a esta variabilidade estão relacionados com as características topográficas das áreas de estudo, com o software de piloto utilizado e com o pacote de software fotogramétrico utilizado, e ainda pelas especificações de qualidade orientadas para o utilizador final do produto geoespacial.

O plano de voo deve ter em consideração o nível de complexidade da superfície em termos do detalhe e da uniformidade espacial, assim como a variação topográfica existente na área. Para se obter a melhor qualidade do produto final com o menor tempo de processamento possível, a configuração ótima de voo

Tabela 7.1: Vantagens e desvantagens das duas plataformas drone mais utilizadas na atualidade

Platform	Vantagens (+) e desvantagens (-)	Tempo de voo/cobertura
Asa-rotativa	+ flexibilidade e facilidade de utilização + estabilidade + possibilidade de voar a baixa altitude e velocidade lentas + possibilidade de pairar (flutuar) - coberturas pequenas - o vento pode afetar a estabilidade do veículo	Tempo de voo 20-40 min Cobertura entre 5-30$\times10^3$ m^2, dependendo da altitude de voo
Asa-fixa	+ capacidade para mapear áreas maiores + maior velocidade e menor tempo de execução do voo - descolagem e aterragem requerem maior experiência de pilotagem - a maior velocidade do veículo pode causar dificuldades em mapear objetos pequenos ou estabelecer as necessárias sobreposições	Tempo de voo pode ser de várias horas Cobertura pode ser superior a 20 km2, dependendo da altitude de voo

pode ser definida pelo número mínimo de imagens com a quantidade suficiente de sobreposição. A sobreposição ótima também depende do tipo de sensor, pelo que os sensores térmicos (devido à sua resolução espacial mais baixa) exigem sobreposições mais elevadas do que os sensores multiespectrais. Além disso, a sobreposição também deve ser definida em função da composição angular dos objectos existentes na área. Uma geometria de cobertura com os valores equilibrados das sobreposição ao longo e perpendicularmente às linhas de voo é essencial para a produção de produtos geoespaciais de qualidade.

A figura 7.3 mostra um exemplo dum plano de voo a realizar com o Phtantom 4 Pro tendo em vista a produção de ortofotos verdadeiros e a extração de modelos 3D dos edifícios com vista à elaboração dum sistema de cadastro 3D.

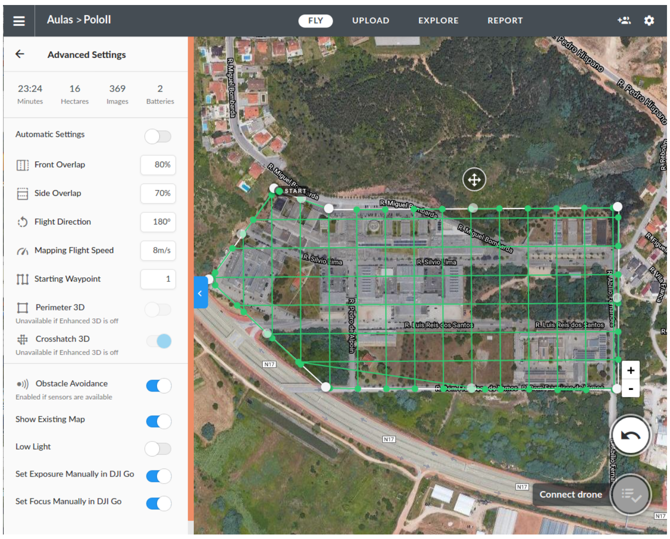


Figura 7.3: Planeamento de voo efectuado com a aplicação DroneDeploy

7.4 Workflow do processamento fotogramétrico

O SfM (do inglês *Structure-fom-Motion*) é um processo que permite reconstruir uma estrutura tridimensional (3D) a partir das suas projeções, que são dadas sob a forma duma série de imagens. Neste contexto, e designando o SfM como Estrutura a partir do Movimento, o input deste processo é um conjunto de imagens com sobreposição e o output principal é uma nuvem de pontos 3D que representa um modelo do objecto. Como output secundário, embora muito importante para a fotogrametria, o SfM gera também os parâmetros de orientação interna da câmara e os parâmetros de orientação externa de todas as imagens, os quais são denominados em visão computacional, respectivamente por parâmetros intrínsecos e extrínsecos das imagens.

De modo geral, podemos dividir o processo SFM em três etapas principais (ver figura 7.4):

1. deteção e extração dos pontos característicos - para cada imagem são identificados os pontos característicos (ou seja pontos radiométricamente notáveis) e representados por por um vector numérico multidimensional de descritores.

2. deteção das correspondências e verificação geométrica - são identificados nas diversas os pontos característicos homólogos e é feita uma verificação geométrica da correspondência (por exemplo utilizando uma condição de coplanaridade).

3. reconstrução da estrutura e do movimento (SfM) - partindo das correspondências encontradas nos diferentes pares de imagens é feita uma reconstrução sequencial do movimento da câmara no espaço e ao mesmo tempo são calculadas as coordenadas 3D dos pontos homólogos num referencial arbitrário.

No caso de se pretender uma reconstrução densa da cena ou do objecto fotografado é habitual adicionar uma nova etapa ao processo, a qual consiste em utilizar técnicas de correlação densa (MVS = Multi-View Stereo) com os pares fotogramétricos definidos na etapa anterior e dos quais se conhecem os POI e POE.

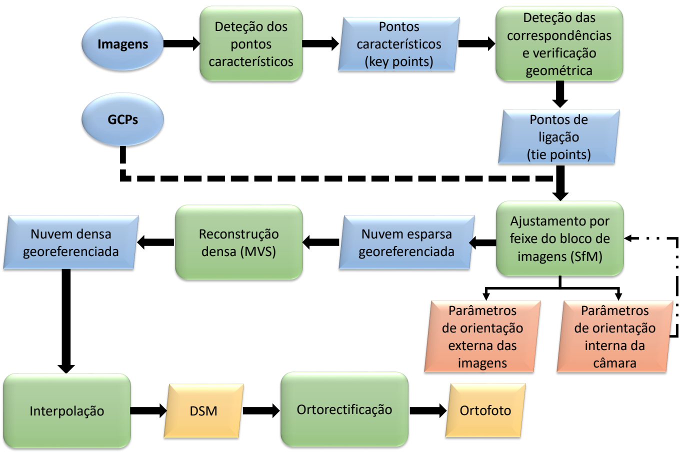


Figura 7.4: Worflow de processamento fotogrametrico com a abordagem SfM-MVS

No entanto, há determinados autores, por exemplo (Smith, Carrivick e Quincey, 2015), que estruturam o processo SfM em diferentes etapas, identificando para cada etapa um possível método (ou algoritmo): i) deteção dos pontos característicos (keypoints) com o SIFT (*Scale Invariant Feature Transform*); ii) deteção das correspondências entre pontos característicos pertencentes a diferentes imagens com a ANN (*Approximate Nearest Neighbour*); iii) filtragem das correspondências com o RANSAC(*RANdom SAmple Consensus*); iv) cálculo da nuvem esparsa e dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos de todas as imagens utilizando um algoritmo SfM com o Blunder; v) atribuição da escala e georeferenciação da nuvem esparsa utilizando uma transformação 3D a 7 parâmetros; vi) produção da nuvem densa o algoritmo PMVS (*Patch-based Multi View Stereo*).

No caso do software propriétário Agisoft Photoscan a estratégia de processamento do bloco de imagens foi dividida nas seguintes etapas:

i) Alinhamento das imagens. Usando os pontos de interesse (keypoints) detectados em cada imagem, o software calcula: 1) os parâmetros internos da câmara (ex. distância focal e distorções da lente), 2) os parâmetros de orientação externa (POE) para cada imagem, e 3) as coordenadas 3D dos pontos de ligação gerando uma nuvem de pontos que designa por esparsa. Os POE e a nuvem de pontos esparsa são calculados num referencial cartesiano 3D arbitrário e organizados numa estrutura de dados designada por *chunk*.

ii) Georreferenciação da *chunk* utilizando GCPS. Identificando manualmente a localização dos GCPS em todas as imagens é atribuído, aos POE das imagens e à nuvem de pontos esparsa, o sistema de coordenadas cartográficas (ou geográficas) dos GCPs.

iii) Otimização da câmara. A calibração da câmera e a estimativa de seus parâmetros de orientação interior são refinadas por um procedimento de otimização, que minimiza a soma dos erros de re-projeção e desalinhamentos das coordenadas de referência. Para executar esta etapa, a nuvem de pontos esparsos é analisada estatisticamente para excluir pontos alocados e encontrar a solução ideal de re-projeção da solução.

iv) Correlação densa. A técnica de correlação (ou correspondência) densa do MVS gera uma nuvem de pontos densa em 3D a partir de várias imagens com parâmetros de orientação internos e externos otimizados.

v) Geração do MDS e do ortofoto. Em primeiro lugar, é gerado o MDS por interpolação da nuvem densa de pontos 3D. Em seguida é gerado o ortofoto utilizando o MDS anterior.

7.5 Utilização de software de código aberto

Os pacotes de programas de código aberto são hoje em dia amplamente utilizados em todas as áreas científicas, devido tanto ao factor económico como à transparência dos métodos e algoritmos que são utilizados. Sendo o factor económico, hoje mais que nunca, importante, o controlo e a possibilidade de consultar o que o algoritmo faz e como o faz assume uma importância relevante, principalmente quando se tentam conhecer e quantificar as fontes de erro que podem afectar os outputs do software. Há ainda a salientar o facto de que muitas vezes o que acontece é a compra de licenças de código aberto por parte de empresas fabricantes de software para as poderem usar comercialmente, criando apenas interfaces gráficas que facilitam o acesso ao utilizador. O PAMP[1] (Pastis/Apero/Micmac/Porto) é um pacote de programas de código aberto criado por Marc Pierrot-Deseilligny do Instituto Geográfico Francês. Inicialmente continha apenas ferramentas para a correspondência de imagens. No entanto, foram integradas outras ferramentas já existentes, podendo actualmente realizar a maioria das tarefas, a montante e a jusante da correspondência de imagens com vista à modelação 3D de objectos a partir dum conjunto de imagens. Este pacote é escrito em C++ e contém várias ferramentas para:

- extracção de modelos digitais de superfície a partir de múltiplos pares estereo,
- modelação tridimensional de superfícies/objectos,
- registo de imagens multi-espectrais,
- rectificação de imagens satélite utilizando coeficientes polinomiais racionais RPC's,
- produção de ortofotos

[1] https://micmac.ensg.eu

Este software recorre, por sua vez aos seguintes pacotes (também de código aberto), nomeadamente: i) o SIFT (Scale Invariant Feature Transform) para a identificação de pontos homólogos entre imagens; ii) o DCRAW para extrair informação exif das imagens; iii) o Image Magick para a manipulação e conversão entre diferentes formatos de imagens; iv) o proj4 para a transformação entre diferentes sistemas de coordenadas.

O PAMP é composto por 4 módulos (ver figura): i) PASTIS para a determinação dos pontos de ligação entre as várias imagens do bloco; ii) APERO para o ajustamento por feixe do bloco de fotografias; iii) MicMac para a correlação densa entre múltiplos pares estéreo e produção das ortimagens; iv) PORTO para a mosaicagem e equalização radiométrica das ortoimagens e a consequente produção do ortofoto da cobertura.

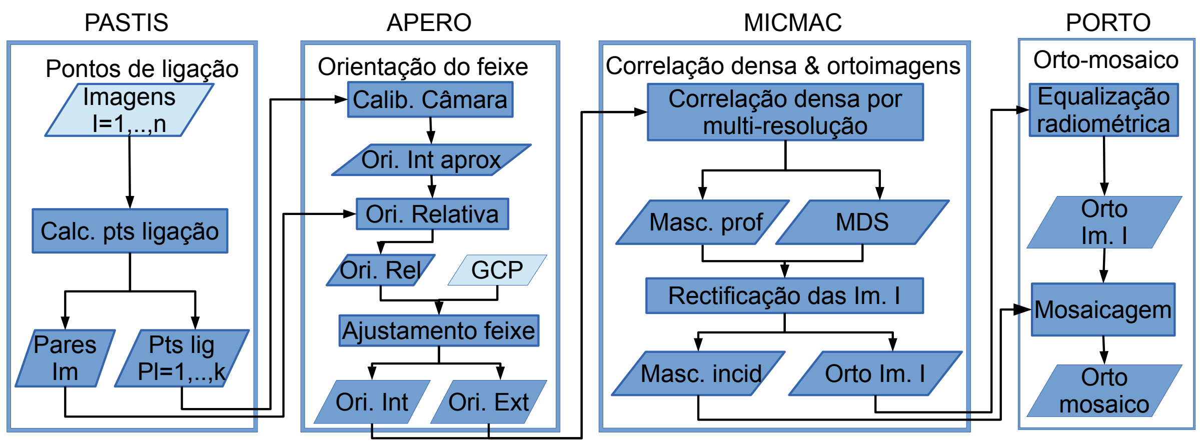


Figura 7.5: Workflow utilizado no PAMP para a geração automática de ortofotos e MDS

7.5.1 PASTIS

A primeira etapa do processo de construção do ortofoto consiste na determinação dos pontos de ligação entre as imagens que constituem a cobertura aérea e na consequente ordenação das imagens através da formação dos possíveis pares estereo (ver figura 2). Esta tarefa é feita com o PASTIS (Programme utilisant Autopano Sift pour les Tie-points dans les ImageS). Numa primeira fase são determinados os pontos de interesse utilizando o detector SIFT os quais são supostamente robustos relativamente às variações de escala, às rotações e ao ruído. Numa segunda fase os pontos de interesse são emparelhados, ou seja, para cada imagem e para cada ponto são determinadas as imagens que contêm um ponto semelhante, definido segundo a norma euclidiana (Lowe, 2004).

7.5.2 APERO

Depois de termos determinado os pontos de ligação entre as imagens passamos à orientação do feixe de imagens num determinado referencial definido pelo utilizador. Esta etapa do processo é feita com o APERO (Aérotriangulation Photogrammétrique Expérimentale Relativement Opérationnelle). Os principais módulos do APERO são (Pierrot Deseilligny e Clery, 2012):

- Um módulo para o cálculo da aproximação inicial da orientação do bloco, que recorre a: i) um algoritmo baseado na matriz essencial duma projecção cónica, utilizada vulgarmente na visão computacional; ii) à recessão espacial fotogramétrica (i.e orientação externa); iii) a um programador especial hierárquico que determinar a árvore óptima do bloco das fotografias (onde cada imagem com excepção da primeira tem um conjunto de pais relativamente à qual a sua orientação é calculada)

- Um módulo para o cálculo do ajustamento por feixe, baseado na linearização clássica das equações de colinearidade e no consequente processo iterativo de Gauss-Newton ou em opção o método de Levenberg-Marquardt para a resolução do sistema de equações não-lineares.
- Módulos para a determinação da orientação absoluta baseada em pontos de apoio ou definida a partir das imagens.
- Alguns módulos para a importação e exportação de dados: pontos de ligação, pontos de apoio, orientações interna e externa, coordenadas GPS dos centros de exposição (no caso de existirem).

7.5.3 MicMac

A etapa seguinte do processo consiste na geração duma nuvem de pontos 3D utilizando a correspondência densa de imagens. No MicMac (Multi-Images Correspondances, Méthodes Automatiques de Corrélation) o problema de reconstrução da superfície por correlação densa é resolvido pela minimização dum funcional de energia dado por (Pierrot-Deseilligny e Paparoditis, 2006):

$$E_\alpha(Z(x,y)) = \sum \big(1 - Corr(x,y,Z(x,y))\big) + \alpha\, K(x,y) \tag{7.1}$$

Nesta equação $Z(x,y)$ é a superfície que pretendemos reconstruir (isto é o MDS), $Corr$ é a função de correlação cruzada normalizada, α é um parâmetro de suavização e $K(x,y)$ é o termo de regularização dado por:

$$K(x,y) = |Z(x+1,y) - Z(x,y)| + |Z(x,y+1) - Z(x,y)| \tag{7.2}$$

7.5.4 PORTO

O Porto é a ferramenta utilizada para a produção de ortofotos (mosaicos de ortoimagens). Apesar de ainda estar num estado muito incipiente de desenvolvimento (Pierrot-Deseilligny, 2012) permite já realizar a mosaicagem e a equalização radiométrica das diferentes orto-imagens que constituem o bloco. A equalização radiométrica de cada ortoimagem $O_i(x,y)$ é feita através dum polinómio local $P_i(x,y)$ e dum polinómio global $R(x,y)$ de forma a evitar uma possível deriva da radiometria:

$$O_{corr} = O_i(x,y) P_i(x,y) R_i(x,y) \tag{7.3}$$

Os coeficientes destes polinómios são determinados globalmente utilizando o método dos mínimos quadrados.

7.5.5 Parametrização formal da PAMP em XML

Do ponto de vista prático, um dos inconvenientes do pacote PAMP reside na parametrização formal em XML dos seus diferentes módulos. Como o seu desenvolvimento foi feito tendo em vista um grande leque de aplicações aéreas e terrestres a parametrização é complexa. No entanto, existe para cada módulo um ficheiro xml padrão que poderá ser costumizado em função das especificidades de cada projecto. No Pastis a informação necessária a incluir no ficheiro xml refere-se aos parâmetros iniciais de calibração da câmara, nos casos em que alguma desta informação não estiver contida na informação exif dos ficheiros imagem, isto é, as coordenadas imagem do ponto principal, a distância focal e o tamanho do sensor. No caso do Apero esta parametrização em xml permite controlar os procedimentos de calibração da câmara e de orientação das imagens. Note-se que em muitos projectos fotogramétricos, este aspecto é muito importante pois é frequente ter alguns parâmetros de calibração/orientação previamente determinados e se pretende que estes se mantenham fixos durante o processo de refinamento dos parâmetros. Assim, as principais secções do ficheiro xml são:

- `<SectionBDD_Observation>` - onde se define os pontos de apoio e de ligação da cobertura,

- <SectionInconnues> - onde se lista a calibração da câmara (ou das câmaras) utilizadas no projecto e as imagens associadas. A primeira imagem da lista é posicionada de forma arbitrária,
- <SectionSolveur> - onde se especifica qual o algoritmo a utilizar na resolução da triangulação fotogramétrica,
- <SectionCompensation> - onde se definem as diferentes etapas do cálculo da triangulação.

No caso do MicMac a parametrização xml é em geral utilizada em projectos de fotogrametria terrestre, para se adaptar a geometria da rede de imagens na reconstrução 3D do objecto de estudo. É também neste ficheiro xml que se define espacialmente a área de trabalho e se parametrizam as várias etapas de multi-resolução referidas anteriormente. As secções mais importantes são:

- <Section_Terrain> - onde é definida a área sobre a qual o MicMac vai realizar a correspondência entre imagens, assim como o intervalo de profundidade,
- <Section_PriseDeVue> - onde se definem as vários perspectivas de imageamento do objecto, com as suas imagens e parâmetros,
- <Section_MEC> - é onde se define as várias etapas multi-resolução e os seus respectivos parâmetros (zoom, janela de correlação, ...).

Por último a informação mais importante a considerar no ficheiro xml do Porto é relativa à montagem do mosaico (<SectionFilatrageIn>) e à aplicação das correcções radiométricas (<SectionEgalisation>) pretendidas. Tal como no MicMac a parametrização xml do Porto é feita em geral em projectos de fotogrametria terrestre, devido à possibilidade de existirem diferentes perspectivas de imageamento do objecto.

7.6 Caso de estudo: monitorização topográfica de dunas primárias

As dunas primárias são, na maioria dos casos, a unidade geomorfológica mais próxima do mar dos sistemas eólicos costeiros e representam a parte terrestre mais próxima do sistema de intercâmbio sedimentar associado à interacção praia-duna. Estes montículos de solo arenoso não consolidado, contíguos à linha de costa (i.e shoreline), são extremamente importantes na defesa do litoral dado que atuam como dispositivos naturais de proteção, proporcionando o abastecimento de sedimentos às praias e protegendo as terras interiores das tempestades marítimas e da ação da forte ondulação. No entanto, devido a causas tanto naturais como antropogénicas, as dunas primárias mudam contínua e dinamicamente a sua forma, posição e extensão ao longo do tempo. A deteção, extração e monitorização dessas unidades recorrendo a técnicas e tecnologias de Deteção Remota é fundamental em países como Portugal onde 75% da sua população vive nestas zonas costeiras e onde é gerado 85% do seu PIB. No contexto de estudos de geomorfologia costeira, por exemplo na erosão costeira e na avaliação do balanço sedimentar, a disponibilidade de MDS de alta resolução e de grande exatidão vertical são pré-requisitos fundamentais na modelação 3D precisa do sistema duna-praia e no conhecimento pormenorizado da morfometria das dunas.

Para avaliar a qualidade e adequabilidade dum pequeno e leve drone de baixo custo na monitorização topográfica de dunas primárias, foi comparada a exactidão do MDS obtido por correlação densa das imagens captadas pela câmara de ação (GoPro Hero4 Silver) e processadas com Software Fotogramétrico Open Source (SFOS), com uma superfície de referência obtida por varrimento laser terrestre (TLS). Os dois levantamentos foram feitos no mesmo dia a fim de se eliminarem ao máximo as alterações da geometria da superfície da praia (ver figura 7.6).

Note-se que neste caso de estudo a modelação 2.5D pormenorizada e exaustiva da duna primária assume um papel relevante na monitorização topográfica com drones low cost equipados com câmaras de ação. Este modelo para além de ser de alta-resolução deve igualmente destacar com exatidão pequenas variações geomorfológicas, principalmente as que ocorrem na crista da duna.

A tabela seguinte 7.2 mostra os comandos PAMP que foram necessários para produzir o Orto e o DSM. O primeiro passo neste processo fotogramétrico, depois de determinados os pontos de ligação, é a calibração

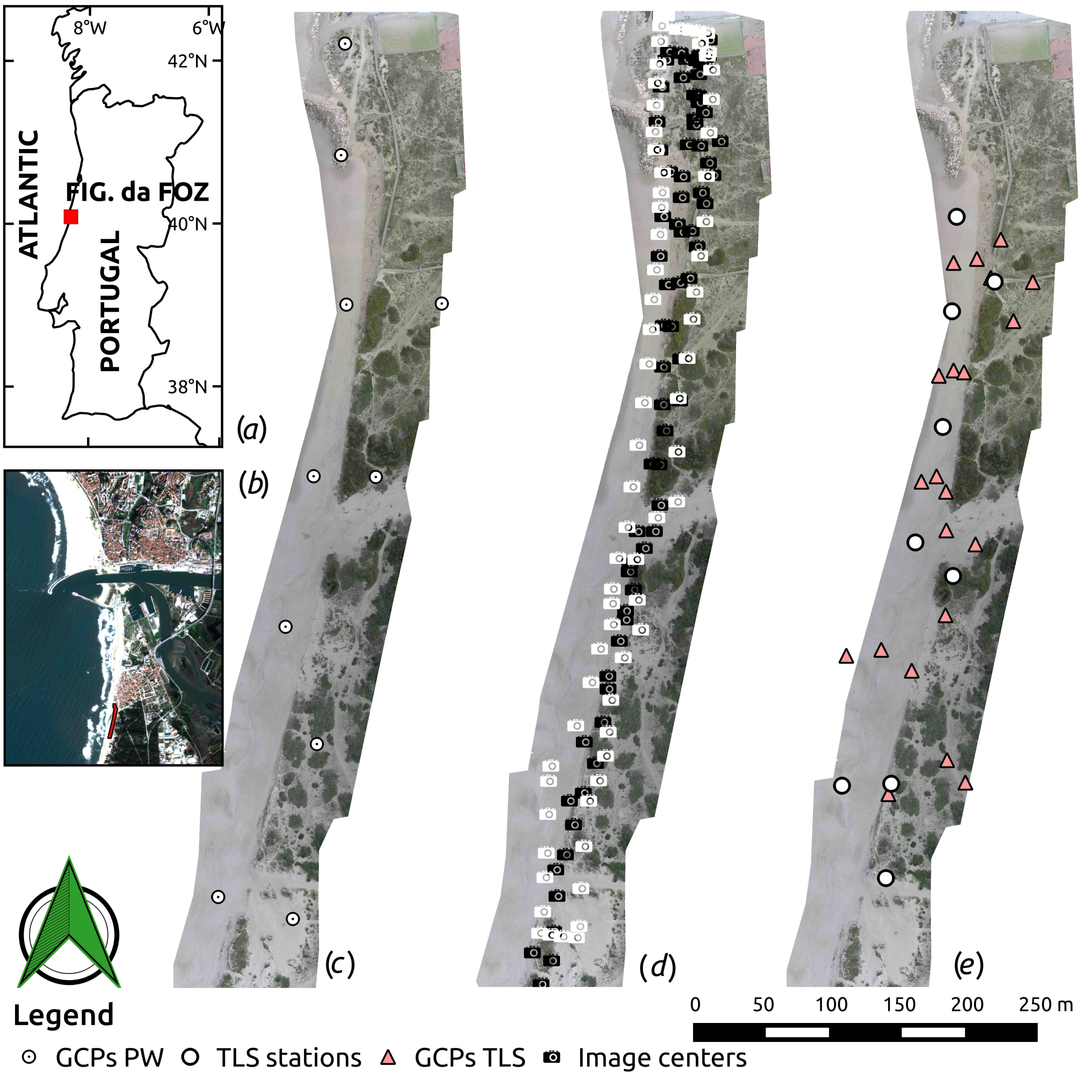


Figura 7.6: Area de estudo (*a*, *b*, *c*); localização dos centros das imagens (*d*) dos GCPs utilizados no ajustamento do bloco de imagens e da posição das estações TLS (*e*). Os símbolos bancos correspodem aos centros das imagem do voo de 100 m AGL, e os pretos ao voo de 80m

da câmara. Esta calibração foi feita recorrendo ao programa APERO, realizando uma primeira auto- calibração (utilizando apenas 27 imagens) seguuindo-se uma nova auto-calibração utilizando todas as imagens. O ajustamento por feixe recorrendo aos GCPs permitiu obter a orientação externa das imagens no sistema de coordenadas pretendido. Este programa, sendo parametrizável, pode sê-lo com o objetivo de realçar pequenas variações geométricas. Na correlação densa, os parâmetros mais importantes neste estudo foram o fator de regularização e a janela de correlação do algoritmo utilizado. O fator de regularização utilizado foi baixo (0,002) com o objetivo de realçar pequenas variações geométricas. A janela de correlação foi igualmente pequena (3x3 pixeis) para atingir o mesmo objetivo.

Tabela 7.2: Comandos MicMac utilizados no workflow

Comando MicMac	Descrição
mm3d Tapioca MulScale "G.*.JPG" 500 -1	Deteção e emparelhamento de pontos de ligação homólogos utilizando uma abordagem multiescala
mm3d Tapas Four15x2 "G008((493[2-9]) | (494[0-3]) | (500[3-9]) | (501[0-9]) | (5020)).JPG" DegGen= 0 DegRadMax= 3 Out= Calib-Four	Cálculo dos parâmetros de orientação interna utilizando um modelo Four15x2 num suconjunto de 27 imagens do bloco
mm3d Tapas Four15x2 "G.*.JPG" DegGen=2 InCal=Calib-Four Out=All-Relative	Refinamento do modelo anterior utilizando o bloco completo (162 imagens)
mm3d GCPConvert AppInFile GCPs8.txt ChSys= SistCoorPTTM06.xml@SistCoorSL.xml Out= GCPsSL.xml	Transformação do sistema de coordenadas cartográfico dos GCPs num sistema de coordenadas local para o cálculo do ajustamento por feixe
mm3d GCPBascule "G.*.JPG"All-Relative OriExtPreAjust GCPsSL.xml MeasGCPsImages.xml	Georeferenciação e ajustamento dos parâmetros de orientação com os GCPS (coordenadas imagem en Measures-S2D.xml)
mm3d Campari "G.*.JPG"OriExtPreAjust OriExtFinal GCP=[GCPsSL.xml,0.01, MeasGCPsImagens.xml,0.5] FocFree=true PPFree=true	Ajustamento por feixes perspectivos utilizando pesos adequados para os GCPs e para as medições das coordenadas imagem
m3d Malt Ortho "G.*.JPG"OEPTTM06 DirTA=TA DefCor=0.0 EZA=true Regul=0.05 SzW=3 DirMEC=DSM-5cm ZoomF=1 ResolTerrain=0.05	Geração do MDS por correlação densa
mm3d Tawny Ortho-DSM-5cm	Geração do ortomosaico

O processamento das 162 imagens com o MicMac permitiu gerar directamente dois produtos geoespaciais: um MDS (em formato de grelha) com 5 cm de resolução e ortofoto, também com 5 cm de resolução. Por outro lado, como a nuvem de pontos obtida com o TLS apresenta uma densidade média de 760 pts/m^2, podemos interpolar nesta nuvem um MDS com uma resolução de 5 cm, dado que teremos aproximadamente, 2 pts em cada célula. Nestas circunstâncias podemos dizer que os dois MDS contêm o mesmo nível de detalhe podendo ser comparados em termos espaciais e topográficos (geomorfológicos). A figura 7.7 mostra: (*a*) o MDS obtido por TLS, (*b*) o MDS obtido por correlação densa com o MicMac, (*c*) o MDS obtido por filtragem do MDS anterior ($\text{DSM}_{\text{UASden}}$) e (*d*) o ortofo obtido com o worflow de processamento fotogramétrico proposto. Além disso, é também ilustrado, em (*e*), alguns detalhes destas 3 superfícies em 3 áreas de teste. Nestes extratos podemos observar que a superfície obtida com a tecnologia TLS é muito mais suave que a superfície obtida com a tecnologia drone.

A exactidão posicional do MDS (ou do ortofoto) é influenciada por todas as componentes do ?Sistema? Drone completo, ou seja: veículo aéreo, sensores, plano de voo efetuado e software de processamento. e não apenas por uma delas. Cada um destes fatores afeta, tanto individualmente como em combinação com outros, a qualidade posicional dos produtos obtidos com a tecnologia Drone: por exemplo, uma má operacionalização do melhor drone pode viciar a exatidão posicional de um derivável (MDS ou ortofoto). Atualmente, assumindo que se seguem as melhores práticas na operação com o drone, este está equipado com uma câmara métrica, o apoio terreno é de grande qualidade e os algoritmos de produção dos ortofotos são robustos e precisos, é expectável conseguir-se uma exactidão posicional para o ortofoto de aprox. 1.5 GSD.

A metodologia utilizada na avaliação da qualidade do MDS-UAV consistiu em duas três fases. Numa primeira fase foram definidas três áreas de teste, bem distribuídas espacialmente pela área de estudo (7.7). Seguidamente, para avaliar visualmente a normalidade da distribuição dos resíduos de cada área de teste foram traçados: os histogramas dos resíduos verticais, sobrepondo-se as curvas da distribuição normal, e os gráficos

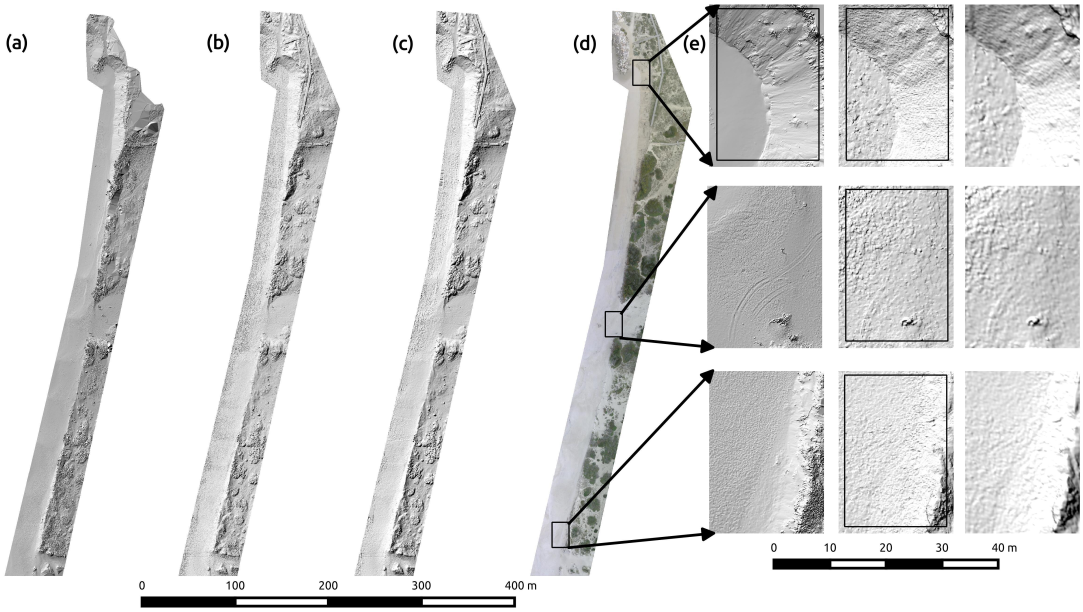


Figura 7.7: Imagens de relevo sombreado das superfícies: (*a*) superfície TLS $\mathrm{DSM_{TLS}}$, (*b*) superfície drone $\mathrm{DSM_{UAS}}$ e (*c*) superficie drone filtrada $\mathrm{DSM_{UASden}}$. O ortomosaico é ilustrado em (*d*) e detalhes destas 3 superfícies são ilustradas em (*e*).

quantis-quantis (Q-Q). Na terceira fase, utilizaram-se as seguintes medidas robustas para definir a exatidão vertical:

- 3 quantis: i) o quantil 50% (Q50) da diferença Δh, i.e. a mediana $m_{\Delta h}$); ii) o quantil 68.3% ($\bar{Q}68.3$) das diferenças absolutas $|\Delta h|$ e iii) o quantil 95% ($\bar{Q}95$) das diferenças absolutas $|\Delta h|$,
- Um estimador robusto do desvio padrão dado pela a mediana normalizada das diferenças absolutas $\mathrm{NMAD} = 1.4826 \times \mathrm{median}_j \left(|\Delta h_j - m_{\Delta h}|\right)$

Nas expressões anteriores: $\Delta h_i = (\mathrm{DSM_{TLS}} - \mathrm{DSM_{UAS}})_i\ ,\ i = 1, \ldots, n$ são as diferenças (ou erros verticais) para uma dada célula i; $\mathrm{DSM_{TLS}}$ designa o MDS obtido a partir dos pontos TLS, e $\mathrm{DSM_{UAS}}$ representa o MDS obtido a partir do processamento das imagens drone.

Note-se a utilização da distribuição $|\Delta h|$ para se considerar apenas a magnitude dos erros e não o seu sinal. Além disso, considerando as medidas robustas e a NMAD como valores representativos da média e desvio padrão dos resíduos, podemos calcular um estimador robusto para o valor RMSE, ou seja o RRMSE (*Robust Root Mean Square Error*), a partir de:

$$\mathrm{RRMSE} = \sqrt{(\mathrm{NMAD})^2 + (m_{\Delta h})^2} \tag{7.4}$$

A figura 7.8 mostra os histogramas e os gráficos Q-Q para as três áreas teste utilizadas na avaliação da qualidade do DSM obtido por drone. Nas áreas 2 e 3 são evidentes os desvios relativamente à distribuição normal pelo facto dos histogramas dos resíduos verticais apresentarem os cumes mais acentuados. Na área 1 este efeito não é tão acentuado. No entanto a forma sigmóide dos gráficos Q-Q mostram claramente a não normalidade das distribuições nas três áreas.

Dado que os resíduos verticais não têm uma distribuição normal, é necessário utilizar medidas de exatidão robustas. A tabela 7.3 mostra os valores obtidos para as medidas propostas. Utilizando o indicador remq a área com menos exatidão vertical é a Área 2 (central) e com maior exatidão vertical é a Área 3 (extremo sul). No entanto, se utilizarmos o indicador NMAD concluímos que as áreas 2 e 3 têm a mesma exatidão vertical sendo que a área 1 é a pior. Este facto releva que a área 2 estará mais afectada com outliers do que as duas outras áreas.

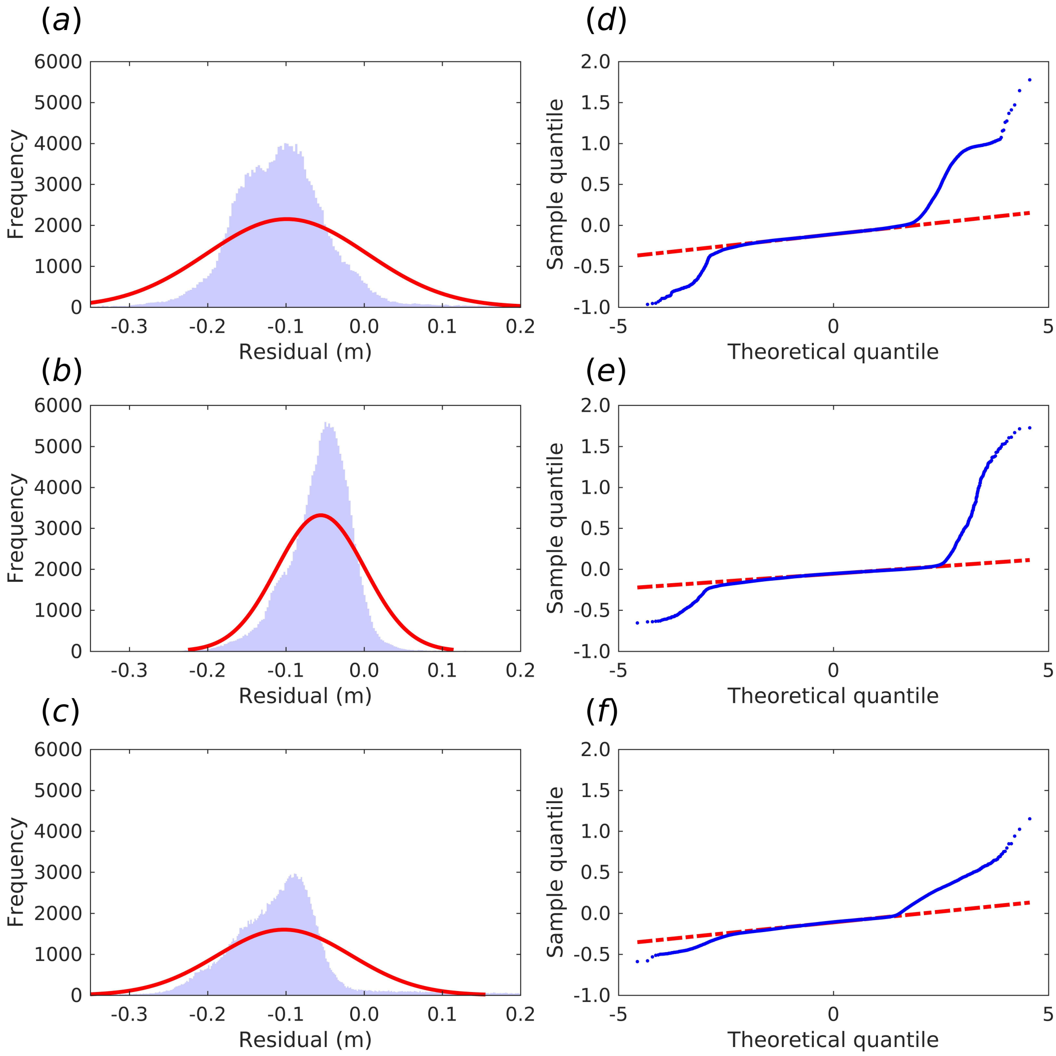


Figura 7.8: Histogramas e Q-Q plots da distribuição dos resíduos nas 3 áreas de teste. A curva a vermelho em (*a*, *b* e *c*) corresponde ao ajustamento da distribuição normal. A linha a vermelho em (*d*, *e* e *f*) une o primeiro e o 3 quartil de cada distribuição.

Tabela 7.3: Indicadores de exatidão do MDS

Sample	No. de pontos	RMSE (m)	Mean (m)	STD (m)	RRMSE (m)	Q50 (m)	NMAD (m)	Q̄68.3 (m)	Q̄95 (m)
Area 1	197465	0.14	-0.10	0.10	0.12	-0.11	0.06	0.14	0.21
Area 2	197465	0.08	-0.06	0.06	0.06	-0.05	0.04	0.07	0.13
Area 3	197465	0.13	-0.10	0.09	0.12	-0.11	0.05	0.14	0.22
Global	592395	0.12	-0.09	0.09	0.10	-0.09	0.06	0.12	0.20

Referências

Colomina, I e P Molina (2014). «Unmanned aerial systems for photogrammetry and remote sensing: A review». Em: *ISPRS J. Photogramm. Remote Sens.* 92, pp. 79–97. ISSN: 0924-2716. DOI: http://dx.doi.

org/10.1016/j.isprsjprs.2014.02.013. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924271614000501.

Küng, O. et al. (2011). «THE ACCURACY OF AUTOMATIC PHOTOGRAMMETRIC TECHNIQUES ON ULTRA-LIGHT UAV IMAGERY». Em: vol. XXXVIII-1/C22, pp. 125–130. DOI: 10.5194/isprsarchives-XXXVIII-1-C22-125-2011. URL: https://www.int-arch-photogramm-remote-sens-spatial-inf-sci.net/XXXVIII-1-C22/125/2011/.

Lowe, David G. (2004). «Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints». Em: *International Journal of Computer Vision* 60.2, pp. 91–110. ISSN: 1573-1405. DOI: 10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94. URL: https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94.

Pierrot Deseilligny, M. e I. Clery (2012). «Apero, an Open Source Bundle Adjusment Software for Automatic Calibration and Orientation of Set of Images». Em: *ISPRS - Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spat. Inf. Sci.* Vol. XXXVIII-5/. snavely, pp. 269–276. ISBN: 978-1-4244-2242-5. DOI: 10.5194/isprsarchives-XXXVIII-5-W16-269-2011. URL: http://www.int-arch-photogramm-remote-sens-spatial-inf-sci.net/XXXVIII-5-W16/269/2011/.

Pierrot-Deseilligny, Marc e Nicolas Paparoditis (2006). «A multiresolution and optimization-based image matching approach: An application to surface reconstruction from SPOT5-HRS stereo imagery». Em: vol. 36. 1/W41, pp. 1–5.

Smith, M. W., J. L. Carrivick e D. J. Quincey (2015). «Structure from motion photogrammetry in physical geography». Em: *Prog. Phys. Geogr.* 40.2, pp. 247–275. ISSN: 0309-1333. DOI: 10.1177/0309133315615805. URL: http://ppg.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/0309133315615805.

Turner, Darren, Arko Lucieer e Christopher Watson (2012). «An automated technique for generating georectified mosaics from ultra-high resolution Unmanned Aerial Vehicle (UAV) imagery, based on Structure from Motion (SFM) point clouds». Em: *Remote Sens.* 4.5, pp. 1392–1410. ISSN: 20724292. DOI: 10.3390/rs4051392. URL: http://www.mdpi.com/2072-4292/4/5/1392.

Capítulo 8

Sistemas de Varrimento Laser

Conteúdo

8.1 Introdução

O Varrimento Aéreo por Laser (também conhecido por LiDAR aéreo) é uma tecnologia de detecção remota activa que fornece medições directas da distância entre o digitalizador laser e a superfície .

Os componentes básicos do LiDAR aéreo são:

- A unidade scanner - engloba o laser, os mecanismos de varrimento e as ópticas.
- Antena GPS - é habitualmente uma antena de dupla frequência que regista o sinal GPS com uma frequencia de 2 Hz. A antena é instalada no topo da aeronave longe de obstruções.
- Unidade de medição inercial (IMU, *Inertial meassurement unit*)- pode ser fixa directamente à unidade laser ou então colocada junto a este numa plataforma estável. Esta unidade regista, tipicamente, dados de aceleração.
- Unidade de controlo e registo - responsável pela sincronização da variável tempo de todos os dispositivos e do seu controlo. Armazena os dados da distância e de posicionamento adquiridos pelo, scanner IMU e GNSS. Os laser scanners actuais, que que geram até 300000 pulsos laser por segundo, produzem cerca de 20 Gbyte de dados de distância por hora, enquanto que os dados produzidos pelos sensores GPS e IMU somam apenas 0,1 Gbyte por hora.

Apesar de neste capítulo abordarmos também os sistemas de varrimento laser terrestre, as primeiras secções serão dedicadas aos sistemas de varrimento laser aéreo. No final iremos ver como poderemos aplicar estes conceitos nos sistemas de varrimento laser terrestre. Neste contexto, interessa começar por estudar os princípios básicos da medição nos scanners laser.

8.2 Princípios básicos da medição nos sistemas de varrimento

Existem dois métodos activos básicos para a medição óptica duma superfície 3D (Vosselman e Maas, 2010): a estimativa do tempo de trânsito entre dois pontos (ou tempo de voo) da luz laser e a triangulação. Dado que as ondas de luz viajam num dado meio com uma velocidade conhecida, medindo o tempo entre a emissão da luz e sua recepção obtêm-se uma forma simples de medir a distância entre os pontos de emissão e recepção (figura 8.2.1). Estes sistemas, também conhecidos como tempo de voo (TOF – *Time Of Flight*) ou ainda por LiDAR (*LIght Detection and Ranging*), o princípio de medição pode também ser feito indirectamente utilizando a mediação de fase com lasers de onda contínua (CW – *continuous wave*). O método da triangulação utiliza a função trigonométrica cosseno no triângulo definido pela direção de iluminação (ângulo α na figura 8.2.1) e pela direção de observação (ângulo β na figura) 8.2.1), sendo conhecida a distância (baseline) entre a fonte de iluminação e a fonte de observação.

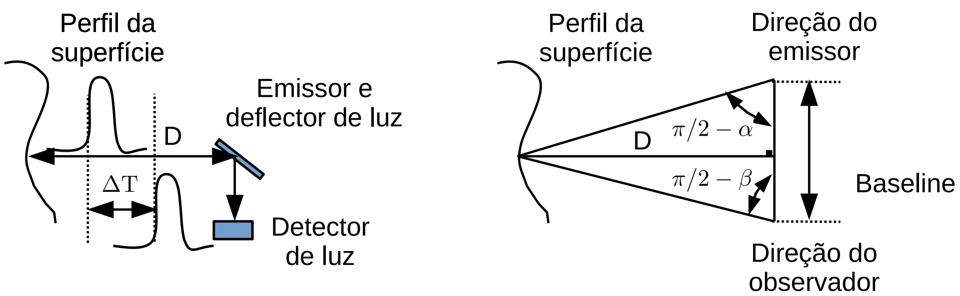


Figura 8.2.1: Métodos ópticos de medição 3D

8.2.1 Medição por tempo de voo

Uma propriedade fundamental duma onda luminosa (ou eletromagnética) reside na sua velocidade de propagação. Num dado meio, as ondas viajam com uma velocidade finita e constante. Assim, a medição do intervalo de tempo (também conhecido por tempo de voo) que a luz laser leva a fazer o percurso, num determinado meio, entre a fonte emissora e a superfície reflectora e o seu regresso ao detector (supondo-o coincidente com o emissor) fornece uma técnica adequada para medir a distância D:

$$D = \frac{c}{v}\frac{\Delta T}{2}$$

Apesar do valor da velocidade de propagação da luz no vazio é de $c = 299792458$ m/s, e do factor de correção da propagação da luz na superfície terrestre (o qual depende da temperatura, pressão e humidade do ar) ser dado por $n \approx 1.00024$, podemos assumir que daqui em diante $c = 3 \times 10^8$ m/s e $n = 1$, ou seja

$$D = \frac{3}{2}\Delta T \times 10^8 \quad (\Delta T \text{em segundos})$$

ou seja para medirmos distâncias da ordem dos 150 m precisamos de ter tecnologia capaz de medir intervalos de tempo da ordem de 10^{-6} s.

Dependendo das características da superfície refletora (por exemplo vegetação) que podem causar várias reflexões (ou retornos) correspondentes a diferentes distâncias, o sistema pode medir mais do que um eco para um dado pulso emitido. Actualmente, os sistemas aéreos registam, para cada pulso emitido, pelo menos, o primeiro eco (ou pulos de retorno) e o último eco, e a maior parte deles consegue registar entre 4 a 5 ecos. Esta característica foi recentemente estendida aos sistemas terrestre de varrimento baseados em tempo de voo.

Uma parte essencial dos sistemas TOF reside no método de deteção utilizado na determinação do intervalo de tempo (e portanto da distância ou alcance). O detector irá gerar um pulso de disparo com marcação de tempo, que dependera do seguinte critério implementado:

- Detecção do pico: o detector gera um pulso de disparo no máximo (amplitude) do eco. O tempo de voo é dado pelo atraso de tempo entre o máximo do pulso emitido até ao máximo do eco. A detecção correta pode ser problemática se o eco fornecer mais de um pico.
- Limiar ou detecção da frente do eco: Aqui, o pulso de disparo é acionado quando a frente do eco excede um limite predefinido. A desvantagem deste método é que o tempo de voo depende fortemente da amplitude do eco.
- Detecção duma fração da amplitude máxima: este método produz um pulso de disparo no momento em que um eco atinge uma fração predefinida (normalmente 50%) da sua amplitude máxima. A vantagem desse método é que ele é relativamente independente da amplitude de um eco.

Apesar de que cada um dos detetores ter as suas vantagens e desvantagens, a deteção da fração tem gerado um consenso de ser um bom compromisso. Além disso a maior parte dos sistemas comerciais TOF fornece uma incerteza na medição da distância na ordem dos 5-10 mm.

8.2.2 Medição por comparação de fase

Além de se utilizarem pulsos curtos e repetitivos, os sistemas TOF também podem ser realizados por modulação da amplitude (AM - amplitude modulation) ou por modulação da frequência. Assim, os sistemas de varrimento baseados no princípio da comparação de fase utilizam o facto de que a medida da diferença de fase entre o sinal emitido e refletido, da parte fracional do comprimento total, é menor do que o valor da parte inteira do comprimento de onda modulada

A distância entre o sensor e o objecto é dada pela equação

$$D = M\lambda + \Delta\lambda$$

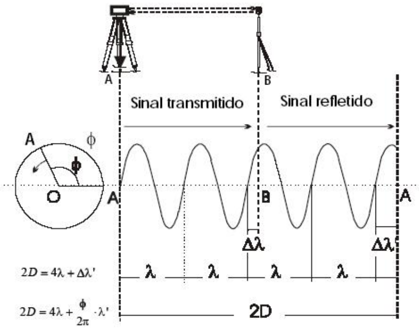


Figura 8.2.2: Princípio do método da comparação de fase.

onde M é um número inteiro do comprimento de onda (neste caso $M = 4$), $\Delta\lambda$ a parte fraccionária do comprimento de onda λ. Como o sinal é refletido para o sensor (receptor), a distância ao objecto é dada por

$$2D = N\lambda + \Delta\lambda$$

onde N é o número de revoluções do vector $\overrightarrow{OA}$ (4 neste caso) e $\Delta\lambda$ a parte fracionária dada pelo ângulo de fase ϕ. Como $\Delta\lambda = \frac{\phi}{2\pi}\lambda$ teremos:

$$D = N\frac{\lambda}{2} + (\frac{\phi}{2\pi})\frac{\lambda}{2}$$

A diferença de fase ($\Delta\lambda$) pode ser medida utilizando tecnologias analógicas ou digitais. A modulação de onda contínua (CW) evita a medição de pulsos curtos, modulando a potência ou o comprimento de onda do feixe de laser. Em termos gerais, os sistemas modulados em amplitude são caracterizados por gerarem grandes quantidades de pontos (até um milhão de pontos 3D) mas por terem curto alcance (inferior a 100m). Por outro lado os sistemas pulsados baseados em TOF possuem um maior alcance (e.x. 800 m) mas com uma taxa de dados inferior (habitualmente < 50000 pontos/s em sistemas terrestres e < 200000 em sistemas aéreos).

8.3 Georreferenciação dos pontos LiDAR

Atendendo à figura a equação de observação do Lidar (8.3.1) pode ser escrita na forma

$$\vec{X}_G = \vec{X}_0 + R_{\mathscr{Y},\mathscr{P},\mathscr{R}}\vec{P}_G + R_{\mathscr{Y},\mathscr{P},\mathscr{R}}R_{\Delta\omega,\Delta\phi,\Delta\kappa}R_{\alpha,\beta}\vec{\rho}$$

onde:

- X_G representa a posição do ponto laser no sistema de coordenadas cartográfico,
- X_0 representa a posição do sistema de coordenadas IMU,
- P_G representa o offset entre os sistemas de coodenadas Laser e IMU,
- $R_{\mathscr{Y},\mathscr{P},\mathscr{R}}$ representa a matriz de rotação relacionando os sistemas de coordenadas terreno e IMU,
- $R_{\Delta\omega,\Delta\phi,\Delta\kappa}$ representa a matriz de rotação que relaciona os sistemas de coordenadas IMU e Laser e é definida pelos ângulos de boresight $(\Delta\omega, \Delta\phi, \Delta\kappa)$
- $\vec{\rho}$ é o vector distância-laser (laser range) que descreve a posição do centro do footprint no sistema de coordenadas laser e cuja norma é equivalente à distância entre o emissor laset e o footprint

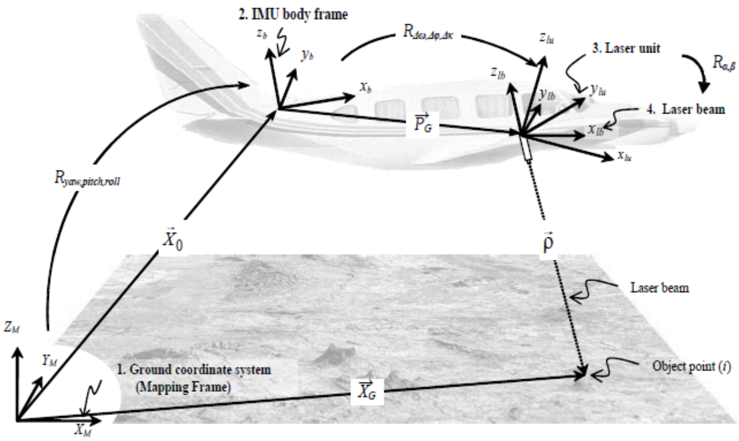


Figura 8.3.1: Sistemas de coordenadas e variáveis envolvidas na equação do LIDAR. Adaptado de (Habib et al., 2010).

- $R_{\alpha,\beta}$ representa a matriz de rotação entre o sistema laser o e o emissor da luz laser, sendo α e β os dois ângulos (vertical e horizontal) do espelho do scanner.

Note-se que na maioria dos sistemas de varrimento linear aéreos (que é o caso do scanner Riegl), o laser dispõe apenas dum movimento rotativo num dos planos, assumindo-se então que o ângulo α é zero.

8.3.1 Caso de estudo: Scanner Riegl LMS-Q680i

Neste parágrafo iremos ver um caso prático da definição dos diferentes sistemas de coordenadas envolvidos na realização dum dado digitalizador (scanner). No manual do Riworld as matrizes de transformação são dadas para pontos em coordenadas homogéneas. Têm a dimensão 4×4 e o seu propósito é duplo: englobar numa única matriz as rotaações e as translações. Assim a matriz de rotação R aparece na parte superior esquerda da matriz e engloba os 3×3 primeiros elementos da matriz de transformação; a translação T aparece na parte superior direita, na última coluna; a última linha completa a matriz 4×4:

$$R_B^A = \begin{bmatrix} \boxed{R_{3\times3} = \left[\mathbf{x}_{\text{rot}}^T \times \mathbf{y}_{\text{rot}}^T \times \mathbf{z}_{\text{rot}}^T\right]} & \boxed{T_{3\times1} = \begin{bmatrix} x_{\text{tra}} \\ y_{\text{tra}} \\ z_{\text{tra}} \end{bmatrix}} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de instalação do scanner

A matriz de instalação SOCS⟶IMU é uma matriz 4×4 e descreve a transformação do sistema de coordenadas interno do scanner (SCOS-Scanner's Own Coordinate System) para o Sistema de coordenadas IMU. Esta matriz é usualmente determinada pela medição de vários pontos distintos no scanner e no IMU. Com esta informação podemos determinar a matriz de transformação. Como exemplo de matriz de instalação SOCS⟶IMU temos:

$$R_{\text{IMU}}^{\text{SOCS}} = \begin{matrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.1660 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.1770 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0730 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{matrix}$$

Figura 8.3.2: Sistema de coordenadas da aeronave (BODY) na configuração NED.

Os parâmetros por defeito de calibração dependem do sistema de medição e podem ser zero (quando especificados pelo fabricante do hardware, ou então podem assumir valores diferentes de zero (quando determinados por um processo de calibração, como por exemplo utilizando o RiPROCESS).

Se for utilizado um dispositivo de montagem (Tilt mount) então é necessário fornecer a matriz de instalação ou seja a da transformação SOCS⟶TOCS (Tiltmount's Own Coordinate System). Neste caso as coordenadas são transformadas do SOCS para o TOCS e depois do TOCS para o IMU. Assim será necessário conhecer também a matriz de instalação TOCS⟶IMU, a qual descreve a transformação entre o sistemas de coordenadas da montagem TILT e o IMU.

Transformação para o corpo da aeronave

A matriz de instalação de IMU⟶BODY é também uma matriz 4×4 e descreve a orientação do sistema de coordenadas do IMU no sistema de coordenadas do corpo da aeronave (BODY). A fim de se definir esta matriz o utilizador deverá conhecer o sistema de coordenadas (ou referencial) de navegação (navigation frame). Os referenciais de navegação mais utilizados são: o ENU (East-North-Up), o NED (North-East-Down) e o NWU (North-West-Up). Note-se que para o sistema ENU o eixo y é o eixo de roll (R), o eixo dos x é o eixo do pitch (P) e o eixo dos z é o eixo do yaw (Y). Para o caso dos sistemas NED (ver figura 8.3.2 e NWU, o eixo dos x é o eixo do roll (R), o eixo dos y é o eixo do pitch (P) o eixo dos z é o eixo do yaw (Y). Por último observe-se também que num sistema directo, uma rotação contrária à do movimento dos ponteiros do relógio resulta num aumento dos valores dos ângulos. Como exemplo de matriz de transformação temos

$$R_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{BODY}} = \begin{matrix} 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 \end{matrix}$$

Transformação de coordenadas SOCS em coordenadas ECEF

Um ponto medido pelo digitalizador laser no sistema de coordenadas 3D interno do laser (SOCS) é transformado no sistema de coordenadas tridimensionais do WGS84 através de três matrizes de rotação e translação as quais envolvem 4 sistemas de coordenadas: o sistema de coordenadas interno SCOS, o sistema de coordenadas do corpo da aeronave (BODY), o sistema de coordenadas NED relativo a uma dada montagem da plataforma de aquisição de dados e o sistema de coordenadas geográfico cartesiano ECEF centrado na Terra. Considerando coordenadas homógeneas teremos:

$$R_{\mathrm{ECEF}}^{\mathrm{SOCS}} = R_{\mathrm{ECEF}}^{\mathrm{NED}} \times R_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{BODY}} \times R_{\mathrm{BODY}}^{\mathrm{SOCS}}$$

Note-se que o referencial de navegação (navigation frame) NED só é considerado nos casos em que os dados de trajectória do sistema IMU/GPS forem relativos a este sistema. Muitos autores não consideram este referencial porque assumem que os dados de trajectória são dados directamente em ECEF.

Passo 1: Transformação SOCS-BODY A primeira matriz ($R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}}$) a calcular transforma as coordenadas do sistema de coordenadas interno SOCS para o sistema de coordenadas ligado à aeronave (BODY). Para isso será necessário conhecer os três parâmetros de calibração (γ, β, α) designados por boresight angles (i.e os desvios angulares entre o sistema de coordenadas IMU e o sistema de coordenadas SOCS) relativos ao sistema de coordenadas BODY

$$R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}} = R_{\text{BODY}}^{\text{IMU}} \times R_{\text{IMU,TRANS}}^{\text{SOCS}} \times \left(R_{\text{BODY,ROT}}^{\text{IMU}}\right)^{-1} \times M_{\text{CAL,NED}} \times R_{\text{BODY,ROT}}^{\text{IMU}} \times R_{\text{IMU,ROT}}^{\text{SOCS}} \tag{8.1}$$

Atendendo a que $M_{\text{CAL,NED}} = R_Z(\gamma) \times R_Y(\beta) \times R_X(\alpha)$ e

$$R_Z(\gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_Y(\beta) = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{8.2}$$

$$R_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

virá

$$M_{\text{CAL,NED}} = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & s_\alpha c_\gamma s_\beta - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma s_\beta & 0 \\ c_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\gamma s_\beta & c_\alpha s_\gamma s_\beta - s_\alpha c_\gamma & 0 \\ -s_\beta & s_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

Como $R_{\text{BODY}}^{\text{IMU}} = I$ e designando por $[a, b, c]^T$ o vector translação, teremos uma para uma dada montagem

$$R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & s_\alpha c_\gamma s_\beta - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma s_\beta & 0 \\ c_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\gamma s_\beta & c_\alpha s_\gamma s_\beta - s_\alpha c_\gamma & 0 \\ -s_\beta & s_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}} = \begin{bmatrix} s_\gamma s_\alpha + c_\gamma s_\beta c_\alpha & c_\gamma c_\beta & c_\gamma s_\beta s_\alpha - s_\gamma c_\alpha & a \\ s_\gamma s_\beta c_\alpha - c_\gamma s_\alpha & c_\beta s_\gamma & c_\gamma c_\alpha + s_\gamma s_\beta s_\alpha & b \\ c_\beta c_\alpha & -s_\beta & c_\beta s_\alpha & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nesta equação as 6 matrizes traduzem consecutivamente:

1. uma rotação do sistema SOCS para o sistema IMU,
2. uma rotação do sistema IMU para o sistema BODY,
3. uma aplicação dos parâmetros de calibração (k_c, ν_c, ρ_c) de acordo com as equações 8.3 e 8.2
4. uma rotação para trazer de novo o ponto ao sistema IMU,
5. uma translação do centro do SOCS para o centro do IMU,
6. uma transformação do sistema IMU para o Sistema BODY.

Exercício 8.24

Dados os parâmetros de calibração boresigth do scanner roll ($\phi = 0.071$), pitch ($w = -0.155$), yaw ($k = -0.222$) e considerenado que as outras matrizes são as que foram indicadas nos exemplos anteriores calcule a matriz total de transformação $R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}}$

Solução 8.24

Substituidos os valores de roll pitch e yaw na equação obtemos

$$R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}} = \begin{bmatrix} -0.00271003 & 0.99998883 & 0.00387126 & 0.166 \\ -0.00122869 & -0.00387461 & 0.99999173 & 0.177 \\ 0.99999557 & 0.00270526 & 0.00123918 & -0.073 \\ 0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Transformação BODY-NED A segunda matriz $R_{\text{END}}^{\text{BODY}}$considera os valores do roll ($\mathscr{R}$), pitch ($\mathscr{P}$) and yaw ($\mathscr{Y}$) medidos pelo systema IMU/GPS num determinado instante t e os correspondentes acrescimos $(\Delta\mathscr{R}_i, \Delta\mathscr{P}_i, \Delta\mathscr{Y}_i)$ interpolados para o timestamp i da emissão do pulso laser. Depois aplica estes valores ao sistema de coordenadas BODY de forma a que estes dados estejam disponíveis no sistema de coordenadas NED:

$$R_{\text{NED}}^{\text{BODY}} = R_Z(\mathscr{Y}_i) R_Y(\mathscr{P}_i) R_X(\mathscr{R}_i)$$

isto é

$$R_{\text{NED}}^{\text{BODY}} = \begin{bmatrix} c_{\mathscr{Y}} c_{\mathscr{P}} & s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} - c_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} & s_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} + c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} & 0 \\ c_{\mathscr{P}} s_{\mathscr{Y}} & c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} + s_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} & c_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} - s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} & 0 \\ -s_{\mathscr{P}} & s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{P}} & c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{P}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 8.25

Considerando os parametros de calibração do scanner dados no exercício anterior calcule as coordenadas NED dos pontos dados no exercício seguinte.

Solução 8.25

Tendo em conta a matriz $R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}}$ as coordenadas BODY dum ponto $[x, y, z]^T$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} s_k s_\phi + c_k s_w c_\phi & c_k c_w & c_k s_w s_\phi - s_k c_\phi & a \\ s_k s_w c_\phi - c_k s_\phi & c_w s_k & c_k c_\phi + s_k s_w s_\phi & b \\ c_w c_\phi & -s_w & c_w s_\phi & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + x\left(s_k s_\phi + c_k s_w c_\phi\right) - z\left(s_k c_\phi - c_k s_w s_\phi\right) + y\, c_k c_w \\ b - x\left(c_k s_\phi - s_k s_w c_\phi\right) + z\left(c_k c_\phi + s_k s_w s_\phi\right) + y\, c_w s_k \\ c - y\, s_w + x\, c_w c_\phi + z\, c_w s_\phi \\ 1 \end{bmatrix}$$

No caso de termos dois pontos podemos fazer

$$\begin{bmatrix} s_k s_\phi + c_k s_w c_\phi & c_k c_w & c_k s_w s_\phi - s_k c_\phi & a \\ s_k s_w c_\phi - c_k s_\phi & c_w s_k & c_k c_\phi + s_k s_w s_\phi & b \\ c_w c_\phi & -s_w & c_w s_\phi & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

teremos

$$\begin{bmatrix} a + x_1\left(s_k s_\phi + c_k s_w c_\phi\right) - z_1\left(s_k c_\phi - c_k s_w s_\phi\right) + y_1 c_k c_w \\ b - x_1\left(c_k s_\phi - s_k s_w c_\phi\right) + z_1\left(c_k c_\phi + s_k s_w s_\phi\right) + y_1 c_w s_k \\ c - y_1 s_w + x_1 c_w c_\phi + z_1 c_w s_\phi \\ 1 \end{bmatrix.$$
$$\left. \begin{matrix} a + x_2\left(s_k s_\phi + c_k s_w c_\phi\right) - z_2\left(s_k c_\phi - c_k s_w s_\phi\right) + y_2 c_k c_w \\ b - x_2\left(c_k s_\phi - s_k s_w c_\phi\right) + z_2\left(c_k c_\phi + s_k s_w s_\phi\right) + y_2 c_w s_k \\ c - y_2 s_w + x_2 c_w c_\phi + z_2 c_w s_\phi \\ 1 \end{matrix} \right]$$

Isto significa que no caso de termos vários pontos P dados num vector de dimensão $(4 \times n)$ a transformada desses pontos pode ser obtida por

$$Q = R \times P$$

Neste caso particular teremos:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.0027100 & 0.9999888 & 0.0038713 & 0.166 \\ -0.0012287 & -0.0038746 & 0.9999917 & 0.177 \\ 0.9999956 & 0.0027053 & 0.0012392 & -0.073 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 1.000 \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} 1460.915 & 1460.277 & 1458.662 & 1476.841 & 1489.048 \\ -0.342 & -0.329 & -0.272 & -0.200 & 0.067 \\ 626.085 & 576.595 & 378.933 & -0.365 & -855.524 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$Q = \begin{bmatrix} -1.7113818 & -1.8882416 & -2.5920666 & -4.0376942 & -7.1143213 \\ 624.46314 & 574.97428 & 377.31568 & -2.0018018 & -857.16976 \\ 1461.6104 & 1460.9111 & 1459.0514 & 1476.7605 & 1487.9084 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Passo3: Transformação NED-ECEF A terceira matriz ($R_{\text{ECEF}}^{\text{NED}}$) tem em consideração a posição medida pelo receptor GPS. Para esse fim é necessário ter em conta a definição do modelo da Terra como um elipsoide de revolução achatado com um semi-eixo maior a e um achatamento f. Adicionalmente, podemos ainda aplicar translações constantes relativamente às coordenadas Este (E), Norte (N) e Altura (H) para cada fiada ou transladar todas as fiadas como um todo. Note-se que esta característica é utilizada quando o ajustamento dos dados scan calcularam:

- os vectores de translação para a totalidade dos conjuntos de dados (por exemplo a posição absoluta foi medida
- os vectores de translação para cada fiada do varrimento (porque podem existir, por exemplo, derivas temporais do GPS sobre a posição medida) que minimizam o erro médio quadrático.

Os vectores de translação $(\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$ para cada fiada e os vectores translação para todas as fiadas $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ são dados relativamente ao sistema de coordenadas ECEF. A matriz M_{POP} é suposto mapear as translações do sistema de coordenadas ECEF para qualquer posição da Terra de acordo com as translações nas direcções este, norte e altura do sistemas de coordenadas local.

$$R_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} = \begin{bmatrix} -\cos\lambda\sin\phi & -\sin\lambda & -\cos\lambda\cos\phi & X_{\text{WGS84}} \\ -\sin\lambda\sin\phi & \cos\lambda & -\sin\lambda\cos\phi & Y_{\text{WGS84}} \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi & Z_{\text{WGS84}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + M_{\text{POP}} \begin{bmatrix} \Delta X + \Delta X_i \\ \Delta Y + \Delta Y_i \\ \Delta Z + \Delta Z_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$M_{\text{POP}} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\phi & \cos\lambda\cos\phi & X_{\text{WGS84}} \\ \cos\lambda & -\sin\lambda\sin\phi & \sin\lambda\cos\phi & Y_{\text{WGS84}} \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & Z_{\text{WGS84}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} X_{\text{WGS84}} \\ Y_{\text{WGS84}} \\ Z_{\text{WGS84}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\lambda\cos\phi \\ (N+h)\sin\lambda\cos\phi \\ (N(1-f(2-f))+h)\sin\phi \end{bmatrix}; N = \frac{a}{\sqrt{(1-f(2-f))+h)\sin^2\phi}} \tag{8.4}$$

Para o elipsóide WGS84 os parâmetros $a = 6378137$ m e $f = 1/298.257223563$.

Exercício 8.26

Sabendo que a informação da trajectória é dada para alguns tempos GPS por

tempo GPS	Long	Lat	H	Roll	Pitch	Yaw
383305.482	38.8087849	-8.0539818	1751.705	0.2593	0.9664	95.3528
383305.486	38.8087846	-8.0539789	1751.706	0.2571	0.9686	95.3539
383305.490	38.8087843	-8.0539759	1751.706	0.2575	0.9681	95.3542
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
383643.999	38.79373290	352.03556560	1747.515	0.9458	1.5028	278.0447
383644.003	38.79373320	352.03556260	1747.521	0.9499	1.5016	278.0466
383644.003	38.79373350	352.03555950	1747.527	0.9500	1.5017	278.0493

calcule as coordenadas NED e ECEF dos seguintes pontos laser

time	range	tetha	x	y	z
383305.485763	1589.420	66.792	1460.915	-0.342	626.085
383305.486000	1569.991	68.442	1460.277	-0.329	576.595
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
383644.000009	1444.156	98.852	1426.878	-0.151	-222.723
383644.000013	1444.331	98.883	1426.932	-0.150	-223.510

Solução 8.26

Seja $[x, y, z]$ as coordenadas SOCS dum ponto LIDAR num dado instante (timestamp) t. As coordenadas ECEF deste ponto são obtidas a partir de

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = R^{\text{NED}}_{\text{ECEF}} \times R^{\text{BODY}}_{\text{NED}} \times R^{\text{SOCS}}_{\text{BODY}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $R^{\text{SOCS}}_{\text{BODY}}$ é dado pela equação , As coordenadas NED são obtidas calculando a matriz de transformação $R^{\text{BODY}}_{\text{NED}}$ para cada ponto. Como exemplo, iremos apenas mostrar as matrizes de transformação que obteremos para o ponto laser correspondente ao timestamp $t = 383644.000009$. A primeira matriz é constante para todos os pontos e é calculada tendo em conta os valores do boresight e do leverarm

$$R^{\text{SOCS}}_{\text{BODY}} = \begin{bmatrix} -0.002710 & 0.999989 & 0.00387 & 0.166 \\ -0.001229 & -0.003875 & 0.999991 & 0.177 \\ 0.999996 & 0.002705 & 0.001239 & -0.073 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Para obtermos a segunda matriz iremos interpolar linearmente os valores de R, P e Y nos dados da trajectória para o timestamp t, o que dá

$$R_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{BODY}} = \begin{bmatrix} 0.139906 & 0.999989 & -0.012693 & 0.000000 \\ -0.989818 & 0.139506 & -0.028272 & 0.000000 \\ -0.026221 & 0.016519 & 0.999520 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

Para obtermos a terceira matriz iremos interpolar linearmente os valores de ϕ, λ e h referentes ao centro do sensor IMU no instante t, o que dá

$$R_{\mathrm{ECEF}}^{\mathrm{NED}} = \begin{bmatrix} -0.620475 & 0.138558 & -0.771889 & 4931040.985424 \\ 0.086809 & 0.990354 & 0.107993 & -689891.617982 \\ 0.779406 & 0.000000 & -0.626519 & 3975590.553474 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

Finalmente, as coordenadas dos diferentes diferentes pontos serão dadas por

time	X	Y	Z
383305.485763	4928171.526	-697379.623	3975496.992
383305.486000	4928142.277	-697370.996	3975535.970
383644.000009	4930083.319	-689825.239	3974511.773
383644.000013	4930083.758	-689825.410	3974511.140

Exercício 8.27

Deduza a matriz de rotação $M_{\mathrm{ECEF}}^{\mathrm{NED}}$ de ordem 3, a qual permite rodar o sistema de coordenadas local NED ligado ao sensor IMU, para a posição do sistema de coordenadas ECEF:

$$M_{\mathrm{ECEF}}^{\mathrm{NED}} = \begin{bmatrix} -\cos\lambda\sin\phi & -\sin\lambda & -\cos\lambda\cos\phi \\ -\sin\lambda\sin\phi & \cos\lambda & -\sin\lambda\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix}$$

onde λ, ϕ são as coordenadas do centro do sistema IMU.

Solução 8.27

Considerando as seguintes matrizes de rotação elementares

$$R_Z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R_Y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

e efectuando as duas rotações sucessivas

$$R_Z(\lambda)R_Y(-\phi) = \begin{bmatrix} \cos\lambda\cos\phi & -\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\phi \\ \cos\phi\sin\lambda & \cos\lambda & -\sin\lambda\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $x' = -z$; $y' = y$ e $z' = x$ teremos

$$M = \begin{bmatrix} \cos\lambda\cos\phi & -\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\phi \\ \cos\phi\sin\lambda & \cos\lambda & -\sin\lambda\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\lambda\sin\phi & -\sin\lambda & -\cos\lambda\cos\phi \\ -\sin\lambda\sin\phi & \cos\lambda & -\cos\phi\sin\lambda \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix}$$

8.4 Calibração do sistema

O processo de calibração é habitualmente realizado nos seguintes passos (Habib et al., 2010):

- Calibração laboratorial: é conduzida pelo fabricante do sistema e tem como objectivo calibrar cada uma das componentes individualemente. Além disso, são também determinadas a excentricidade e o desalinhamento entre o espelho laser e o IMU, assim como a excentricidade entre o IMU e o ponto de referência do sensor.
- Calibração da plataforma: é determinada a excentricidade entre o ponto de referência do sensor laser e a antena GPS.
- Calibração em voo: são determinados os parâmetros do sistema LiDAR utilizando um campo de calibração que é composto por superfícies de controlo. As discrepâncias observadas entre as superfícies de controlo e as mesmas superfícies derivadas do LiDAR são utilizadas para determinar os desvios e erros sistemáticos dos parâmetros do sistema (ex. os ângulos pitch and roll de boresight e os parâmetros de escala).

8.4.1 Método expedito

Neste método os erros sistemáticos do sistema (incluindo os desvios constantes ou bias) são estimados utilizando as discrepâncias entre fiadas sobrepostas do LiDAR seguindo uma metodologia em dois passos: i) em primeiro lugar são determinadas as discrepâncias entre fiadas paralelas sobrepostas; ii) seguidamente e com base nestas discrepâncias, são estimados os erros sistemáticos.

Assim, na presença dos erros sistemáticos descritos previamente, as discrepâncias entre fiadas paralelas podem ser modeladas por três translações (X_T, Y_T, Z_T) e por um ângulo de rotação em torno da linha de voo (ϕ). A equação seguinte, dá-nos a relação entre os erros sistemáticos e as discrepâncias (X_T, Y_T, Z_T, ϕ) entre pontos conjugados contaminados pelos erros sistemáticos em duas linhas de voo que foram voadas em direcções opostas.

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Delta X - 2H\Delta\varphi \mp \frac{D}{H}\Delta\rho \mp H\Delta\theta \\ 2\Delta Y + 2H\Delta\omega \mp D\Delta\kappa \\ 2\Delta\phi \pm 2\Delta\theta \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

No entanto, se as fiadas tiverem 100% de sobreposição (o que é raro) as equações anteriores reduzem-se a

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Delta X - 2H\Delta\varphi \\ 2\Delta Y + 2H\Delta\omega \\ 2\Delta\varphi \end{bmatrix}$$

Para duas fiadas voadas na mesma direcção as relações seguintes modelam as discrepâncias entre as fiadas e os erros sistemáticos $(\Delta\varphi, \Delta\kappa, \Delta\rho, \Delta\theta)$:

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_Y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp\frac{D}{H}\Delta\rho \mp H\Delta\theta \\ \mp D\Delta\kappa \\ \pm D\Delta\phi \\ \pm 2\Delta\theta \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

Nestas equações os sinais múltiplos ($\mp$ e $\pm$) dependem da relação entre as fiadas voadas para a frente (forward) e para trás (backwards), sendo o sinal superior escolhido nos casos em que a fiada para a frente está à direita da fiada para trás.

Considerando as equações 8.5 e 8.6 teremos então um sistema de 7 equações a 7 incógnitas (ΔX, ΔY, $\Delta\omega$, $\Delta\varphi$, $\Delta\kappa$, $\Delta\rho$, $\Delta\theta$)

Modelo matemático

Tendo em conta a equação de georeferênciação dum ponto LiDAR e considerando que:

1. estamos na presença dum scanner linear cujo varrimento é feito numa direcção perpendicular à direcção do voo.

Nestas condições as discrepâncias entre fiadas paralelas

$$\begin{vmatrix} X_u & Y_u & Z_u & 1 \\ X_a & Y_a & Z_a & 1 \\ X_b & Y_b & Z_b & 1 \\ X_c & Y_c & Z_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Mas como

$$\begin{bmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} X_q \\ Y_q \\ Z_q \end{bmatrix}$$

e

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta_\kappa & \Delta_\phi \\ \Delta_\kappa & 1 & \Delta_\omega \\ -\Delta_\phi & \Delta_\omega & 1 \end{bmatrix}$$

virá

$$\begin{bmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_T + X_q - \Delta_\kappa Y_q + \Delta_\phi Z_q \\ Y_T + Y_q + \Delta_\kappa X_q + \Delta_\omega Z_q \\ Z_T + Z_q - \Delta_\phi X_q + \Delta_\omega Y_q \end{bmatrix}$$

8.4.2 Método rigoroso

A ideia básica deste método consiste em expressar separadamente, para cada ponto, os parâmetros de calibração do sistema da equação de georeferenciação directa e condicionar geometricamente que um dado grupo de pontos pertença a uma dada superfície com uma forma conhecida, por exemplo um plano. Assim, dado um plano s definido através de 4 parâmetros $[s_1, s_2, s_3, s_4]$, um dado ponto p de coordenadas $[x, y, z]$ pertence ao plano se:

$$s_1 x + s_2 y + s_3 z + s4 = 0$$

Esta expressão pode ser escrita na forma de um produto interno, fazendo $\vec{r} = [x, y, z, 1]^T$ e

$$\langle \vec{s}, \vec{r} \rangle = 0$$

Considerando q entidades planares, a única informação à priori que é assumida pelo método reside apenas na forma e não sobre a posição e orientação destas entidades. Assim, os $4q$ parâmetros dos diferentes planos são estimados conjuntamente com os parâmetros de calibração num modelo de ajustamento combinado que utiliza a informação da trajectória obtida pelos sensores GPS/INS embarcados na aeronave e a informação do sensor LiDAR (distância e ângulo). Para adequar o procedimento ao volume de dados LiDAR e GPS/INS, a contribuição de cada ponto laser para as equações normais é formada sequencialmente.

Equação de georeferenciação e parâmetros de calibração

Utilizando um sistema de coordenadas cartesiano cartográfico arbitrário ($\mathscr{S}_m$) a georeferenciação directa duma medição LiDAR num instante t (ou época i) é dada por[1]

$$\vec{r} = \vec{g} + R_b^m[(I + \Omega_{b*}^b)T_s^{b^*}\vec{\rho} + \vec{a}] \tag{8.7}$$

onde:

- $\vec{r} = [x, y, z]^T$ são as coordenadas $\mathscr{S}_m$ do footprint LiDAR no instante t,
- $\vec{g} = [X, Y, Z]^T$ são as coordenadas $\mathscr{S}_m$ do centro IMU no instante t,
- $R_b^m = f(\mathscr{R}, \mathscr{P}, \mathscr{Y})$ é a matriz de orientação da plataforma IMU que permite passar do sistema de coordenadas body $\mathscr{S}_b$ para o sistema de coordenadas $\mathscr{S}_m$ parametrizada pelos ângulos roll ($\mathscr{R}$), pitch ($\mathscr{P}$) e yaw ($\mathscr{Y}$), os quais serão interpolados para o ponto i num dado instante t (timestamp),
- $\Omega_{b*}^b = f(\alpha, \beta, \gamma)$ é a matriz de boresight parametrizada pelos ângulos de roll (α), pitch (β) e yaw (γ),
- $T_s^{b^*}$ a matriz de rotação, conhecida previamente, que permite passar do referencial do scanner LiDAR para o referencial IMU relativo a uma dada montagem.
- $\vec{\rho} = [(\rho + \Delta\rho)\sin\theta, 0, (\rho + \Delta\rho)\cos\theta]^T$ é o vector de localização do footprint laser no relferencial do scanner, o qual é, para cada instante t, função da distância (*range*) ρ, do offset constante $\Delta\rho$ e do ângulo de scan θ,
- θ é o ângulo (ou mais precisamente do encoder angular) do scanner LiDAR no instante t (podemos também adicionar um offset $\Delta\theta$ ou qualquer outra influência sobre a direcção do feixe)
- $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ é o lever-arm (offset) entre os centros das medições do IMU e do LIDAR o qual é expresso no referencial IMU.

Na definição anterior, a orientação do referencial do scanner LiDAR relativamente ao referencial IMU, para uma dada montagem M, é decomposta em duas rotações sucessivas

$$M_s^b = (I + \Omega_{b*}^b)T_s^{b^*}$$

onde $T_s^{b^*}$ representa a orientação aproximada dos eixos, conhecida previamente, e $(I + \Omega_{b*}^b)$ uma matriz de pequenas rotações definida como matriz de boresight. Note-se que esta definição assume que a incerteza máxima sobre o boresight é apenas de alguns graus, que é o que habitualmente se passa na prática.

Modelo matemático

Modelo funcional Representando por $\vec{s}_j = [a_j, b_j, c_j, d_j]^T$ um plano qualquer j do espaço 3D, a equação de observação para um ponto objecto i, com coordenadas $[x_i, y_i, z_i]^T$ e que pertença a este plano, é

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j z_i + d_j = 0$$

Nesta equação os parâmetros a, b e c representam os cossenos directores do vector normal ao plano e d a distância ortogonal (com sinal negativo) entre o plano e a origem do sistema de coordenadas. A expressão anterior também pode ser escrita na forma de produto interno entre dois vectores

$$\left\langle \vec{s}_j \quad , \begin{bmatrix} \vec{r}_i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \tag{8.8}$$

[1] Na notação de Skaloud, a matriz R_b^m indica a rotação do sistema ($\mathscr{S}_b$) para o sistema ($\mathscr{S}_m$).

De forma mais genérica esta equação pode escrever na forma

$$f(\vec{l},\vec{x}_1,\vec{x}_2)=0$$

cuja linearização nos conduz a

$$f(\vec{l}+\hat{v},\vec{x}_1^0+\hat{\delta}_1,\vec{x}_2^0+\hat{\delta}_2)=0$$

onde:

- $\vec{r}_i = h(\vec{l}_i,\vec{x}_1)$ é a posição do vector do ponto observado i,
- $\vec{l}_i = [X,Y,Z,\mathscr{R},\mathscr{P},\mathscr{Y},\rho,\theta]_i^T$ é o vector das observações para o ponto i o qual é função dos 6 parâmetros de trajectória estimados e das duas observações do sensor LiDAR,
- $\vec{x}_1 = [\alpha,\beta,\gamma,d_\rho]^T$ é o vector dos parâmetros de calibração (ou seja o que pretendemos determinar no ajustamento),
- $\vec{x}_2 = [a,b,c,d]_j^T$ é o vector dos parâmetros que definem os q planos,
- o sobreescrito $(^0)$ designa os valores iniciais dos parametros,
- o sobreescrito $(\hat{\ })$ designa as quantidades estimadas, as quais não são mais do que: i) as correções aos parametros de calibração δ_1, ii) as correções aos parâmetros do plano δ_2 e iii) os resíduos das 8 observações l_i para cada ponto.

Se designarmos por $R_y(\theta)$ a matriz de rotação em torno do eixo dos y do referencial do scanner e por $\vec{\tau}$ o vector posição do footprint no mesmo referencial, e considerando

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = T_s^{b^*} R_y(\theta)\vec{\tau} = T_s^{b^*} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho + d_\rho \end{bmatrix} = T_s^{b^*} \begin{bmatrix} (\rho+d_\rho)\sin\theta \\ 0 \\ (\rho+d_\rho)\sin\theta \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{bmatrix}$$

a equação de georeferenciação 8.7, pode ser reescrita na forma

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + R_b^m \left(\left(I + \Omega_{b*}^b\right) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right).$$

Considerando que os ângulos de boresight (α,β,γ) são pequenos então a matriz de rotação do boresight pode escrever-se como

$$\Omega_{b*}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo esta expressão na equação anterior atendendo a que I é matriz identitidade teremos

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + R_b^m \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right)$$

isto é

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + R_b^m \left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right)$$

ou ainda

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} X + R_{11}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{12}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{13}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right) \\ Y + R_{21}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{22}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{23}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right) \\ Z + R_{31}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{32}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{33}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right) \end{bmatrix}$$

onde

$$R_b^m = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -c_\lambda s_\phi & -s_\lambda & -c_\lambda c_\phi \\ -s_\lambda s_\phi & c_\lambda & -c_\phi s_\lambda \\ c_\phi & 0 & -s_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\mathscr{Y}} c_{\mathscr{P}} & s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} - c_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} & s_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} + c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} \\ c_{\mathscr{P}} s_{\mathscr{Y}} & c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} + s_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} & c_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} - s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} \\ -s_{\mathscr{P}} & s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{P}} & c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{P}} \end{bmatrix}$$

e $[X, Y, Z]^T = [X_{\text{WGS84}}, Y_{\text{WGS84}}, Z_{\text{WGS84}}]^T$ dado pela expressão 8.4.

Substituindo esta expressão na equação 8.8 teremos finalmente

$$\left\langle \vec{s}_j \quad , \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + R_b^m\Big|_i \left(\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + U_i \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right)}{1} \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \tag{8.9}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} a_j \big[X + R_{11}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{12}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{13}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right)\big]_i \\ + b_j \big[Y + R_{21}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{22}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{23}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right)\big]_i \\ + c_j \big[Z + R_{31}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{32}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{33}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right)\big]_i \\ + d_j = 0 \end{aligned}$$

Note-se que os cossenos directores do plano deverão satisfazer a seguinte condição

$$g(\vec{x}_2) = a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 - 1 = 0 \tag{8.10}$$

Considerando que temos $i = 1, \ldots, p$ pontos e $j = 1, \ldots, q$ planos, podemos formar

# condições	$m = p$
# incógnitas	$u = u_1 + u_2 = 4 + 4q$
# observações	$n = 8p$
# constrangimentos	$c = q$
# graus de liberdade	$r = p - 4 - 3q$

Note-se que no caso de considerarmos que o offset da distância (d_ρ) não é estimado, então $u = 3 + 4q$.

Exercício 8.28

Utilizando as matrizes de orientação e a montagem NED do sensor Riegl deduza as expressões para as equações de observação.

Solução 8.28

Como a equação do LiDAR do método rigoroso é dada por

$$\vec{r} = \vec{g} + R_b^m (M_s^b \vec{\rho} + \vec{a}) = \vec{g} + R_b^m M_s^b \vec{\rho} + R_b^m \vec{a}$$

e atendendo a que as transformações de coordenadas para o instrumento Riegl foram dadas em coordenadas homogéneas pela expressão $[\mathbf{x}_3, 1]^T = R_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} \times R_{\text{NED}}^{\text{BODY}} \times R_{\text{BODY}}^{\text{SOCS}} \times [\mathbf{x}, 1]$, reescrevendo as expressões utlizando transformações no espaço 3D teremos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \left(R_{\gamma,\beta,\alpha} \times R_{\text{NED}}\right)\mathbf{x} + T_{a,b,c} \\
\mathbf{x}_2 &= \left(R_{\mathscr{Y},\mathscr{P},\mathscr{R}}\right)\mathbf{x}_1 \\
\mathbf{x}_3 &= (R_{\phi,\lambda,h})\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

ou seja

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_0 + R_{\phi,\lambda,h} R_{Y,P,R} T_{a,b,c} + R_{\phi,\lambda,h} R_{Y,P,R} R_{\gamma,\beta,\alpha} R_{\text{NED}} \mathbf{x}$$

donde se conclui que

$$R_b^m = R_{\phi,\lambda,h} R_{Y,P,R} = \begin{bmatrix} -c_\lambda s_\phi & -s_\lambda & -c_\lambda c_\phi \\ -s_\lambda s_\phi & c_\lambda & -s_\lambda c_\phi \\ c_\phi & 0 & -s_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\mathscr{Y}} c_{\mathscr{P}} & s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} - c_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} & s_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} + c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} \\ c_{\mathscr{P}} s_{\mathscr{Y}} & c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} + s_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} & c_{\mathscr{R}} s_{\mathscr{Y}} s_{\mathscr{P}} - s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{Y}} \\ -s_{\mathscr{P}} & s_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{P}} & c_{\mathscr{R}} c_{\mathscr{P}} \end{bmatrix}$$

e

$$M_s^b = R_{\gamma,\beta,\alpha} R_{\text{NED}} = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & s_\alpha c_\gamma s_\beta - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma s_\beta \\ c_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\gamma s_\beta & c_\alpha s_\gamma s_\beta - s_\alpha c_\gamma \\ -s_\beta & s_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearização do modelo funcional Neste caso particular a função objectivo a minimisar é a soma pesada do quadrado dos resíduos das observações e das condições sujeito aos constrangimentos dos dois modelos funcionais:

$$\begin{gathered} \min\left\{f(\vec{l} + \hat{v}, \vec{x}_1^0 + \hat{\delta}_1, \vec{x}_2^0 + \hat{\delta}_2)\right\} \\ \text{s.a } g(\vec{x}_2) = 0 \end{gathered}$$

Dado que as observações e os parâmetros das equações de observação do ponto-no-plano não são separáveis e cada condição inclui mais do que uma observação, é necessário utilizarmos o modelo de ajustamento combinado (i.e. o modelo de Gauss-Helmert). Como existem dois conjuntos de incógnitas (i.e $\vec{x}_1, \vec{x}_2$) o sistema de equações lineares terá a forma:

$$\underset{(m,u_1)}{A_1}\,\underset{(u_1,1)}{\hat{\delta}_1} + \underset{(m,u_2)}{A_2}\,\underset{(u_2,1)}{\hat{\delta}_2} + \underset{(m,n)}{B}\,\underset{(n,1)}{\hat{v}} + \underset{(m,1)}{w} = \underset{(m,1)}{0} \tag{8.11}$$

onde

- $A_1 = \partial f / \partial \vec{x}_1$ e $A_2 = \partial f / \partial \vec{x}_2$ são as correspondentes matrizes de coeficientes (design matrices) das derivadas parciais do funcional 8.9, em relação aos parametros de calibração e aos parâmetros dos planos (considerando m pontos e q planos),

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_1}{\partial d_\rho} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_2}{\partial d_\rho} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_m}{\partial \beta} & \frac{\partial f_m}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_m}{\partial d_\rho} \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \frac{\partial f_1}{\partial c_1} & \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial c_q} & \frac{\partial f_1}{\partial dq} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial c_1} & \frac{\partial f_2}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial c_q} & \frac{\partial f_2}{\partial dq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial a_1} & \frac{\partial f_m}{\partial b_1} & \frac{\partial f_m}{\partial c_1} & \frac{\partial f_m}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial c_q} & \frac{\partial f_m}{\partial dq} \end{bmatrix}$$

- $\hat{\delta}_1$ e $\hat{\delta}_2$ são os correspondentes vectores de correcções a adicionar aos valores aproximados dos parâmetros de calibração e dos diferentes planos,

$$\hat{\delta}_1 = [\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma, \Delta d_\rho]^T; \hat{\delta}_2 = [\Delta a_1, \Delta b_1, \Delta c_1, \Delta d_1, \Delta a_2, \Delta b_2, \Delta c_2, \Delta d_2, \ldots, \Delta c_2, \Delta d_2]^T$$

- $B = \partial f / \partial \vec{l}$ é a matriz dos coeficientes das derivadas parciais do funcional 8.9 em relação às observações,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{R}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{P}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{Y}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \rho_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{R}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{P}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{Y}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \rho_p} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \frac{\partial f_m}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \mathcal{R}_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \mathcal{P}_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \mathcal{Y}_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \rho_p} & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}$$

- $\hat{v}$ é o vector dos resíduos,

$$v = [v_{X_1}, v_{Y_1}, \dots, v_{\theta_p}]^T$$

- $w = f(\vec{l}, \vec{x}_1^0, \vec{x}_2^0)$ é o valor do funcional 8.9 avaliado com os valores actuais das aproximações $\vec{x}_1^0$ e $\vec{x}_2^0$, ou seja o vector de erro de fecho.

As expressões para as matrizes A_1, A_2, e B são deduzidas, a partir da equação 8.9. De facto, considerando que $\vec{x}_1 = [\alpha, \beta, \gamma]^T$ teremos:

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \left\langle \vec{s}_j, [\vec{r}_i, 1]^T \right\rangle = \langle \vec{s}_j, [\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{x}_1}, 1]^T \rangle$$

Mas como

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\vec{r} = R_b^m \begin{bmatrix} 0 \\ -w \\ v \end{bmatrix}; \frac{\partial}{\partial \beta}\vec{r} = R_b^m \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ -u \end{bmatrix}; \frac{\partial}{\partial \gamma}\vec{r} = R_b^m \begin{bmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}$$

virá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= a(vR_{13} - wR_{12}) + b(vR_{23} - wR_{22}) + c(vR_{33} - wR_{32}) + d \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= a(wR_{11} - uR_{13}) + b(wR_{21} - uR_{23}) + c(wR_{31} - uR_{33}) + d \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} &= a(R_{12} - vR_{11}) + b(uR_{22} - vR_{21}) + c(uR_{32} - vR_{31}) + d \end{aligned}$$

Considerando agora que temos q planos s_j e atendendo a que $\vec{x}_2 = [a_j, b_j, c_j, d_j]^T$

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} \left\langle \vec{s}_j, [\vec{r}_i, 1]^T \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{s}_j}{\partial \vec{x}_2}, [\vec{r}_i, 1]^T \right\rangle$$

Mas como

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial \vec{s}_j}{\partial b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial \vec{s}_j}{\partial c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial \vec{s}_j}{\partial d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

virá

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= X + R_{11}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{12}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{13}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right) \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= Y + R_{21}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{22}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{23}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right) \\ \frac{\partial f}{\partial c} &= Z + R_{31}\left(u + a_x - v\gamma + w\beta\right) + R_{32}\left(v + a_y + u\gamma - w\alpha\right) + R_{33}\left(w + a_z - u\beta + v\alpha\right) \\ \frac{\partial f}{\partial d} &= 1 \end{aligned}$$

Se consideramos que $\vec{l} = [X, Y, Z, \mathscr{R}, \mathscr{P}, \mathscr{Y}]$ virá

$$B = \frac{\partial}{\partial \vec{l}} \left\langle \vec{s}_j, [\vec{r}_i, 1]^T \right\rangle = \langle \vec{s}_j, [\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{l}}, 1]^T \rangle$$

Por outro lado, como $\vec{r} = \vec{g} + R_b^m M_s^b \vec{\rho} + R_b^m \vec{d}$ teremos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{l}} + \left(\frac{\partial R_b^m}{\partial \vec{l}} \right) M_s^b \vec{\rho} + \left(\frac{\partial R_b^m}{\partial \vec{l}} \right) \vec{d}$$

Mas como,

$$\frac{\partial R_b^m}{\partial \mathscr{R}} = M_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} \begin{bmatrix} 0 & \sin\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} + \cos\mathscr{R}\cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{P} & \cos\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} - \cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{P}\sin\mathscr{R} \\ 0 & \cos\mathscr{R}\sin\mathscr{P}\sin\mathscr{Y} - \cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{R} & -\cos\mathscr{R}\cos\mathscr{Y} - \sin\mathscr{P}\sin\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} \\ 0 & \cos\mathscr{P}\cos\mathscr{R} & -\cos\mathscr{P}\sin\mathscr{R} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial R_b^m}{\partial \mathscr{P}} = M_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} \begin{bmatrix} -\cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{P} & \cos\mathscr{P}\cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{R} & \cos\mathscr{P}\cos\mathscr{R}\cos\mathscr{Y} \\ -\sin\mathscr{P}\sin\mathscr{Y} & \cos\mathscr{P}\sin\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} & \cos\mathscr{P}\cos\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} \\ -\cos\mathscr{P} & -\sin\mathscr{P}\sin\mathscr{R} & -\cos\mathscr{R}\sin\mathscr{P} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial R_b^m}{\partial \mathscr{Y}} = M_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} \begin{bmatrix} -\cos\mathscr{P}\sin\mathscr{Y} & -\cos\mathscr{R}\cos\mathscr{Y} - \sin\mathscr{P}\sin\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} & \cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{R} - \cos\mathscr{R}\sin\mathscr{P}\sin\mathscr{Y} \\ \cos\mathscr{P}\cos\mathscr{Y} & \cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{P}\sin\mathscr{R} - \cos\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} & \sin\mathscr{R}\sin\mathscr{Y} + \cos\mathscr{R}\cos\mathscr{Y}\sin\mathscr{P} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial g}{\partial Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial g}{\partial Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial X} = a + d; \frac{\partial f}{\partial Y} = b + d; \frac{\partial f}{\partial Z} = c + d$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \mathscr{R}} = \langle [a, b, c, d]^T, \left[\frac{\partial R_b^m}{\partial \mathscr{R}} M_s^b \vec{\rho} + \frac{\partial R_b^m}{\partial \mathscr{R}} \vec{d}, 1 \right]^T$$

O funcional de constrangimento 8.10 sobre os cossenos directores (i.e a sua soma dos quadrados deverá ser igual à unidade) é implementado como um parâmetro pesado de constrangimento, o qual toma essencialemente a forma duma equação de observação clássica para a qual a observação é zero, isto é

$$a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 - 1 = \hat{v}_c$$

A forma matricial linearizada destas equações é dada por:

$$\underset{(c,u_2)}{G} \ \underset{(u_1,1)}{\hat{\delta}_2} + \underset{(c,1)}{w_c} = \underset{(c,1)}{\hat{v}_c} \tag{8.12}$$

onde:

- $G = \partial g / \partial \vec{x}_2$ é a matriz dos coeficientes das derivadas parciais dos funcionais de constrangimento g tomadas relativamente aos parametros do plano,

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial a_1} & \frac{\partial g_1}{\partial b_1} & \frac{\partial g_1}{\partial c_1} & \frac{\partial g_1}{\partial d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial a_1} & \frac{\partial g_2}{\partial b_1} & \frac{\partial g_2}{\partial c_1} & \frac{\partial g_2}{\partial d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial g_{12}}{\partial c_2} & \frac{\partial g_{12}}{\partial c_2} & \frac{\partial g_{12}}{\partial c_2} & \frac{\partial g_{12}}{\partial d_2} \end{bmatrix}$$

- $w_c = g(\vec{x}_2^0)$ é o vector do erro de fecho do funcional de constrangimento,
- $\hat{v}$ é o vector dos resíduos dos constrangimentos.

Exercício 8.29

Considerando que $\vec{x}_1 = [\alpha, \beta, \gamma]$ deduza as equações de observação para o caso de ter 2 planos com 6 pontos (supondo que os seis primeiros pertencem ao primeiro plano e os outros seis ao segundo) em cada plano.

Solução 8.29

Neste caso vamos ter

$$\left\|\begin{array}{lc} \text{\# condições} & m = p = 12 \\ \text{\# incógnitas} & u = u_1 + u_2 = 3 + 4q = 11 \\ \text{\# observações} & n = 8p = 96 \\ \text{\# constrangimentos} & c = q = 2 \\ \text{\# graus de liberdade} & r = p - 3 - 4q = 1 \end{array}\right.$$

As matrizes serão

$$\underset{(12,3)}{A_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \gamma} \end{bmatrix};$$

e

$$\underset{(12,8)}{A_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \frac{\partial f_1}{\partial c_1} & \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial c_1} & \frac{\partial f_2}{\partial d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_{12}}{\partial c_2} & \frac{\partial f_{12}}{\partial c_2} & \frac{\partial f_{12}}{\partial c_2} & \frac{\partial f_{12}}{\partial d_2} \end{bmatrix}$$

Por outro lado

$$\underset{(12,96)}{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathscr{R}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathscr{P}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathscr{Y}_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial \mathscr{R}_{12}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \mathscr{P}_{12}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \mathscr{Y}_{12}} \end{bmatrix}$$

e

$$\underset{(2,8)}{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial a_1} & \frac{\partial g_1}{\partial b_1} & \frac{\partial g_1}{\partial c_1} & \frac{\partial g_1}{\partial d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial a_1} & \frac{\partial g_2}{\partial b_1} & \frac{\partial g_2}{\partial c_1} & \frac{\partial g_2}{\partial d_1} \end{bmatrix}$$

Modelo estocástico

Solução de mínimos quadrados A solução mínimos quadrados é obtida utilizando a técnica tradicional de ajustamento utilizando o modelo combinado (i.e ajustamento de observações condicionadas). Considerando as equações 8.11 e 8.12 iremos formar o sistema de equações normais

$$\begin{cases} A_1\,\hat{\delta}_1 + A_2\,\hat{\delta}_2 + B\,\hat{v} + w = 0 \\ G\,\hat{\delta}_2 + w_c = \hat{v}_c \end{cases}$$

A solução de mínimos quadrados é:

$$\begin{bmatrix} A_1^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A_1 & A_1^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A_2 \\ A_2^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A_1 & A_2^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A_2 + G^T P_c G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} A_1^T(BP^{-1}B^T)^{-1}w \\ A_1^T(BP^{-1}B^T)^{-1}w + G^T P_c w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou de forma abreviada

$$N\,\hat{\delta} + u = 0 \tag{8.13}$$

Os instrumentos LiDAR operam em geral com grandes taxas de produção de dados que podem variar entre 10 e 250kHz. Considerando oito observações por ponto, o tamanho das matrizes dos coeficientes (matrizes de desenho/projecto) podem atingir facilmente um tamanho que não é prático. Assim, é necessário a estrutura esparsa destas matrizes e formular uma contribuição para para cada observação individual, de tal forma que estas possam ser adicionadas às equações normais de forma sequencial. Depois das equações normais estarem formadas, os parâmetros $\hat{\delta}_1$ e $\hat{\delta}_2$ são calculados a partir da equação 8.13 como $\hat{\delta} = -N^{-1}u$ .As outras quantidades a estimar são calculadas por substituição (back-substitution) e as.estimativas para os parâmetros são calculadas por aproximações sucessivas num processo iterativo. Para inicializarmos o processo iterativo os valores aproximados dos parametrosd e calibração (ângulos de boresight e o offset da distância range-finder) podem ser tomados como zero, pois é esperado que eles tenham valores muito pequenos. No entanto, é necessário ter boas aproximações para os parâmetros dos planos. Para isso podemos utilizar o método de regressão ortogonal. Seguindo Shakarji (1998) a solução de mínimos quadrados para o vector normal $\vec{n}$ do plano j formado por $\vec{r}_i$ pontos reduzidos ao seu centroide, reduz-se a um problema do cálculo dos valores próprios da matriz de covariância C, ou seja:

$$C\vec{n} = \left\{\sum_{i=1}^{m}(\vec{r}_i\vec{r}_i^{\,T})\right\}\vec{n} = \sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y_i^2 & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \lambda\vec{n}$$

Dado que C é simétrica, positive semi-definite matrix, i.e todos os seus valores próprios são reais e maiores ou iguais a zero, a soma do quadrado das distâncias ortogonais é minimizada quando se escolhe o valor próprio mais pequeno. Depois de termos calculado o vector normal do plano $\vec{n}$, as distância ortogonal a partir da origem das coordenadas ao plano, é calculada da seguinte forma ($\overrightarrow{\bar{r}}$ designa o centroide dos pontos $\vec{r}_i$)

$$d_j = -\vec{n}\;\overrightarrow{\bar{r}}$$

8.4.3 ICP

O método ICP (Iterative Closest Point) não se pode definir como um método de calibração (system-driven) propriamente dito, visto que não se relaciona os parâmetros/ medições do sistema com as coordenadas dos pontos LiDAR através dum modelo físico do sensor. De facto, este método apenas determina os 7 parâmetros duma transformação rígida entre duas nuvens de pontos representando cada uma delas uma fiada LiDAR.

Inicialmente o método ICP foi desenvolvido para fazer o registo entre duas formas S do mesmo tipo do espaço $\boldsymbol{R}^3$, as quais podem ser:

- uma curva paramétrica $\mathscr{S}$ do espaço 3D, definida como uma função vectorial $\mathbf{x}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^3$, onde a e b são escalares,
- uma superfície paramétrica $\mathscr{C}$, definida como uma função vectorial $\mathbf{x}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$

Iremos designar os pontos da primeira forma S por $\mathbf{p}_i$ $(i = 1,\dots,n)$ e os da segunda forma S' por $\mathbf{q}_i$ $(i = 1,\dots,m)$. Se as formas S e S' não tiverem afectadas por erros aleatórios, e se estas diferirem apenas por uma transformação $\mathscr{F}$ (isto é estiverem registadas entre si) então a distância de qualquer ponto de S a S', depois de aplicada a transformação $\mathscr{F}$, será zero e a distância de qualquer ponto de S' a S, depois de aplicada a transformação inversa de $\mathscr{F}$, será também zero. Assim, o objectivo da operação de registo consiste em encontrar a transformação rígida F, (i.e a rotação R e a translação t), tal que o critério

$$\mathscr{F}(R,T) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\sum_{i=1}^{n} w_i d^2(Rp_i + t, S') + \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} v_i}\sum_{i=1}^{m} v_i d^2(R^T q_i - R^T t, S)$$

é minimizado. Nesta equação $d(p,S)$ designa a distância dum ponto p a S e w_i (resp. v_i) o peso a dar ao ponto p_i. Assim $p_i = 1$ se o ponto tiver um ponto correspondente em S' e $p_i = 0$ se o ponto não tiver um ponto correspondente em S'. Note-se que $\min \mathscr{F}(R,T) = 0$, se S e S' não estiverem afectadas de qualquer erro (ou ruído). Além disso os parametros w e v são necessários porque nem todos os pontos de S podem ter correspondência em S.

Como o critério anterior é simétrico, podemos utilizar apenas a primeira parte do termo, ou seja a função objectivo a minimizar será

$$\mathscr{F}(R,T) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \sum_{i=1}^{n} w_i d^2(Rp_i + t, S')$$

Ponto-plano

A função custo (ou energia) a minimizar é dada para cada par ponto-plano i

$$E = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\mathbf{R}p_i + \vec{T} - q_i \right) \cdot \vec{n}_i \right]^2 \tag{8.14}$$

Para resolvermos a equação analiticamente a matriz de rotação deverá ser linearizada de acordo com a equação seguinte:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa & \beta \\ \kappa & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

No entanto, Kumari et all, 2005 aplicou um desenvolvimento deste método à determinação directa dos parâmetros de calibração boresight. De facto, designando por $X_i = \mathbf{R}p_i + \vec{T}$ os pontos da fiada i e por $X_j^c = q_j$ os centroides dos elementos (triângulos) conjugados (dos pontos i) da fiada j e admitindo que tanto a fiada tomada como modelo e como a fiada tomada como dados contêm erros podemos escrever a equação de observação para um dado par ponto-triângulo conjugado:

$$n_j \cdot (X_i - X_j^c) = 0, \forall i, j = 1, \ldots, k$$

Se substituirmos nesta expressão a equação do LiDAR teremos:

$$n_j \cdot X_i - n_j \cdot X_j^c = n_j \cdot [\mathbf{x}_0 + R_{Y,P,R} \cdot \mathbf{b} + R_{Y,P,R} \cdot R_{\Delta\omega,\Delta\varphi,\Delta\kappa} \cdot R_\theta \cdot \mathbf{r}] \tag{8.15}$$

8.5 Filtragem

O processamento de dados laser visa frequentemente tanto a remoção de medições desnecessárias, quer na forma de medições erradas ou de objectos errados, como a modelação de dados considerando à priori um determinado modelo. A remoção de medidas desnecessárias, como por exemplo o caso de encontrar a superfície do terreno a partir de uma mistura de medidas do terreno e vegetação é neste contexto referido como filtragem. Dependendo da aplicação, as medições desnecessárias podem ser consideradas como ruído, outliers, ou erros grosseiros. Encontrar uma dada estrutura geométrica ou estatística, tal como edifícios ou vegetação é referido como classificação. Por último, a generalização dos objectos classificados é referida como modelação. Filtragem, classificação e modelação são portanto definidas em função do objectivo e não do método (Axelsson, 1999). Alguma da informação na nuvem original de pontos 3D distribuídos de forma quase-aleatória (sub-randomly) é perdida se os dados forem interpolados para uma grelha regular, ou seja um DSM. A perda de informação pode ser significativa, especialmente no caso de se registarem múltiplos retornos em áreas florestadas, dado que é difícil de representar pontos com coordenadas xy similares mas com diferentes altitudes z. Por este motivo acreditamos que devem ser utilizados os dados originais nos processos de filtragem e de modelação, antes de se efectuar a representação e generalização dependente do objecto. Em algumas aplicações, nomeadamente na extracção de linhas de alta tensão, isto é uma necessidade dado que uma linha de alta tensão terá ser descrita como um verdadeiro objecto 3D e não 2.5D. Apesar da maior parte das aplicações requererem algoritmos e estratégias específicas para a classificação e interpretação de dados LIDAR, a separação dos objectos da superfície do terreno pode ser vista como a fase principal dessas aplicações. Uma vez separados os objectos da superfície do terreno, estes podem ser tratados pelos diferentes algoritmos de acordo com as aplicações pretendidas. Neste sentido, a estratégia seguida para a interpretação dos dados ALS será formulada tendo por base a informação relativa às altitudes mas com a possibilidade de ser adicionado outro tipo de informação captada pelo sensor se esta estiver disponível. A estratégia pode ser descrita no seguinte modo:

- Utilizar os dados ALS originais tanto quanto possível, de preferência numa estrutura em TIN para o acesso fácil aos pontos vizinhos,
- Separar a superfície dos objectos situados sobre esta,
- Desenvolver algoritmos dependentes da aplicação em questão para classificação e modelação dos objectos.
- Se existirem outro tipo de dados, tais como reflectância, ou informação de ecos múltiplos dos dados ALS, ou dados imagens e dados geográficos, estes deverão ser incluídos no processamento.

8.5.1 Métodos de filtragem por densificação progressiva duma TIN

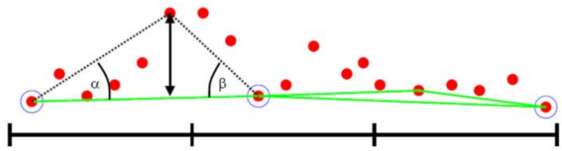
Método de Axelsson

Neste algoritmo a superfície que se pretende encontrar é uma TIN que liga os pontos de altitudes mais baixas. È permitido à superfície que possa flutuar dentro de certos valores. A superfície passa pelos pontos de cotas mais baixas encontrados numa dada vizinhança e serão adicionados novos pontos se estes verificarem determinados parâmetros de corte derivados dos dados. Estes parâmetros são calculados a partir dos dados e alteram-se durante o processo. O algoritmo é iterativo na medida em que se densifica uma TIN inicial construída a partir de pontos iniciais. Os passos gerais são:

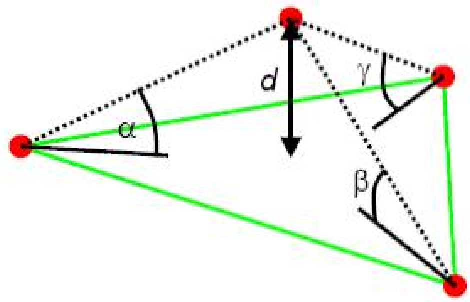
- Calcular os parâmetros iniciais utilizando todos os dados,
- Seleccionar os pontos iniciais,
- Densificar iterativamente a TIN,
- Calcular os parâmetros para cada iteração a partir dos pontos incluídos na TIN,
- Adicionar pontos à TIN se os parâmetros forem inferiores a determinados valores,
- Continuar o processo até que todos os pontos estejam classificados como terreno ou como objecto.

Estimação dos parâmetros: Os parâmetros para a densificação da TIN (i.e. as distâncias às faces dos triângulos e os ângulos nos vértices) são derivados dos dados. As áreas florestais possuem características diferentes das áreas urbanas, pois nas primeiras podem ocorrer pequenas variações nas cotas do terreno enquanto que nas segundas o que geralmente acontece é termos superfícies planas com descontinuidades. Os valores médios dos parâmetros utilizados na classificação dos pontos são calculados com base em histogramas das normais à superfície e das diferenças de cotas a partir dos quais se derivam alguns parâmetros estatísticos necessários ao seu cálculo. Na fase inicial (antes de se ter construído a primeira TIN) os histogramas são calculados utilizando todos os dados. Nas etapas seguintes os histogramas são calculados utilizando apenas os pontos da TIN.

Selecção dos pontos iniciais A TIN inicial pode ser calculada projectando os pontos do último retorno numa grelha de resolução (BldSz) igual ao comprimento máximo do maior edifício esperado na área e escolher dentro de cada célula o ponto de cota mais baixa. Em (Axelsson, 2000) é dito que o algoritmo não é sensível à escolha dos pontos iniciais (seed points) e portanto pode-se escolher entre 50 a 100 metros para a resolução desta grelha (desde que em cada célula haja pelo menos um ponto terreno!)



(a) Em cada passo do processo é adicionado um ponto a cada triângulo



(b) Parâmetros considerados na densificação progressiva da TIN

Figura 8.5.1: Densificação da TIN

Densificação da TIN Em cada iteração é apenas adicionado um ponto a cada triângulo se este verificar determinados critérios calculados com base nos parâmetros de corte. Os critérios principais são uma distância vertical d e três ângulos verticais (α, β, γ) dados na figura 1-b).

Implementação do algoritmo no TerraScan

Este algoritmo encontra-se implementado numa aplicação MDL que corre sobre o Microstation®. Além deste algoritmo existe ainda um pacote de rotinas auxiliares que permite analisar a nuvem de pontos em termos de vizinhanças 2D e em termos de distâncias verticais entre pontos e uma superfície construída com base pontos classificados como terreno.

```
FnScanClassifyGround(int FromClass, int ToClass, int InitLow, double BldSz, ...
    double MaxAng, double IterAng, double IterDst, int Reduce, double RedLen, ...
    int Stop, double StopLen, int Fence)
```

Implementação do algoritmo no ADAPT

As modificações introduzidas por Zhang and Cui (2007) foram as seguintes:

- Dividiram o conjunto de dados numa grelha de células quadradas e seleccionaram dentro de cada célula o ponto de altitude mínima (ponto semente). O tamanho desta célula deverá ser maior que o tamanho máximo dos objectos não pertencentes ao terreno na área de estudo. A TIN será construída utilizando os pontos semente e o critério de Delaunay.
- Examinaram os pontos situados sobre cada triângulo em termos das suas distâncias à superfície triangular e do máximo dos três ângulos verticais entre o plano do triângulo que contem o ponto e as linhas que ligam o ponto ao vértice do triângulo. Se a distância e o ângulo do ponto forem inferiores aos parâmetros predefinidos o ponto é adicionado ao conjunto dos pontos terreno. O parâmetro angular é utilizado para controlar a inclusão dum dado ponto próximo dum ponto terreno em zonas de declive acentuado. Afim de incluírem as medições em terrenos com declive acentuado, tais como falésias, a distância entre um ponto espelho e a superfície correspondente foi também utilizada no processo de selecção dos pontos terreno. Na figura a distância vertical d entre um ponto candidato e a superfície do terreno é comparada com um parâmetro de corte pré definido. Se a distância for inferior ao parâmetro de corte o ponto candidato é classificado como terreno. Se a distância for superior ao parâmetro de corte, mas a distância vertical no ponto espelho for inferior ao valor desse parâmetro o ponto candidato

é classificado como ponto terreno. Desta forma, os pontos em declives acentuados serão incluídos no conjunto de pontos terreno.

- Construíram a nova TIN utilizando o novo conjunto de pontos terreno. Depois, o segundo e terceiro passos são repetidos até que não haver pontos que possam ser adicionados ao conjunto de pontos terreno.

8.6 Planeamento de voo

Vamos designar por:

- H a altura de voo,
- γ a divergência do laser,
- E a distancia entre duas linhas de voo,
- f_{imp} a frequência de impulsão do laser que corresponde à cadência dos impulsos laser (i.e. *pulse rate* dado em kHz)
- f_{sc} a frequência de varrimento ou seja de rotação do elemento deflector.
- v a velocidade da aeronave

Nestas condições:

- O diâmetro do footprint no solo é dado por:

$$D = 2H \times \tan(\frac{\gamma}{2}) \approx H \times \gamma$$

- A largura duma fiada no solo é dada por:

$$L = 2H \times \tan(\frac{\theta}{2})$$

- A área coberta num determinado tempo t a uma velocidade de cruzeiro v e com uma largura de fiada L é dada por:

$$A = v \times t \times L$$

- A sobreposição lateral é dada por:

$$S_l = (1 - \frac{E}{L}) \times 100, \quad \text{com} \quad E < L$$

- O número de pontos em cada linha de varrimento é dado por

$$n = \frac{f_{\text{imp}}}{f_{\text{sc}}}$$

- A distância entre pontos numa linha de varrimento é dada por:

$$\Delta x = \frac{L}{n}$$

- A distância entre pontos na direcção da linha de voo é dada por:

$$\Delta y = \frac{v}{f_{\text{sc}}}$$

- A densidade de pontos por metro quadrado é dada por:

$$d = \frac{f_{\text{imp}} \times n_l \times t_l}{A}$$

onde n_l é o número de linhas de voo e t_l a sua duração. Alguns autores calculam esta densidade utilizando a "pulse repettion frequency"(f_{prf})

$$d = \frac{f_{\text{prf}} \times t}{A} = \frac{f_{\text{prf}}}{2H \times \tan(\frac{\theta}{2}) \times v}$$

- A relação entre o diâmetro do footprint no solo e a distância entre pontos inidca se uma dada fiada laser sub-amostra ou sobre-amostra a zona coberta

$$Q_x = \frac{D}{\Delta x} \times 100 \,;\, Q_y = \frac{D}{\Delta y} \times 100$$

Se Q_x ultrapassa 100%, a zona é sobre-amostrada na direcção do varrimento. Caso contrário ela é sub-amostrada. A mesma conclusão se tira para Q_y

8.7 Sistemas terrestres de varrimento laser

8.7.1 Métodos de medição

Como vimos anteriormente, os equipamentos de varrimento laser terrestre também podem ser classificados em função do princípio da medição da distância entre o instrumento e o objecto a ser reconstruído (Vosselman e Maas, 2010). Assim, teremos :

- observação directa da distância - a distância é observada directamente. São designados por digitalizadores de distância (ranging scanners).
  - tempo de voo (time of flight - tof) - a distância ao objecto é obtida pelo tempo que a onda laser leva a percorrer o trajeto entre a fonte emissora e a fonte receptora,
  - comparação de fase - a distância ao objecto é obtida pela diferença de fase entre a(s) onda(s) laser emitida(s) e a onda(s) laser(s) recebida(s)
- observação indirecta da distância - a distância é determinada pela resolução duma triângulação (ver figura 8.7.1):
  - câmara simples - Este tipo de scanner consiste num dispositivo de transmissão, localizado num dos extremos duma base mecânica, que envia um feixe laser (padrão) e uma câmara, localizada na outra extremidade, a qual detecta o ponto (ou linha laser) projectado no objecto. A posição 3D do elemento reflectido na superfície é obtida pela resolução do triângulo (ver 8.7.1) . Estes digitalizadores são muito utilizados na documentação 3D de pequenos objectos e são mais exactos que os digitalizadores de distância.
  - câmara dupla - Uma segunda alternativa para o princípio da triangulação anterior consiste em utilizar duas câmaras localizadas, cada uma delas, numa e na outra extremidade. O ponto (ou padrão) a ser triangulado é gerado por um projetor de luz o qual não necessita de nenhuma função de distância. Nestes digitalizadores o padrão a projectar pode variar de instrumento para instrumento. No entanto, a posição 3D do elemento projectado é, em todos os casos, obtida pela resolução dum triângulo o que faz com que todos tenham aproximadamente os mesmos níveis de exactidão.

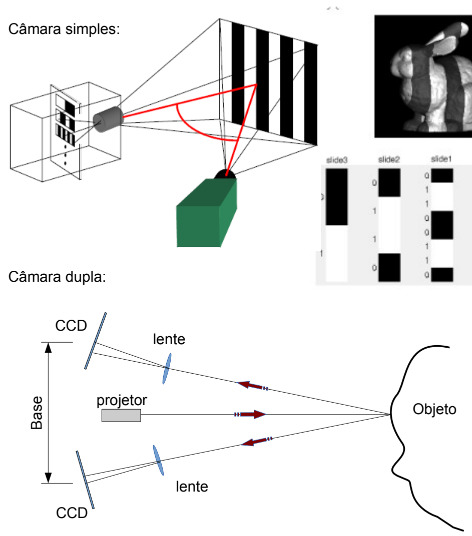


Figura 8.7.1: Principais utilizações dos sistemas de varrimento terrestre

Os diferentes equipamentos existentes no mercado são construídos tendo por base um dado método/-princípio de medição da distância (ver figura 8.7.2). Por isso, a sua utilização varia também em função da aplicação pretendida.

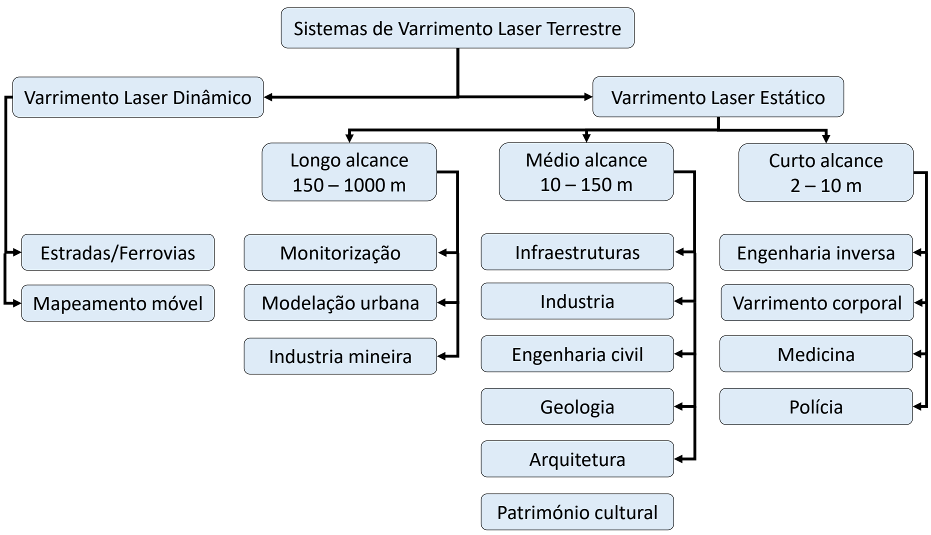


Figura 8.7.2: Principais utilizações dos sistemas de varrimento terrestre

8.7.2 Análise dos principais erros dos STVL

Os principais erros (sistemáticos) que podem afectar a precisão das medições efectuadas pelos Sistemas Terrestres de Varrimento Laser (STVL) 3D são:

1. Erros instrumentais. Estes podem ser do tipo aleatório, afectando principalmente a precisão da medida e a leitura electrónica dos dois valores angulares (horizontal e vertical), ou do tipo sistemático, gerados

principalmente pela não linearidade da unidade de medição do tempo, ou pela deriva da temperatura na electrónica da medição do tempo, o que provocam uma deriva da distância.

(a) Propagação da luz laser. A divergência do feixe laser tem uma grande influência na resolução da nuvem assim como ana ambiguidade posicional do ponto medido. A divergência pode ser expressa por:

$$w(r) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda r}{\pi w_0^2}\right)^2}$$

onde λ é o comprimento de onda da luz laser, r a distância (range), w_0 a largura mínima do feixe laser no ponto inicial (i.e pegada mínima do laser)

(b) Problema do efeito do bordo. Uma das consequências mais importantes da divergência do feixe é o problema do bordo partido. Quando um feixe de luz laser choca contra um bordo dum objecto, o feixe é dividido em dois: uma parte do feixe é reflectida e a outa parte continua a sua trajectória sendo refletida posteriormente quando atinge outra superfície. O resultado desta interação é que a informação do laser que chega ao receptor provem de duas secções diferentes do objecto e consequentemente as coordenadas do ponto correspondente serão calculadas considerando as das partes do sinal recebido, pelo que se terá uma localização errada do feixe laser.

(c) Ambiguidade da distância

(d) Ambiguidade angular. A maioria dos sistemas laser utilizam espelhos rotativos para dirigir a luz laser para uma dada direcção. Uma diferença angular pequena pode provocar um erro considerável nas coordenadas quando a distância for considerável. A precisão angular depende os erros de posição dos espelhos e da precisão na medição dos ângulos.

(e) Erros nos eixos do laser. Para definirmos o modelo geométrico do instrumento laser definiremos três eixos: i) o eixo vertical que permite ao instrumento dirigir a luz laser de forma horizontal. Dependendo do tipo de instrumento (panorâmico ou com câmara), é o eixo de rotação da cabeça do instrumento ou o eixo ortogonal aos eixos de oscilação dos espelhos; ii) o eixo de colimação que passa pelo centro do espelho de varrimento e pelo centro da pegada do laser sobe a superfície do objecto varrido; iii) o eixo horizontal que é o eixo de rotação do espelho de varrimento. Devido às tolerâncias de fábrica (i.e a problemas de construção) estes eixos não estão devidamente alinhados (i.e conformes com o modelo geométrico do instrumento laser) o que conduz a um erro na colimação e a um erro no eixo horizontal

2. Erros relacionados com o objecto. Como os instrumentos medem a reflexão da luz laser sobre uma dada superfície, é necessário perceber as leis físicas da reflexão e as propriedades ópticas dos materiais. Geralmente é assumida uma reflexão isotrópica (difusa) dada pela lei de Lambert

$$I_{ref} = I_{inc}(\lambda) k_d(\lambda) \cos\theta$$

3. Erros relacionados com as condições ambientais: temperatura, atmosfera, interferência da radiação externa, distorções devidas ao movimentos do instrumento.

4. Erros metodológicos. Estes erros são devidos ao método de medição escolhido ou à inexperiência do operador com esta tecnologia. Por exemplo, se o operador escolhe uma densidade de amostragem (resolução da grelha) mais elevada que a precisão por ponto do instrumento, o varrimento fica com sobreamostragem. Isto deve-se ao facto de que o sinal de recepção terá uma frequência mais elevada que o dobro da largura de banda da frequência máxima. Neste caso é gerado um ruído adicional nos dados além do tempo de varrimento aumentar consideravelmente. Uma outra fonte de erro pode acontecer se o operador não escolher corretamente o tipo de instrumento para a aplicação em causa. escolhendo um scanner com o alcance máximo próximo da distância máxima a que se encontra o objecto a digitalizar, os varrimentos serão menos precisos e terão maior ruído. Nesta categoria também estão incluídos os erros gerados durante o processo de registo (ou co-registo), os quais dependem, por sua vez, do método utilizado no registo das várias nuvens de pontos.

8.7.3 Planificação e procedimentos de campo

Na prática, e devido à complexidade dos sistemas terrestre de varrimento laser, antes de se efectuar um varrimento laser é necessário efectuar uma planificação do trabalho. Uma boa planificação deve conter, pelo menos, os seguintes itens:

1. Determinação dos objectivos do varrimento. Um dos pontos chave quando se varre um objecto é satisfazer os objectivos do varrimento (i.e as necessidades do cliente). Estes objectivos ficam definidos quando se tiverem as respostas às duas questões seguintes:

   (a) Qual a finalidade da documentação 3D e o que é que se pretende fazer com os dados da documentação? A resposta a esta pergunta irá especificar os critérios relativos à precisão e à metodologia

   (b) Que tipo de subprodutos necessita extrair da nuvem 3D? Plantas topográficas? Modelos 3D? Séries temporais de nuvens de pontos 3D?

2. Análise da área a levantar. Analisar previamente a zona que vamos levantar de forma a certificar-nos que é possível utilizar o equipamento atendendo a: i) acessibilidade da área onde o objecto se encontra; ii) os possíveis obstáculos que impeçam a medição; iii) identificar os diversos factores que impeçam o alcance das especificações de precisão e exatidão do projecto.

3. Planificação das posições adequadas do instrumento laser. As posições ótimas para o estacionamento do instrumento devem ser escolhidas de forma a garantir a máxima cobertura e precisão das medições e ao mesmo tempo reduzir ao mínimo o número de estações. Além disso deve-se assegurar que se cumprem as distâncias máximas e mínimas de varrimento.

4. Planificação das posições adequadas dos pontos de referência. Deve-se ter em conta uma correcta distribuição dos pontos nas três dimensões: X, Y e Z.

5. Gestão dos dados. Para uma correcta planificação dos dispositivos de registo deve-se ter em consideração o volume de dados é gerado em cada varrimento. Por exemplo um varrimento com o Leica C10 gera 1GB enquanto que o mesmo varrimento no Faro Photo gera 200 MB.

Por outro lado o trabalho de campo deve incluir as seguintes tarefas:

1. Planificação e preparação do levantamento. Nesta fase deve-se ter em conta o método de registo (ou de georeferenciação) a utilizar no varrimento: i) utilizando uma transformação 3D (ou intreseção inversa) de alvos 3D; ii) estacionamento em pontos de coordenadas conhecidas; iii) utilizando métodos de registo de nuvens de pontos (por exemplo, o ICP).

2. Estacionamento do laser. O estacionamento do instrumento laser deve seguir o mesmo procedimento do estacionamento duma estação total topográfica: i) montagem e instalação do tripé; ii) estacionamento e verticalização do eixo vertical (ou z) sobre um ponto de coordenadas conhecidas se for esse o método de registo; iii) nivelamento do instrumento.

3. Inicialização do instrumento e dos parâmetros de varrimento: i) definição da área a levantar; ii) resolução espacial do varrimento; iii) métodos automáticos de filtragem dos pontos.

Referências

Habib, Ayman et al. (2010). «Alternative Methodologies for LiDAR System Calibration». Em: *Remote Sens.* 2.3, pp. 874–907. ISSN: 2072-4292. DOI: 10.3390/rs2030874. URL: http://www.mdpi.com/2072-4292/2/3/874.

Vosselman, George e Hans-Gerd Maas (2010). *Airborne and Terrestrial Laser Scanning*. Whittles Publishing, pp. I–XVII, 1–318. ISBN: 978-1-904445-87-6.

8.A Representação de rotações no espaço 3D

As rotações no espaço 3D podem ser representadas por diversas formas: i) matrizes de rotação, ii) eixo e ângulo, e iii) quaterniões.

8.A.1 Matrices de Rotação

Em fotogrametria terrestre é habitual representarmos os eixos coordenados na forma ilustrada na Figura 8.A.1. Assim iremos representar as três rotações elementares por: $R_x(\alpha)$, $R_y(\beta)$ e $R_z(\gamma)$. Estas rotações são dadas pelas matrizes de rotação ortogonais seguintes:

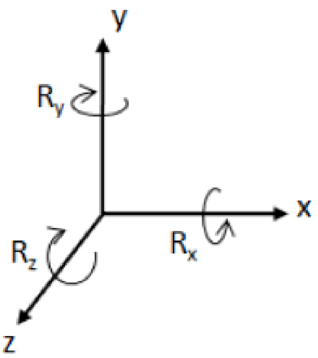


Figura 8.A.1: Sistema de coordendas 3D terrestre

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} ; R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} , R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A rotação de pontos do espaço 3D obtêm-se simplesmente multiplicando à direita a matriz de rotação por um vector coluna contendo as coordenadas dos pontos. No caso de termos n pontos, para aplicarmos a estes pontos a rotação R podemos armazenar estes pontos numa matriz $n \times 3$ e multiplicar à direita a matriz de

$$\underset{(3,n)}{P'} = \underset{(3,3)}{R} \cdot \underset{(3,n)}{P}$$

Uma vez que a multiplicação de matrizes não é comutativa a ordem da multiplicação é importante. Para especificar a rotação em torno da origem são necessários em geral três ângulos. Dado que iremos utilizar a convenção da rotação sequencial $x\,y\,z$ ou seja (α, β, γ), então teremos em notação matricial a expressão

$$R_{\alpha,\beta,\gamma} = R_z(\gamma) \times R_y(\beta) \times R_x(\alpha)$$

Ou seja,

$$R_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\sin\beta & \cos\alpha\sin\gamma\sin\beta - \cos\gamma\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

Note-se que se calcularmos a rotação sequencial $\gamma \to \beta \to \alpha$

$$R_{\gamma,\beta,\alpha} = R_x(\alpha) \times R_y(\beta) \times R_z(\gamma)$$

teremos a matriz de rotação sequencial

$$R_{\gamma,\beta,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta & \cos\gamma\sin\alpha + \cos\alpha\sin\gamma\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

que é diferente da expressão anterior

Para ângulos pequenos, $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx 0$, e portanto

$$R_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 8.30

Dados três pontos P1=(1,0,0), P2=(0,1,0) e P3=(0,0,1) aplique a estes pontos uma rotação de $\pi/2$

8.A.2 Eixo e ângulo

Em vez de representarmos a rotação no espaço em torno de três eixos fixos, a representação na forma eixo-ângulo define um eixo dado por um vector unitário $\vec{e}$ e um ângulo θ (ver figura 8.A.2)

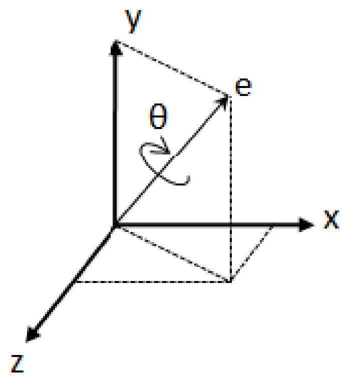


Figura 8.A.2: Rotação dum ângulo θ em torno dum eixo e.

Esta Rotação pode ser escrita de forma simples e intuitiva segundo

$$\langle \vec{e}, \theta \rangle = \begin{pmatrix} e_x & \\ e_y & ,\theta \\ e_z & \end{pmatrix}$$

Apesar desta representação ser adequada para compararmos diferentes rotações, os cálculo envolvidos podem ser volumosos.

8.A.3 Quaterniões

Os quaterniões, assumem a forma de números complexos 4D, e são definidos por

$$q = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} + w$$

onde w é designada por parte escalar do quaternião e o resto é designado por parte vectorial (ou imaginária). Os elementos (x, y, z, w) são reais e as unidades imaginárias satisfazem as seguintes relações:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$$

O conjugado ($\tilde{q}$) e a magnitude ($\| q \|$) do quaternião são dadas, respectivamente, por

$$\tilde{q} = -x\mathrm{i} - y\mathrm{j} - z\mathrm{k} + w$$
$$\|q\| = \sqrt{q\tilde{q}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

O inverso do quartenião, que é uma propriedade improtante é definido por:

$$q^{-1} = \frac{\tilde{q}}{q\tilde{q}}$$

Se o quaternião for unitário, i.e, tiver a magnitude um ($\left\|q\right\| = 1$) então $q^{-1} = \tilde{q}$.

A multiplicação de quaterniões é também uma propriedade importante. Se um quaternião q_i for representado pelo par $(w_i, \vec{v}_i)$ a operação de multiplicação pode ser dada por

$$q_1 q_2 = (w_1 w_2 - \vec{v}_1 \vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + w_1 \vec{v}_2 + w_2 \vec{v}_1)$$

O produto entre dois quaterniões pode ser também calculado utilizando a multiplicação de matrizes

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 & -z_2 & y_2 & -x_2 \\ z_2 & w_2 & -x_2 & -y_2 \\ -y_2 & x_2 & w_2 & -z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

Atendendo a que o produto entre dois quaterniões pode ser expresso em termos matriciais, não é surpreendente que a multiplicação de quaterniões é associativa mas não é comutativa, ou seja:

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3) \text{ e } q_1 q_2 \neq q_2 q_1$$

Os quaterniões unitários podem ser facilmente convertidos em representações ângulo-eixo. De facto a seguinte expressão estabelece a relação entre um quaternião unitário e a representação ângulo-eixo $(\langle e_x, e_y, e_z \rangle, \theta)$:

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + e_x \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{i} + e_y \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{j} + e_z \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}$$

Dado que a magnitude deste quaternião deverá ser igual à unidade, a parte escalar deverá ser igual à parte imaginária, o que significa que o quaternião unitário representa três graus de liberdade.

A multiplicação entre quaterniões é a operação que é utilizada para rodar um ponto ou um vector. Por exemplo para rodarmos o ponto P utilizando o quaternião q fazemos o seguinte:

1. Representamos o ponto P como um quaternião q, com parte escalar igual a zero, isto é:

$$p = (0, \vec{P})$$

2. O ponto rodado, representado indirectamente pelo quaternião, p', é então obtido por:

$$p' = q p q^{-1}$$

8.A.4 Conversão entre as diferentes representações

Entre o quaternião e a matriz de rotação

Sejam p_1 e p_2 dois pontos quaisquer de R^3. Suponhamos que p_2 é obtido por rotação de p_1. Iremos ver como é que poderemos representar esta rotação utilizando um quaternião q ou uma matriz de rotação $\mathbf{R}$, ou seja, dado o quaternião q tal que

$$P_2 = q P_1 q^{-1}$$

com P_1 e P_2 as representações quaternião dos pontos, pretendemos determinar a matriz $\mathbf{R}$ tal que

$$p_2 = \mathbf{R} p_1$$

Em primeiro lugar iremos efectuar a multiplicação entre quaterniões. Consideremos um quaternião unitário dado por

$$q = [q_x, q_y, q_z, q_w]$$

Atendendo a que a representação do ponto, p_1, na forma de quaternião é dada por:

$$P_1 = [x, y, z, 0]$$

então o produto de q e P1 será dado por

$$qP_1 = [q_x, q_y, q_z, q_w] \begin{bmatrix} 0 & -z & y & -x \\ z & 0 & -x & -y \\ -y & x & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xq_w - yq_z + zq_y \\ yq_w + xq_z - zq_x \\ yq_x - xq_y + zq_w \\ -xq_x - yq_y - zq_z \end{bmatrix}^T$$

e o produto de $qP1$ por $\tilde{q}$ será então

$$qP_1\tilde{q} = \begin{bmatrix} xq_w - yq_z + zq_y \\ yq_w + xq_z - zq_x \\ yq_x - xq_y + zq_w \\ -xq_x - yq_y - zq_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_w & q_z & -q_y & q_x \\ -q_z & q_w & q_x & q_y \\ q_y & -q_x & q_w & q_z \\ -q_x & -q_y & -q_z & q_w \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$qP_1\tilde{q} = \begin{bmatrix} xq_w^2 + 2zq_wq_y - 2yq_wq_z + xq_x^2 + 2yq_xq_y + 2zq_xq_z - xq_y^2 - xq_z^2 \\ yq_w^2 - 2zq_wq_x + 2xq_wq_z - yq_x^2 + 2xq_xq_y + yq_y^2 + 2zq_yq_z - yq_z^2 \\ zq_w^2 + 2yq_wq_x - 2xq_wq_y - zq_x^2 + 2xq_xq_z - zq_y^2 + 2yq_yq_z + zq_z^2 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

Para obtermos a matriz de rotação iremos agora agrupar os elementos do vector anterior (com dimensão (1×4)) segundo as variáveis (x, y, z) teremos:

$$p_2 = qP_1\tilde{q} = \begin{bmatrix} \left(q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2\right)x + \left(2q_xq_y - 2q_wq_z\right)y + \left(2q_wq_y + 2q_xq_z\right)z \\ \left(2q_wq_z + 2q_xq_y\right)x + \left(q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2\right)y + \left(2q_yq_z - 2q_wq_x\right)z \\ \left(2q_xq_z - 2q_wq_y\right)x + \left(2q_wq_x + 2q_yq_z\right)y + \left(q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2\right)z \end{bmatrix}^T$$

Ou seja

$$p_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2q_xq_y - 2q_wq_z & 2q_wq_y + 2q_xq_z \\ 2q_wq_z + 2q_xq_y & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2q_yq_z - 2q_wq_x \\ 2q_xq_z - 2q_wq_y & 2q_wq_x + 2q_yq_z & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix}^T$$

Dado que o vector (x, y, z) é equivalente ao pontop_1, então a matriz anterior deverá ser equivalente à matriz de rotação R, isto é

$$p_2 = qP_1\tilde{q} = \left(\mathbf{R}p_1\right)^T$$

Além disso a matriz anterior pode ser simplificada se atendermos a que $q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + q_w^2 = 1$, ou seja

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2q_y^2 - 2q_z^2 & 2q_wq_z + 2q_xq_y & 2q_xq_z - 2q_wq_y \\ 2q_xq_y - 2q_wq_z & 1 - 2q_x^2 - 2q_z^2 & 2q_wq_x + 2q_yq_z \\ 2q_wq_y + 2q_xq_z & 2q_yq_z - 2q_wq_x & 1 - 2q_x^2 - 2q_y^2 \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

Exercício 8.31

Calcule a matriz de rotação para o seguinte quaternião

$$q = \begin{bmatrix} -0.369644 & 0.0990458 & -0.239118 & 0.892399 \end{bmatrix}$$

Entre a matriz de rotação e o quaternião

A relação 8.16 pode ser utilizada para extrair o quaternião unitário duma dada matriz de rotação. Considerando que

$$\begin{array}{lll} r_{11}=1-2q_y^2-2q_z^2 & r_{12}=2q_wq_z+2q_xq_y & r_{13}=2q_xq_z-2q_wq_y \\ r_{21}=2q_xq_y-2q_wq_z & r_{22}=1-2q_x^2-2q_z^2 & r_{23}=2q_wq_x+2q_yq_z \\ r_{31}=2q_wq_y+2q_xq_z & r_{32}=2q_yq_z-2q_wq_x & r_{33}=1-2q_x^2-2q_y^2 \end{array}$$

teremos um conjunto de 9 equações a quatro incógnitas, o que nos dá uma grande quantidade de métodos para resolver o problema. O nosso objectivo é obtermos um quaternião unitário, ou seja, que

$$q_x^2+q_y^2+q_z^2+q_w^2=1$$

Isto significa que a parte escalar do quaternião (qw) pode ser expressa na forma:

$$q_w^2=1-q_x^2-q_y^2-q_z^2$$

ou seja

$$4q_w^2=1+(1-2q_y^2-2q_z^2)+(1-2q_x^2-2q_z^2)+(1-2q_x^2-2q_y^2)=1+r_{11}+r_{12}+r_{13}$$

isto é

$$q_w=\pm\frac{\sqrt{1+\mathrm{tr}(\mathbf{R})}}{2}$$

Os outros três elementos do quaternião podem ser determinados utilizando os termos fora da diagonal:

- fazendo $r_{23}-r_{32}=2q_wq_x+2q_yq_z-(2q_yq_z-2q_wq_x)=4q_xq_w$, virá

$$q_x=\frac{r_{23}-r_{32}}{4q_w}$$

- fazendo $r_{31}-r_{13}=2q_wq_y+2q_xq_z-(2q_xq_z-2q_wq_y)=4q_yq_w$, virá

$$q_y=\frac{r_{31}-r_{13}}{4q_w}$$

- fazendo $r_{12}-r_{21}=2q_wq_z+2q_xq_y-(2q_xq_y-2q_wq_z)=4q_zq_w$, virá

$$q_z=\frac{r_{12}-r_{21}}{4q_w}$$

Note-se que este método tem alguns problemas numéricos, pois só é válido se $\mathrm{tr}(\mathbf{R})>-1$. Então teremos:

- Caso $\mathrm{tr}(\mathbf{R})<-1$ fará intervir, no cálculo de q_w, a raiz quadrada dum número negativo o que é impossível visto que os 4 elementos do quaternião deverão ser números reais.
- Caso $\mathrm{tr}(\mathbf{R})=-1$ fará com que $q_w=0$, o que tornará impossível o cálculo dos outros 3 elementos do quaternião.

Exercício 8.32
Dada a matriz de rotação M calcule o quaternião associado

$$M=\begin{bmatrix} 0.8660254 & 0.35355339 & 0.35355339 \\ -0.5 & 0.61237244 & 0.61237244 \\ 0.0 & -0.70710678 & -0.70710678 \end{bmatrix}$$

Entre a matriz de rotação e o eixo-ângulo

Seja R uma matriz de rotação 3x3. Pelo teorema de rotação de Euler sabemos que os valores próprios da matriz são $(1, e^{\pm j\theta})$ o que faz com que

$$\lambda = (1, \cos\theta + j\sin\theta, \cos\theta - j\sin\theta)$$

onde θ é o ângulo de rotação utilizado na representação eixo-ângulo. Assim o ângulo pode ser extraído facilmente da matriz de rotação, uma vez que o traço da matriz corresponde à soma dos valores próprios

$$\mathrm{tr}(\mathbf{R}) = 1 + \cos\theta + j\sin\theta + \cos\theta - j\sin\theta = 1 + 2\cos\theta$$

e portanto

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}$$

Aplicando a matriz de rotação a um eixo **u**, o qual é paralelo ao eixo de rotação, então o resultado desta rotação será o próprio vector, ou seja

$$\mathbf{Ru} = \mathbf{u}$$

o que corresponde à equação dos valores próprios $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, onde λ é o valor próprio e **x** o vector próprio. Em conclusão o eixo associado à matriz de rotação **R** é o que vector próprio desta matriz a que corresponde o valor próprio de 1.

Exercício 8.33

Calcule o eixo e o ângulo de rotação para a matriz de rotação M dada no exercício anterior

Entre o eixo-ângulo e a matriz de rotação

Designemos por $\vec{v}_{\mathrm{rot}}$ um vector de $\mathbb{R}^3$ que é obtido pela rotação do vector $\vec{v}$ dum ângulo de θ em torno do eixo unitário $\vec{z}$. O objectivo é encontrar a matriz de rotação **R** que satisfaça:

$$\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{R}\vec{v}$$

A metodologia a seguir consiste em:

- projectar o vector $\vec{v}$,
- executar a rotação 2D e voltar a 3D,
- obter uma expressão para a matriz de rotação 3×3.

Vamos ver em primeiro lugar como projectar o vector $\vec{v}$ em 2D. Seja $\vec{x}$ a projecção de v num plano ortogonal a z:

$$\vec{x} = \vec{v} - \vec{z}(\vec{z} \cdot \vec{v})$$

Designemos agora por y um vector ortogonal a z e a x

$$y =$$

Exercício 8.34

Dado um eixo de rotação definido no plano XY a 45^o do eixo X (sentido directo) e o ângulo de rotação θ de 30^o calcule a correspondente matriz de rotação.

8.B Ajustamento de funções Gaussianas

Dado um conjunto de pontos $\{p_i = (x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$ pretendemos encontrar a função Gaussiana

$$\hat{y} = Ae^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{8.17}$$

que melhor se ajusta aos pontos dados p_i, ou seja pretendemos encontrar os valores dos parâmetros (A, μ, σ) tais que:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \to \min$$

Entre as vários soluções existentes para este problema destacamos o método do centroide que tira partido da simetria da função Gaussiana e permite o seu centro (parâmetro μ) de forma muito eficaz. O centro de massa é definido por:

$$\mathbf{x}_{\text{cal}} = \frac{\sum_k x_k * y_k}{\sum_k y_k}$$

Outra solução consiste em utilizar o facto de que a Gaussiana é a exponencial duma função quadrática. Assim tomando os logaritmos naturais da expressão 8.17 virá:

$$\ln y = \ln A - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = \ln A - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

ou seja

$$\ln y = a + bx + cx^2 \quad \text{com} \quad a = \ln A - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}, \quad b = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad c = -\frac{1}{2\sigma^2} \tag{8.18}$$

Note-se que a equação anterior representa uma parábola com a posição do seu pico (máximo) coincidente com a posição do pico da Gaussiana.

O princípio básico do método de Caruana consiste em ajustar aos dados uma parábola utilizando o princípio dos mínimos quadrados por forma a determinar os parâmetros $\{a, b, c\}$ e em seguida calcular os parâmetros $\{A, \mu, \sigma\}$. Nesse sentido é definida a função erro para cada par (x, y) observado.

$$\delta = \ln y - (a + bx + cx^2) \tag{8.19}$$

Considerando agora a soma do quadrado dos resíduos, isto é

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y - (a + bx + cx^2)\right)^2$$

e diferenciando em ordem aos parâmetros a, b e c obtemos:

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(\ln y - (a + bx + cx^2)\right)$$
$$\frac{\partial \delta^2}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\ln y - (a + bx + cx^2)\right)$$
$$\frac{\partial \delta^2}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\ln y - (a + bx + cx^2)\right)?$$

Igualando a zero as expressões anteriores somos conduzidos ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \ln y_i \\ \sum_i x_i \ln y_i \\ \sum_i x_i^2 \ln y_i \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

Depois de resolvermos o sistema anterior os parâmetros desejados da função Gaussiana são calculados através de:

$$\mu = \frac{-b}{2c} \quad \sigma = \sqrt{\frac{-1}{2c}} \quad A = e^{a - b^2/4c} \tag{8.21}$$