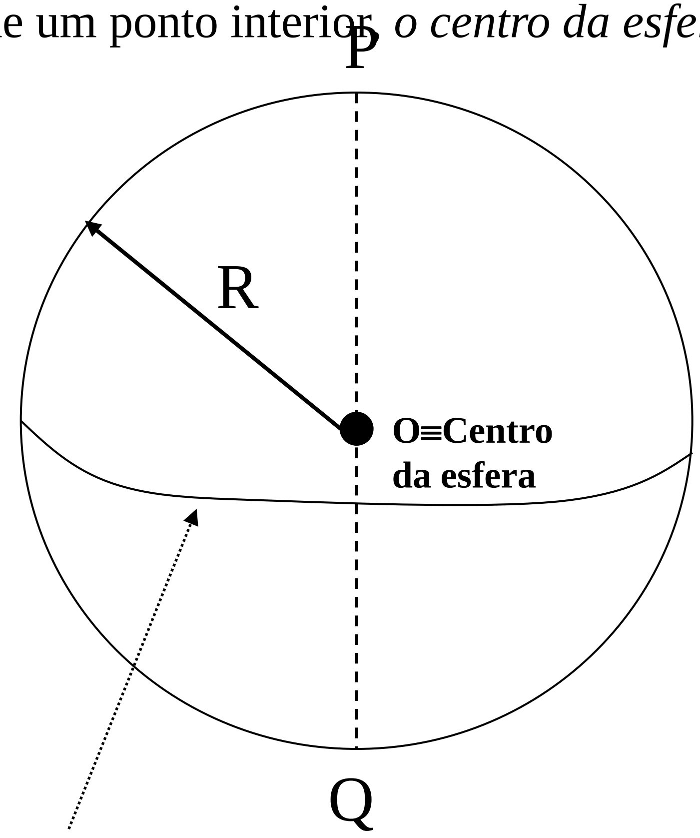
A figura da Terra

Da esfera ao Geóide (passando pelo elipsóide)

Uma primeira aproximação: a Terra esférica

Esfera: Superfície curva fechada cujos pontos se encontram todos a igual distância, R, de um ponto interior, *o centro da esfera*.

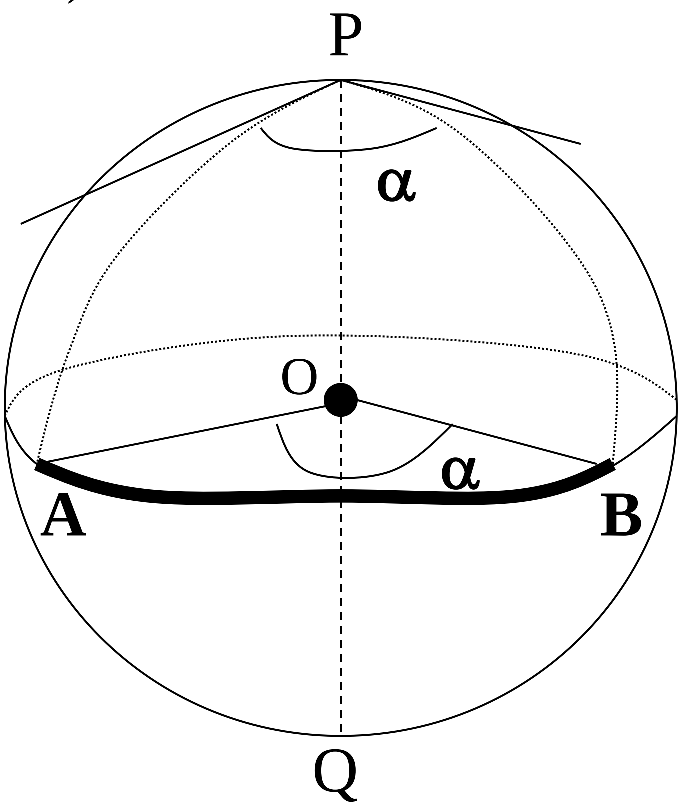


Observação: os meridianos e o equador terrestre são exemplos de círculos máximos

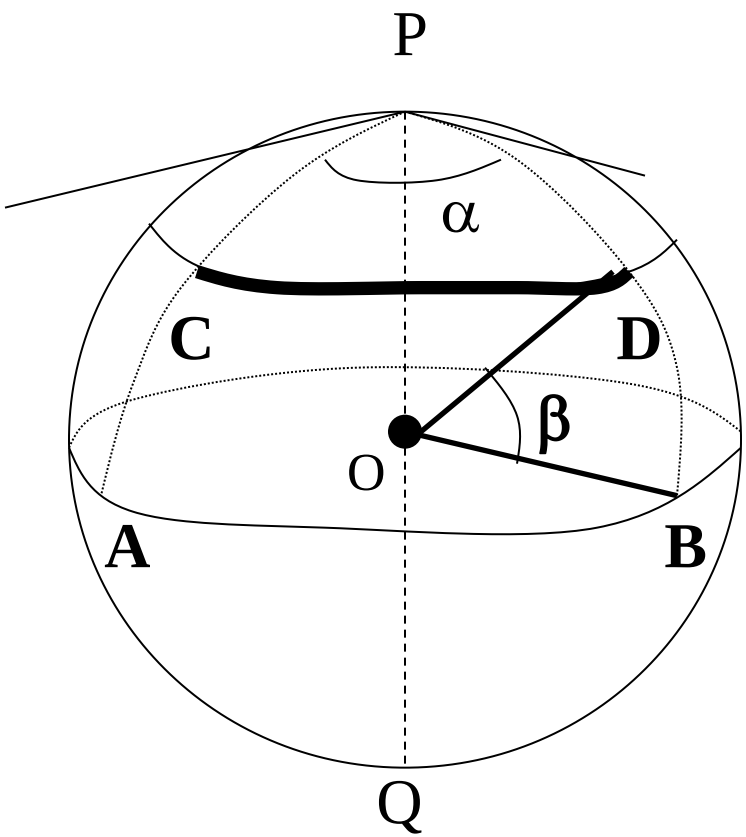
Círculo máximo: círculo resultante da intersecção da esfera com um plano que passa pelo seu centro. Perímetro = $2\pi R$

P e Q são os *pólos* do círculo máximo

<u>Arco de círculo máximo</u> (ex. arco AB): porção de um círculo máximo. Comprimento do arco=Rα (α em radianos)



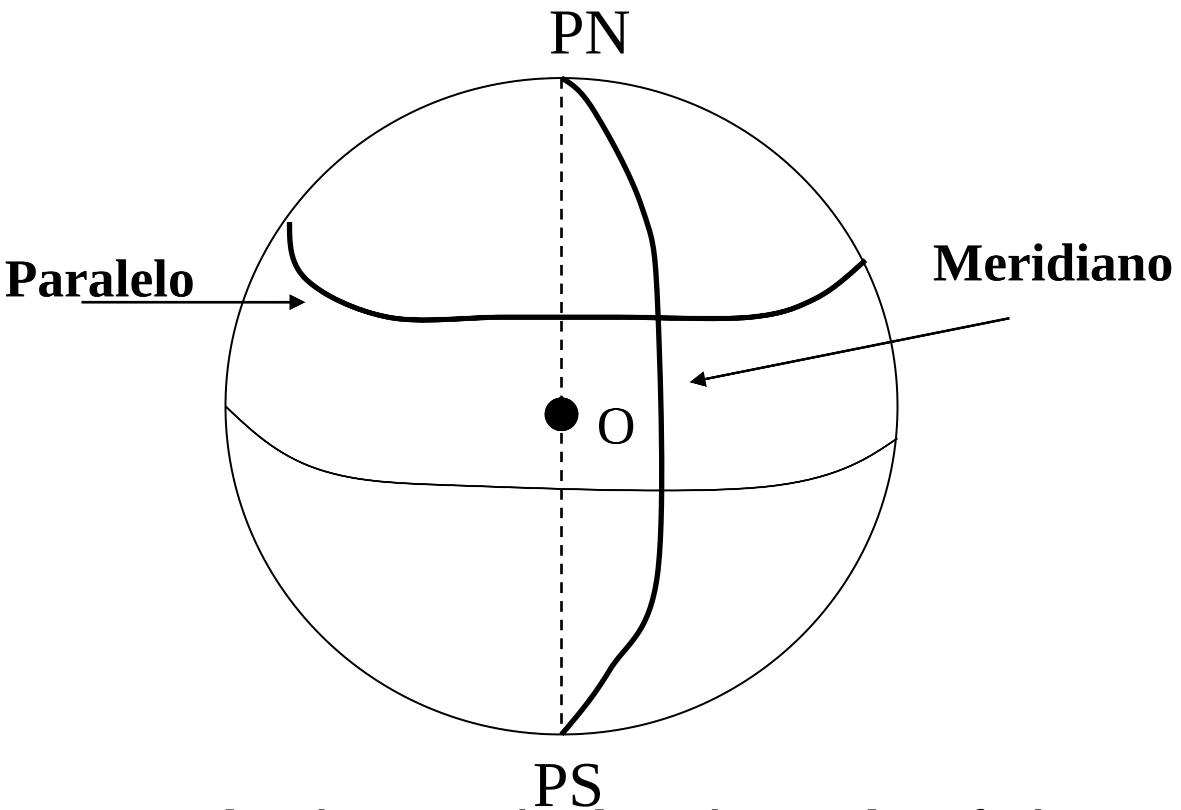
<u>Círculo menor</u>: círculo resultante da intersecção da esfera com um plano que **não** passa pelo seu centro. Perímetro =(R cos β) × 2π, em radianos.



<u>Arco de círculo menor</u> (ex. arco CD): porção de um círculo menor. Comprimento do arco=(R cos β) × α (em radianos)

Sistemas de coordenadas geográficas (na Terra esférica)

Seja a Terra uma esfera de raio = 6378 km .

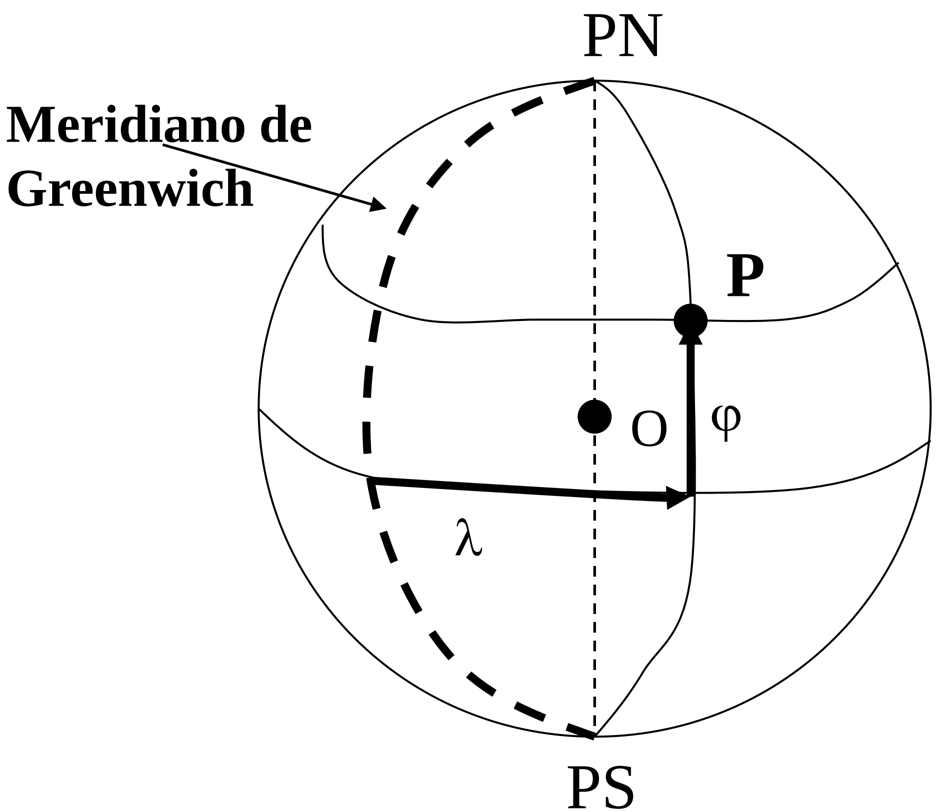


O equador é o um círculo máximo de referência e PN e PS são os seus pólos (norte e sul, respectivamente). O Equador divide a Terra em dois hemisférios

Paralelo: círculo menor paralelo ao equador

Meridiano: círculo máximo perpendicular ao equador

A posição de um qualquer ponto à superfície da Terra fica perfeitamente definida por duas coordenadas angulares (φ, λ).



Latitude (φ): distância angular entre o equador e o ponto P. $-90^o \leq \varphi \leq 90^o$. Por convenção, temos: se o ponto se encontra no hemisfério norte, $\varphi > 0$.

Longitude (λ): distância angular, no equador, entre o meridiano de Greenwich (meridiano de referência) e o meridiano do ponto. Por convenção, usa-se também $0^o < \lambda \leq 180^o$ se o ponto se encontra a Este de Greenwich e $-180^o \leq \lambda < 0^o$ se o ponto se encontra a Oeste.

Elipsóide de Revolução

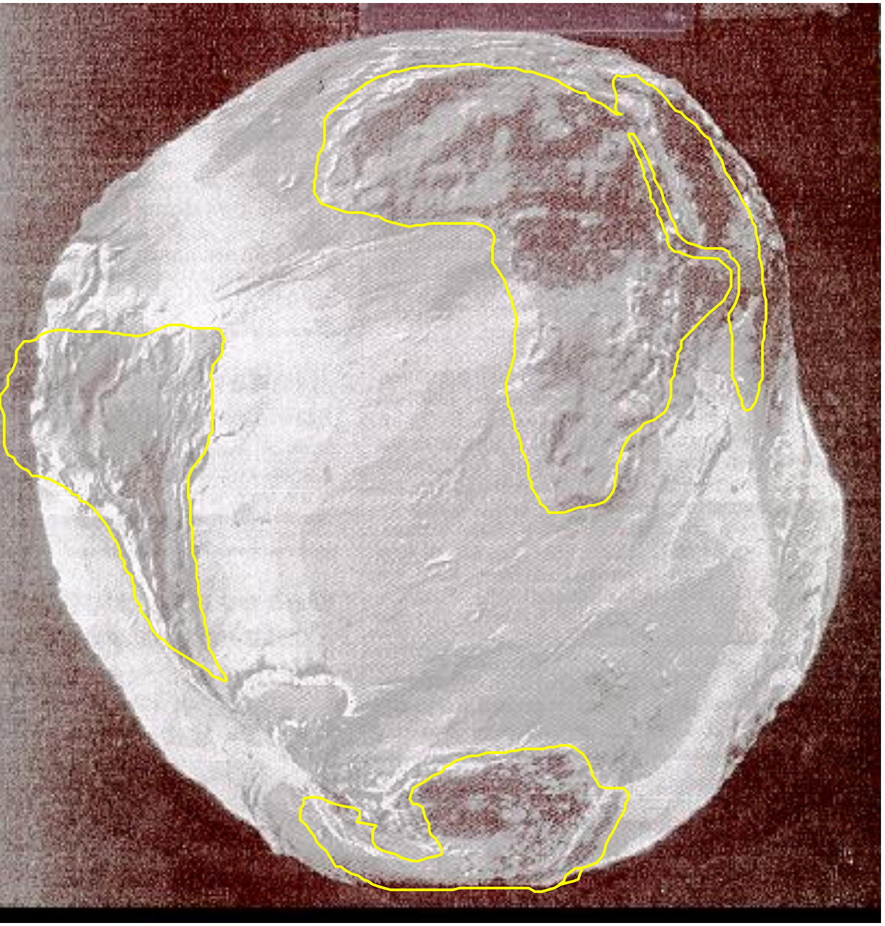


Imagem da forma da Terra sem água e nuvens.

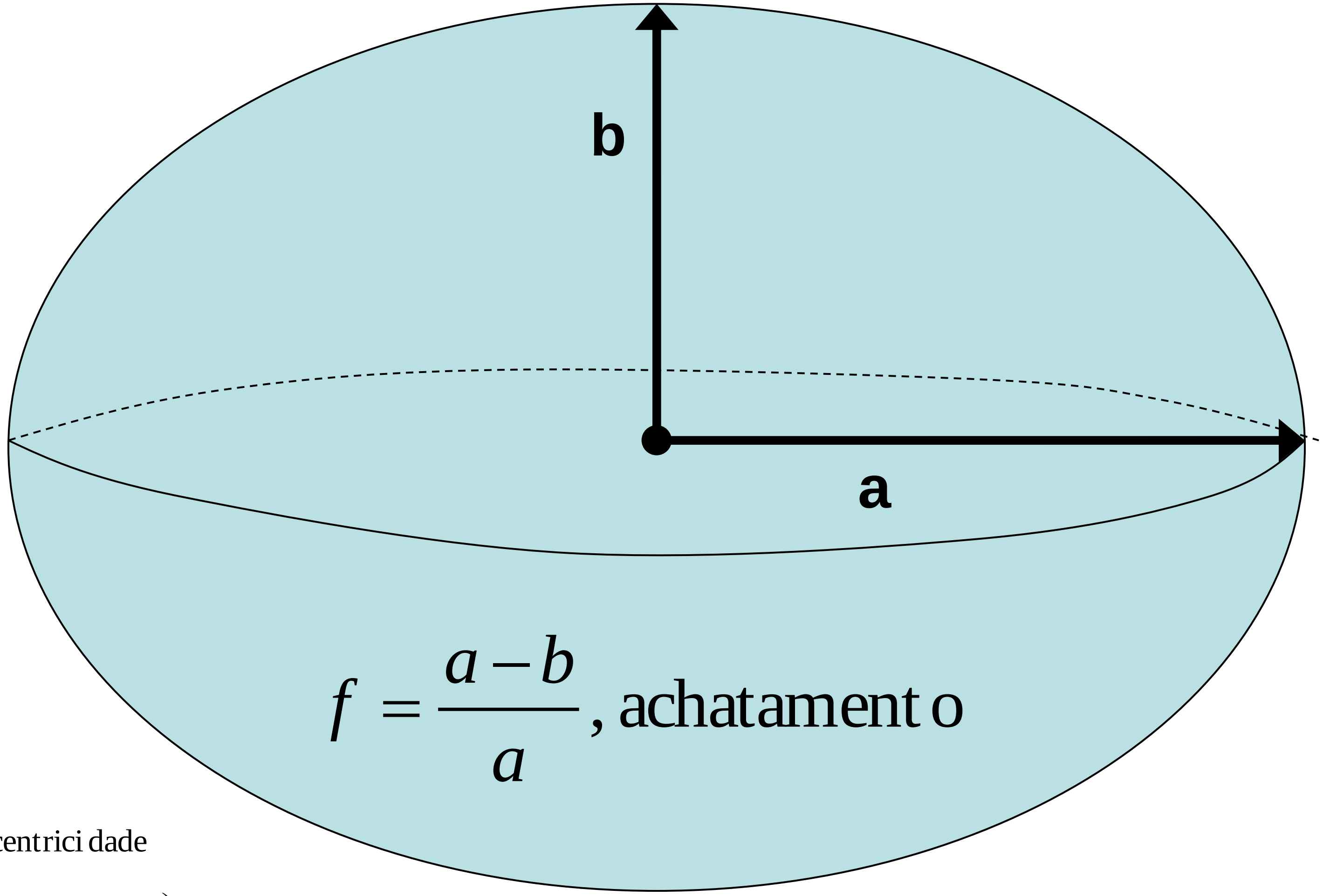
O cálculo das posições geográficas na superfície da Terra é bastante complexo.

Tal como foi referido, a confirmação de uma Terra não esférica remonta ao sec. XVIII

Um modelo matemático mais simples é necessário. Este modelo é o *elipsóide de revolução*

Baseado em informação do Doutor Rui Fernandes (UBIi)

O elipsóide a as suas propriedades



$$f = \frac{a-b}{a}, \text{achatamento}$$

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \text{primeira excentricidade}$$

$$\left(e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}, \text{segunda excentricidade} \right)$$

a – semi-eixo maior

b – semi-eixo menor

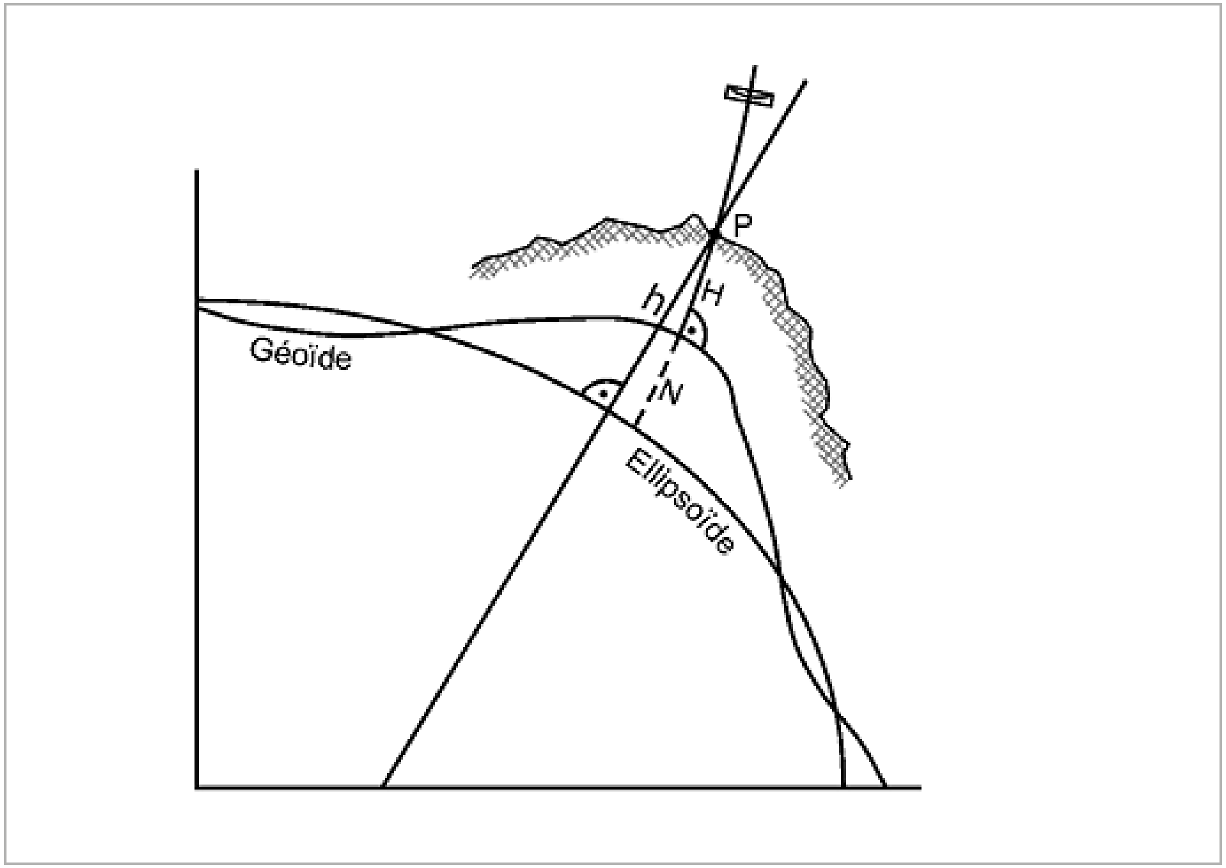
Ellipsoid Name	Semi Major Axis (a)	Inverse Flattening (f)
Airy 1830	6377563.396	299.3249646
Australian 1965	6378160	298.249997276158
Australian National	6378160	298.25
Average Terrestrial System 1977	6378135	298.257
Bessel	6377397.155	299.1528128
Bessel 1841 Namibia	6377483.865	299.1528128
Bessel 1841 Norway	6377492.0176	299.1528
Clarke 1858	6378350.87	294.26
Clarke 1866	6378206.4	294.978698213898
Clarke 1866 Michigan	6378450.0475489	294.978697164675
Clarke 1880	6378249.145	293.465
Clarke 1880 Arc	6378249.145	293.4663077
Clarke 1880 IGN	6378249.2	293.466021293627
Clarke 1880 Palestine	6378300.789	293.466
Danish 1876	6377019.27	300
Everest 1830 (1975 Definition)	6377299.151	300.8017255
Everest 1830 India	6377276.345	300.801698010257
Everest 1830 Malaysia	6377298.556	300.801695730853
Everest 1948	6377304.063	300.8017
Everest 1956 India	6377301.243	300.801694777354
Everest 1964 Malaysia & Singapore	6377304.063	300.801700097124
Everest 1969 Malaysia	6377295.664	300.80170120309
Everest Pakistan	6377309.613	300.815895223234
Everest Sabah Sarawak	6377298.556	300.8017

http://www.eye4software.com/products/coordinatecalculator/ellipsoids/

Fischer 1968	6378150	298.3
Fisher 1960	6378155	298.299993265267
GRS67	6378160	298.247167427
GRS80	6378137	298.257222101
Hayford 1909	6378388	296.959263
Hayford 1924	6378388	297
Helmert 1906	6378200	298.3
Hough 1906	6378270	296.999993993204
Indonesian 1974	6378160	298.246998807038
International 1924	6378388	297
Krassovsky 1940	6378245	298.300003166222
Modified Airy	6377340.189	299.324965463529
Modified Everest	6377304.063	300.8017
Modified Fischer 1960	6378155	298.3
NWL 9D	6378145	298.25
Plessis 1817 France	6376523	308.6409971
South American 1969	6378160	298.249997276158
Struve 1860	6378298.3	294.73
War Office	6378300	296
WGS60	6378165	298.3
WGS66	6378145	298.25
WGS72	6378135	298.259999775532
WGS84	6378137	298.257223563
Xian 1980	6378140	298.257

http://www.eye4software.com/products/coordinatecalculator/ellipsoids/

Assim, na modelação da forma da Terra são definidas três superfícies essenciais: topográfica (que contém o relevo), **elipsóide** e geóide (que trataremos mais à frente).



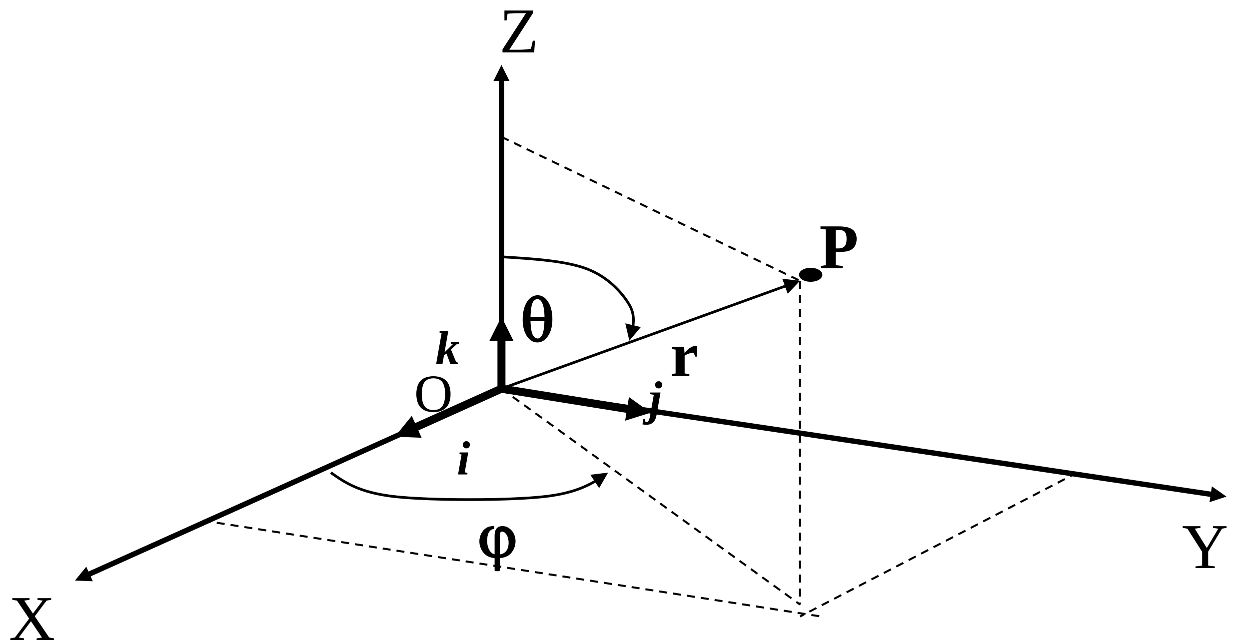
http://www.swisstopo.admin.ch/internet/swisstopo/en/home/topics/survey/sys/geoid.parsys.19997.Image.gif

Referenciar a posição de um ponto

Para referenciar um ponto numa curva (eg esférica, elipsoidal) usa-se normalmente coordenadas curvilíneas.

O sistema de coordenadas curvilíneas mais usado é o das coordenadas esféricas

__Coordenadas esféricas__ (r,θ,φ; sistema directo) **:**



$0 \leq r < \infty$, coordenada radial

$0^{o} \leq \theta \leq 180^{o}$, coordenada polar

$0^{o} \leq \varphi < 360^{o}$, coordenada azimutal

Transformações de coordenadas entre os sistemas esférico e cartesiano e *vice-versa*:

$$(r,\theta,\varphi)\rightarrow(x,y,z)$$

$$\begin{cases} x = r\ .\ \text{sen}\ \theta.\ \cos\varphi \\ y = r\ .\ \text{sen}\ \theta.\ \text{sen}\ \varphi \\ z = r\ .\ \cos\theta \end{cases}$$

Nota:

OP = $(r\ .\ \text{sen}\ \theta.\ \cos\varphi)\boldsymbol{i} + (r\ .\ \text{sen}\ \theta.\ \text{sen}\ \varphi)\boldsymbol{j} + (r\ .\ \cos\theta)\mathbf{k}$

ou

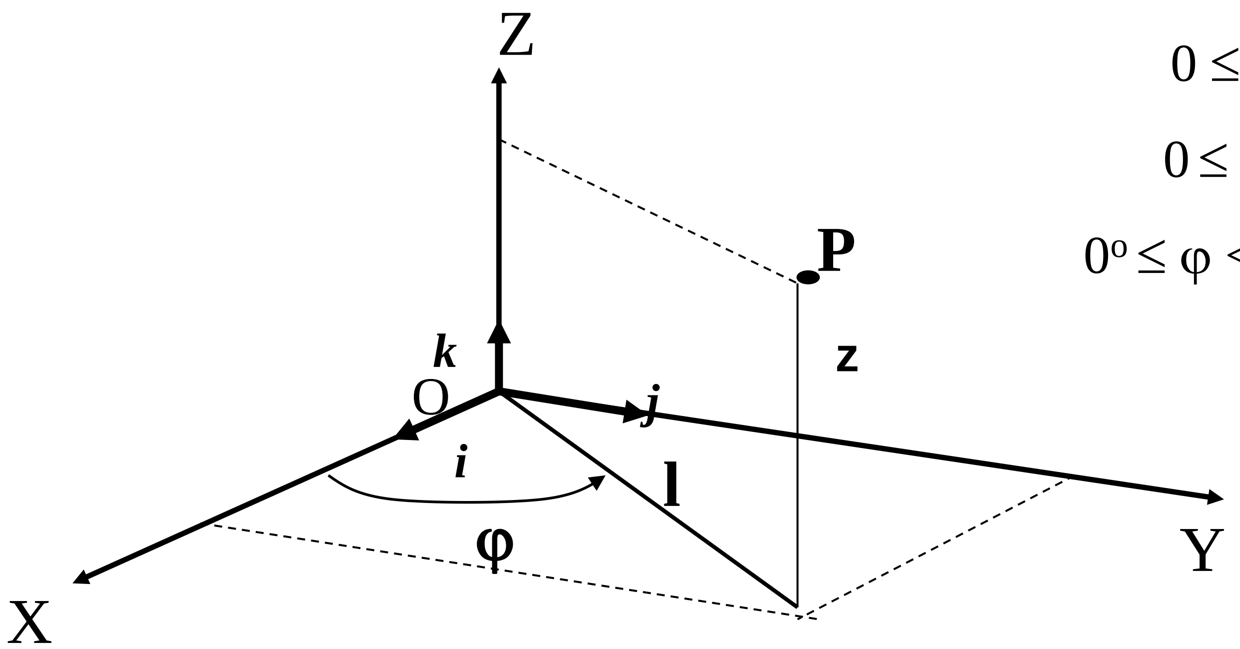
OP = $(r\ .\ \text{sen}\ \theta.\ \cos\varphi,\ r\ .\ \text{sen}\ \theta.\ \text{sen}\ \varphi,\ r\ .\ \cos\theta)$

$$(r,\theta,\varphi)\leftarrow(x,y,z)$$

$$\begin{cases} r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ \theta = \text{arc}\cos\,[z \times (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}] \\ \varphi = \text{arc tg}\ (y/x) \end{cases}$$

Uma alternativa (menos usada) ao sistema de coordenadas esféricas é o sistema de coordenadas cilíndricas.

<u>Coordenadas cilíndricas</u> (l,z,φ; sistema directo) **:**



$0 \leq l < \propto$, coordenada radial

$0 \leq z \leq \propto$, coordenada polar

$0^o \leq \varphi < 360^o$, coordenada azimutal

Referenciar a posição de um ponto

Porém o simples conhecimento de um sistema de coordenadas não é suficiente para a referenciação.

Essa exige um …

SISTEMA DE REFERÊNCIA

Sistemas de referências

Um sistema de referência exige:

- Um sistema de coordenadas
- Uma origem para esse sistema
- Uma plano fundamental
- Uma orientação
- Uma unidade de comprimento

Sistemas de referências

Um exemplo será o sistema de referência de coordenadas geográficas:

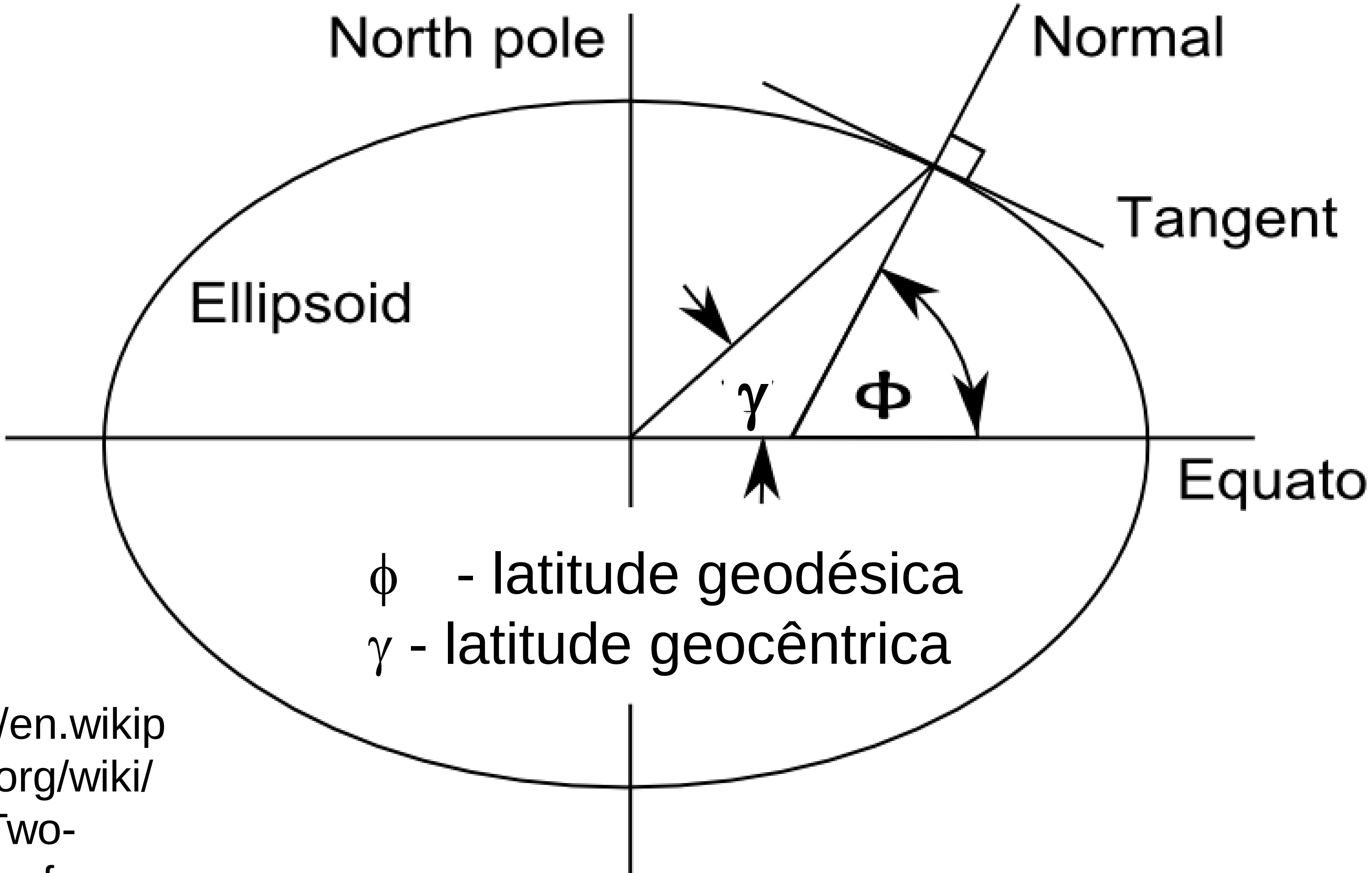
- Um sistema de coordenadas (geográficas – latitude e longitude)
- Uma origem para esse sistema (centro da Terra – geocêntrico)
- Uma plano fundamental (equador)
- Uma orientação do eixo do xx (meridiano de Greenwich)
- Uma unidade de comprimento (p.e. Km)

Sistemas de referências

Outro exemplo será o sistema de referência de coordenadas eclípticas celestes:

- Um sistema de coordenadas (eclípticas – latitude e longitude celestes)
- Uma origem para esse sistema (centro de massa do sistema solar – baricêntrico)
- Uma plano fundamental (plano da eclíptica = plano da órbita da Terra em torno do Sol)
- Uma orientação do eixo do xx (ponto vernal = equinócio da primaver)
- Uma unidade de comprimento (p.e. Unidade Astronómica = 150 000 000 km)

Sistemas de coordenadas elipsoidais



ϕ - latitude geodésica

γ - latitude geocêntrica

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Two-types-of-latitude.png

Transformação entre a latitude geocêntrica e geodésica

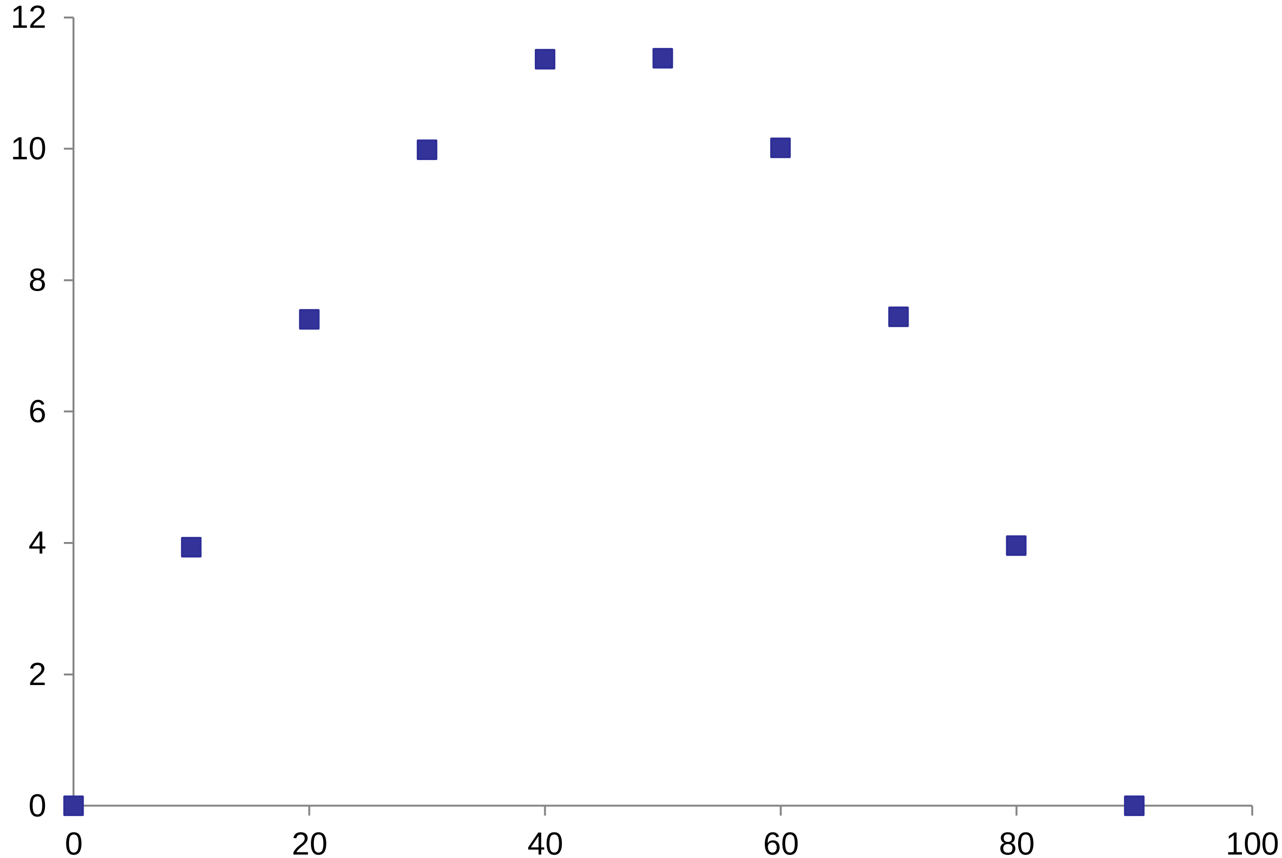
$$\tan\gamma = (1-e^2)\tan\phi$$

Desenvolvendo tan ϕ - tan γ em série:

$$\phi-\gamma = \frac{1}{2}e^2\sin 2\phi + \ldots$$

Transformação entre a latitude geocêntrica e geodésica

$$\phi - \gamma(')$$



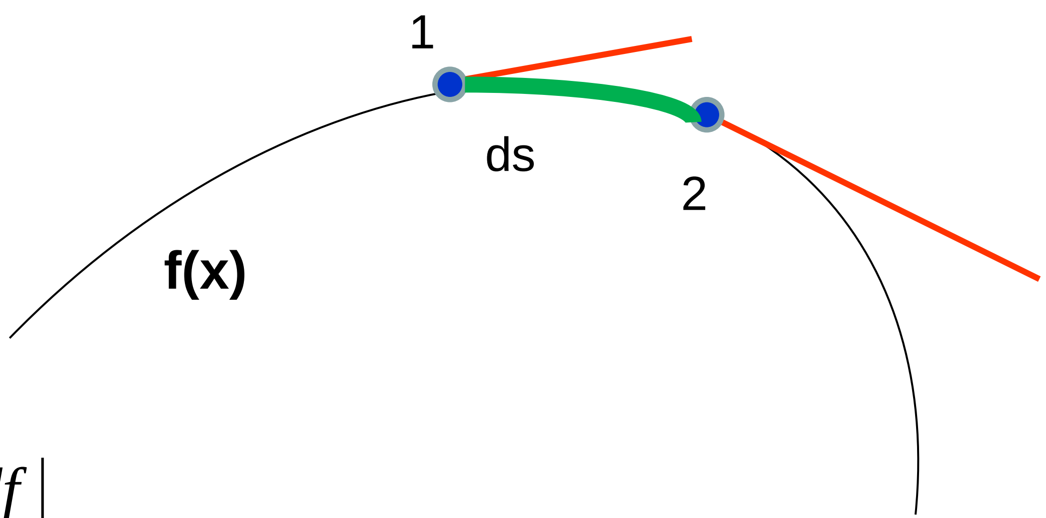
$$\phi(^{o})$$

Max para
γ= 45º

Curvatura de uma superfície. Raio de curvatura

A curvatura de uma curva é quociente de duas grandezas:

- A variação do declive da recta tangente
- Espaço percorrido ao longo da curva



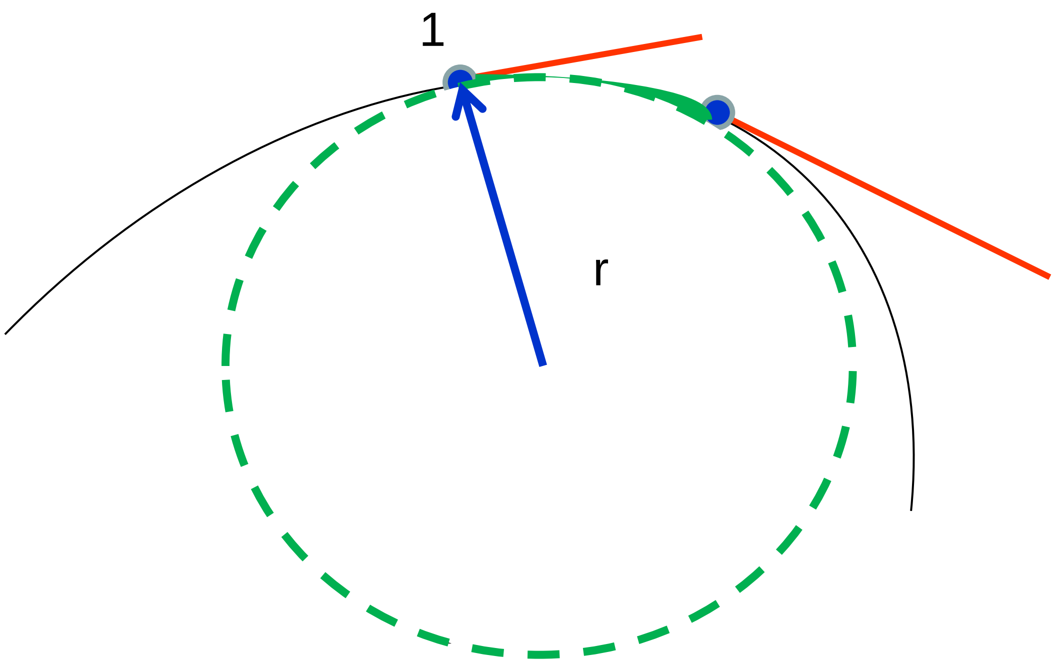
$$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_1 = \left.\frac{df}{dx}\right|_1 \text{ e } m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \left.\frac{df}{dx}\right|_2$$

$$curvatura = \frac{m_2 - m_1}{ds} = \frac{dm}{ds}, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Nota: a curvatura é nula para um plano

Curvatura de uma superfície. Raio de curvatura

r = raio de curvatura



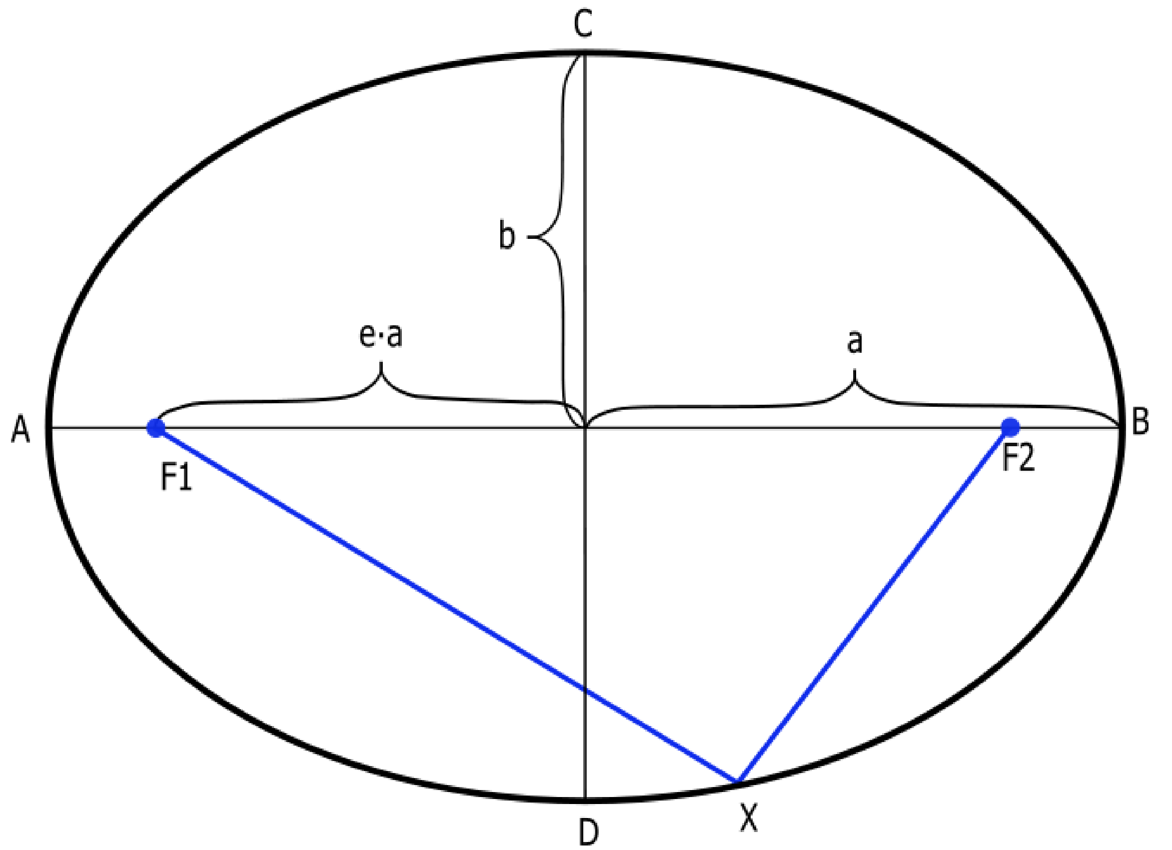
$$\frac{dm}{ds} = \frac{1}{r}$$

- Um circunferência tem curvatura constante e raio de curvatura constante
- Um plano tem curvatura nula e raio de curvatura infinito
- Uma elipse não tem um raio de curvatura constante

Seja uma curva $y = f(x)$, com a curvatura (k) e o raio de curvatura (r), temos:

$$k = \frac{1}{r} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Curvatura e raio de curvatura: o caso de uma elipse



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, e=\frac{c}{a}$$

http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Elipse.svg

Curvatura e raio de curvatura: o caso de uma elipse. Raios de curvatura principais

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}}$$

Raio de curvatura do meridiano

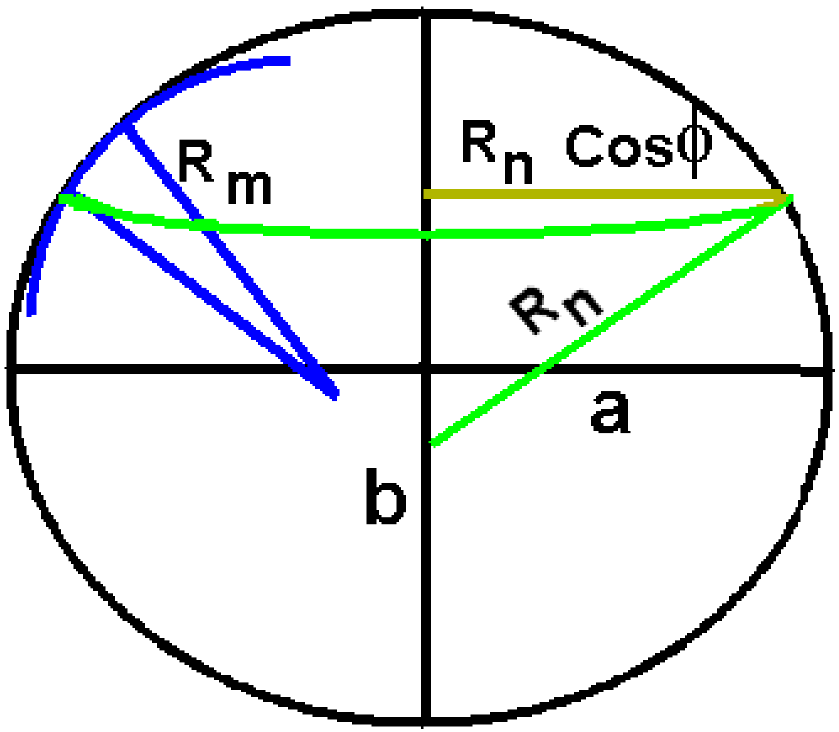
$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}}$$

Raio de curvatura da normal

Curvatura e raio de curvatura: o caso de uma elipse. Raios de curvatura principais- Representação gráfica.

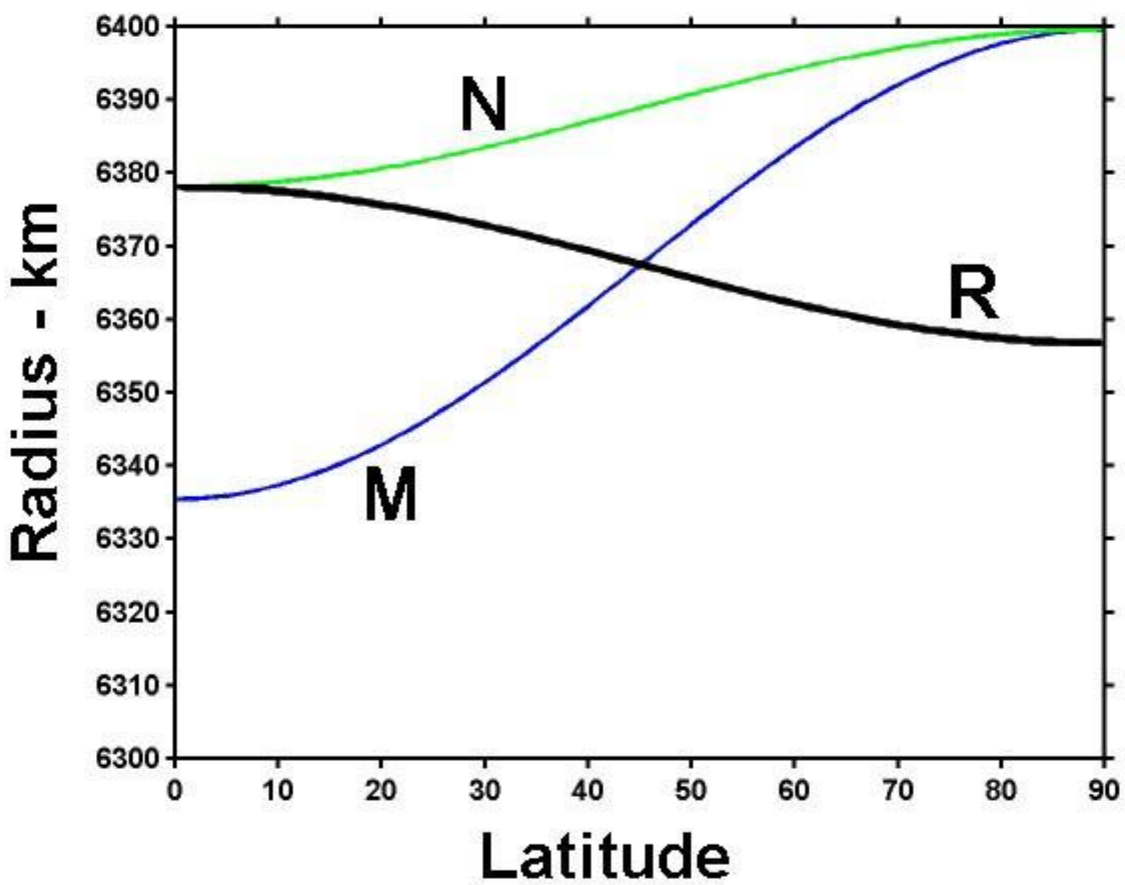
$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}}$$



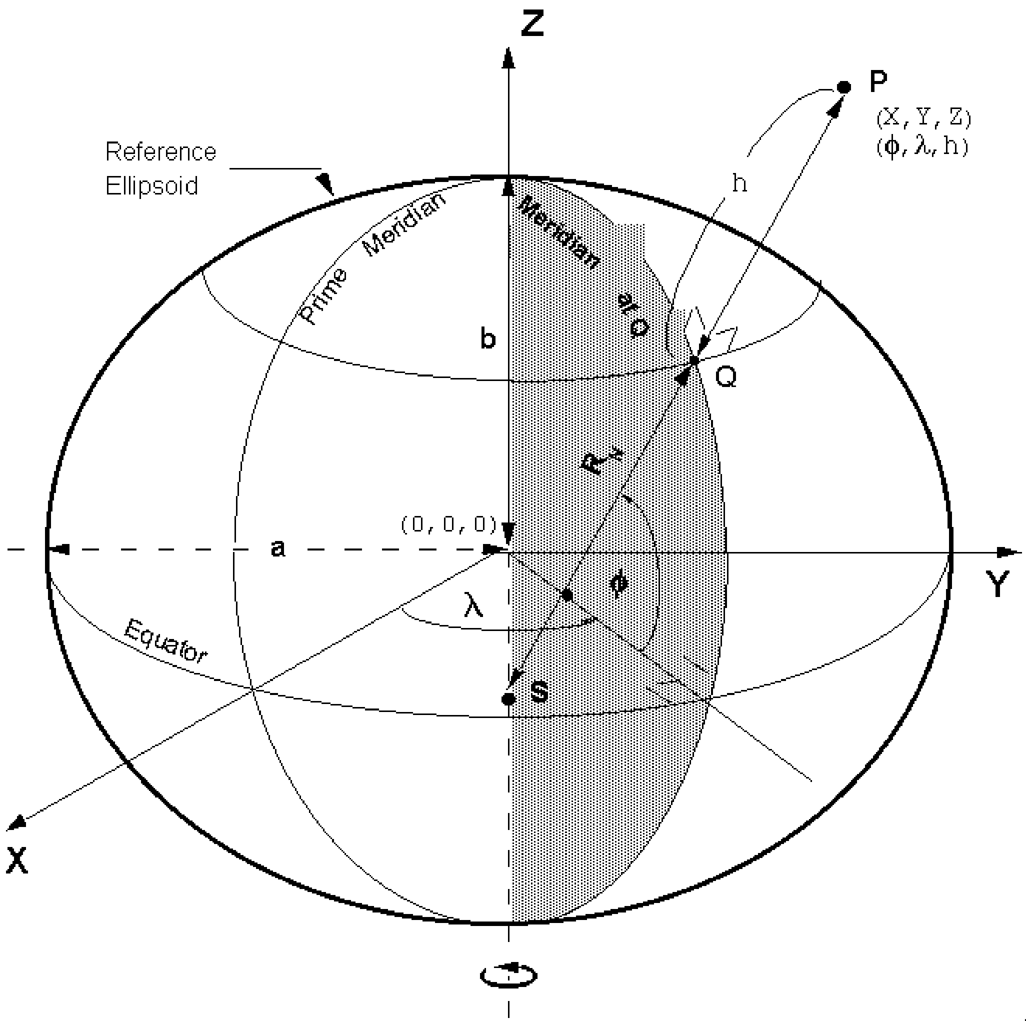
Radii of Curvature

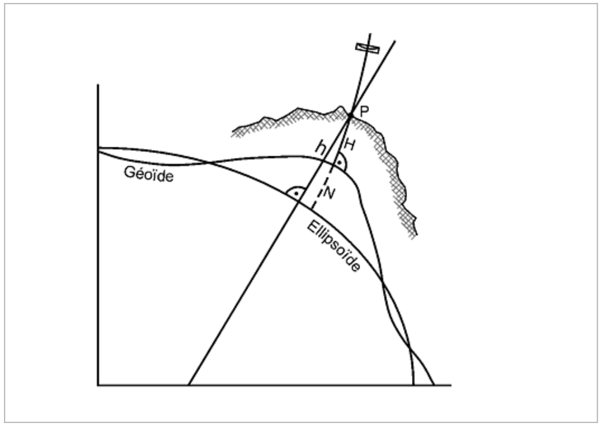
Curvatura e raio de curvatura: o caso de uma elipse. Raios de curvatura principais (WGS84)



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/c/c5/EarthEllipRadii.jpg

Sistema de coordenadas (esféricas) geodésicas – (λ,ϕ,h – altura elipsoidal)





h – altura elipsoidal

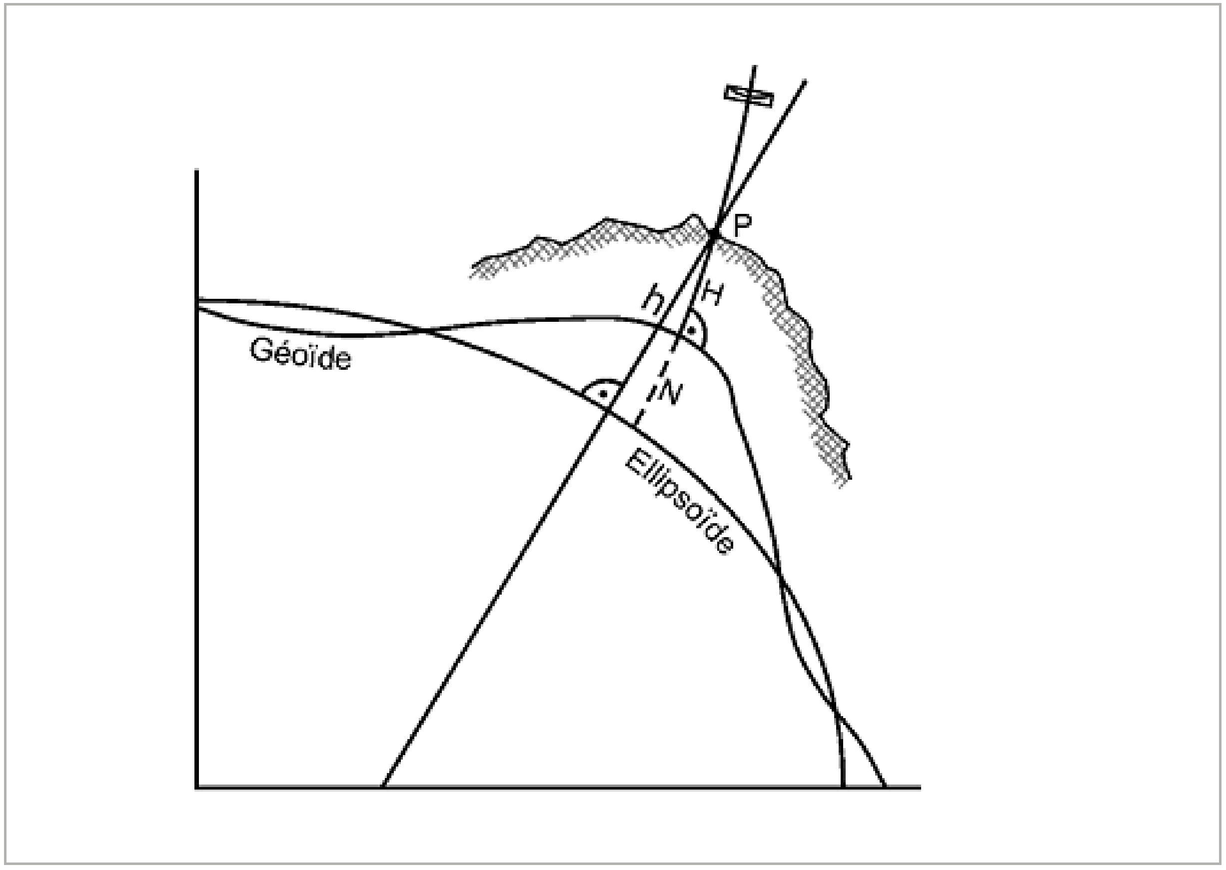
http://upload.wikimedia

Sistema de coordenadas (esféricas) geodésicas – (transformações)

$$\begin{cases} x = (N + h)\cos\phi\cos\lambda \\ y = (N + h)\cos\phi\sin\lambda \\ z = \left[N(1 - e^2) + h\right]\sin\phi \end{cases}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2\phi)^{1/2}} \qquad e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

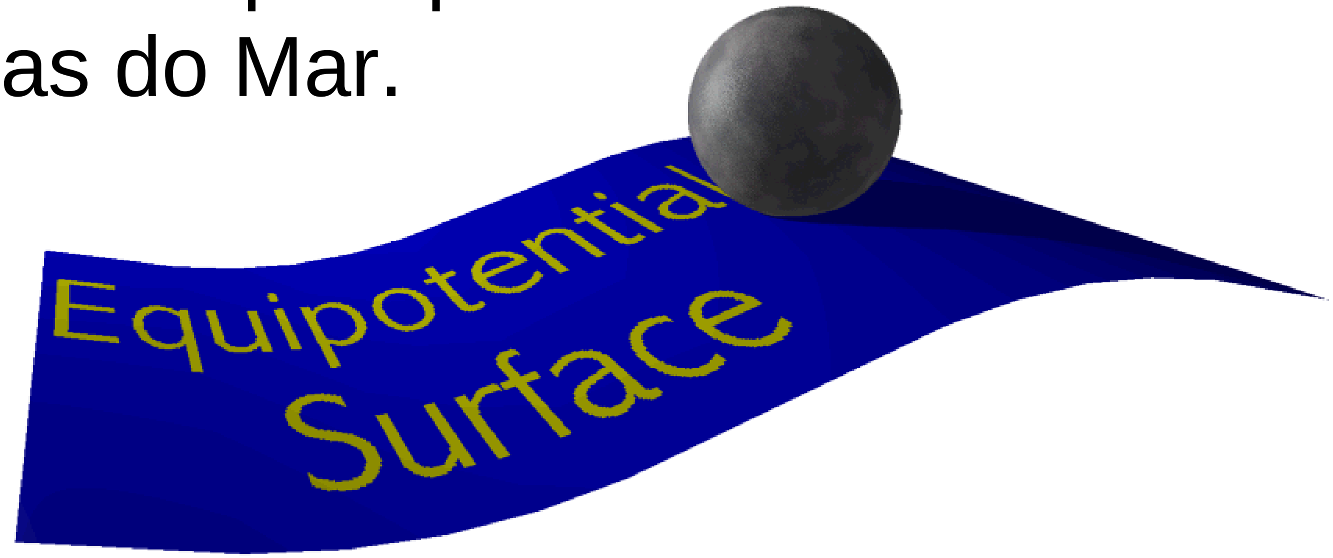
Assim, na modelação da forma da Terra são definidas três superfícies essenciais: topográfica (que contém o relevo), **elipsóide** e geóide (que trataremos mais à frente).



http://www.swisstopo.admin.ch/internet/swisstopo/en/home/topics/survey/sys/geoid.parsys.19997.Image.gif

Geóide

Uma superfície gravitacional de igual potencial que aproxima o Nível Médio das Águas do Mar.



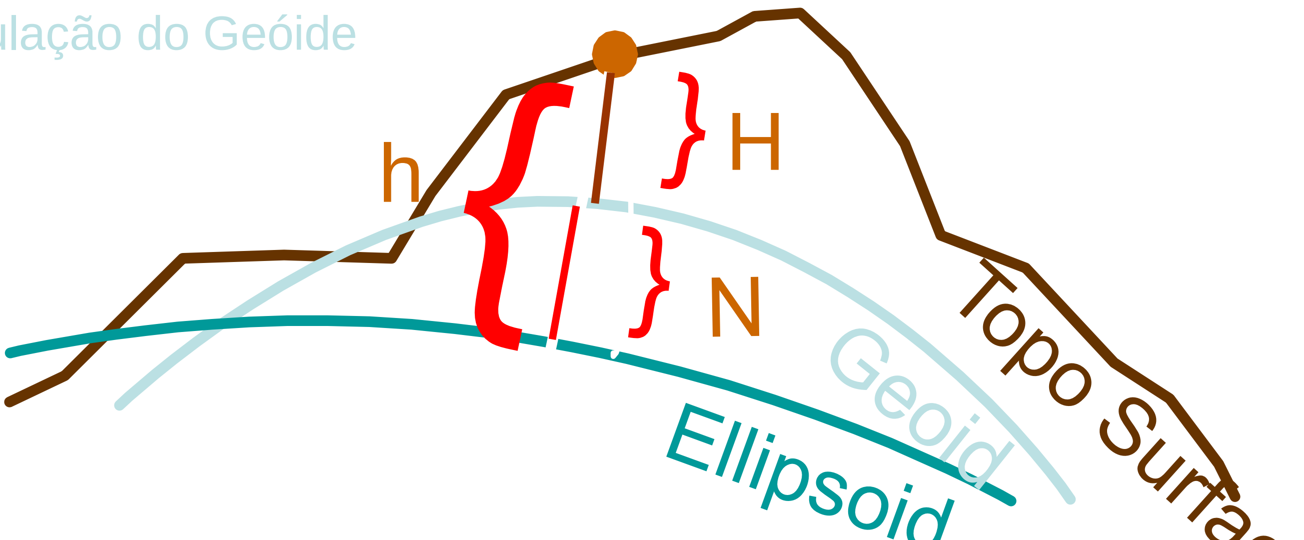
Ondulação do Geóide

Definição da Posição Vertical

H - Altitude Ortométrica (Altitude acima [Nível Médio das Águas do Mar])

h - Altitude elipsóidal (Altitude acima Elipsóide)

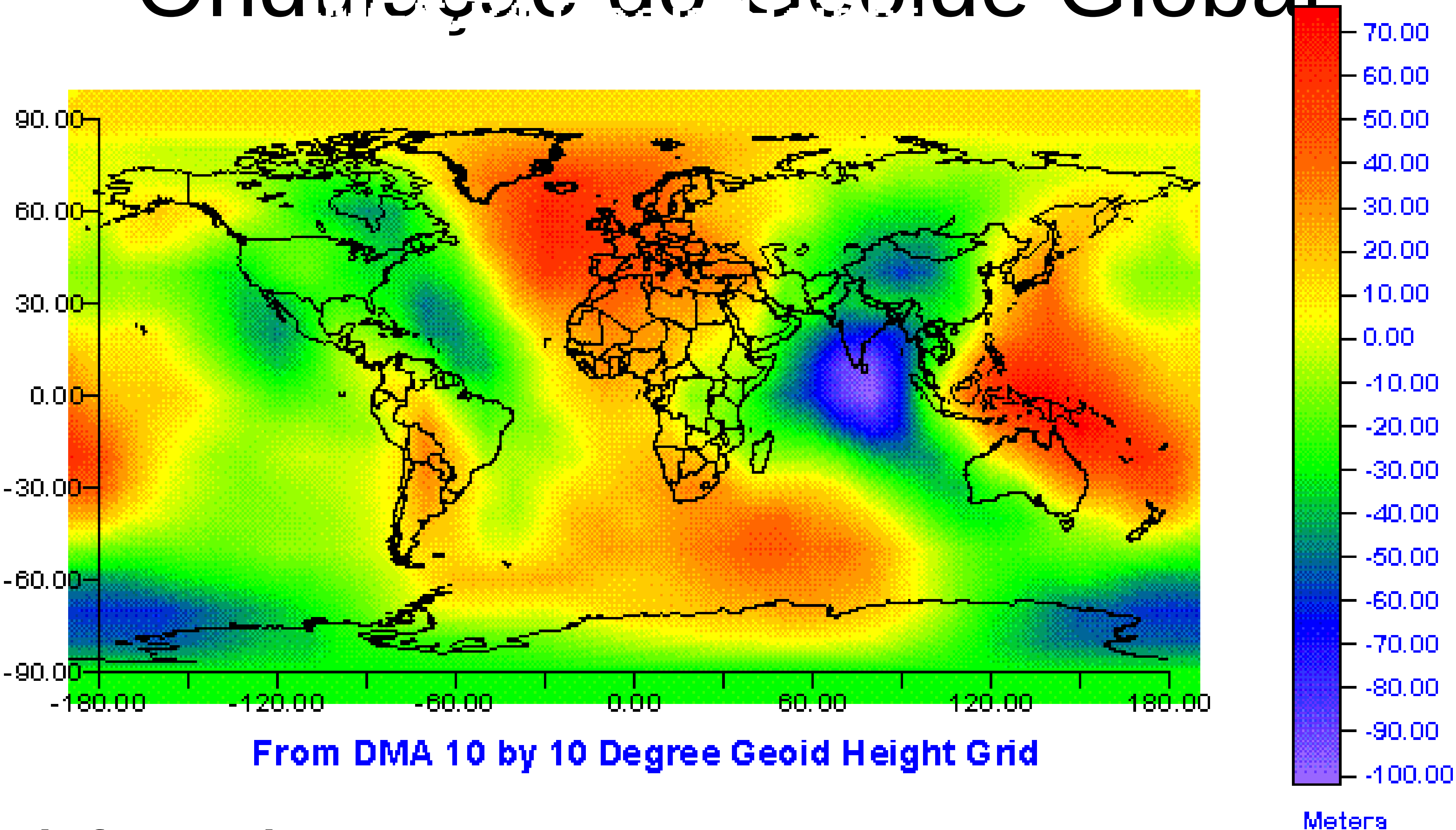
N - Ondulação do Geóide



H é medido tradicionalmente (nivelamento + gravimetria)
h é aproximadamente = N+H
N é modelado (modelos locais, regionais ou globais (e.g., EGM96)

Baseado em informação do
Doutor Rui Fernandes (UBI)

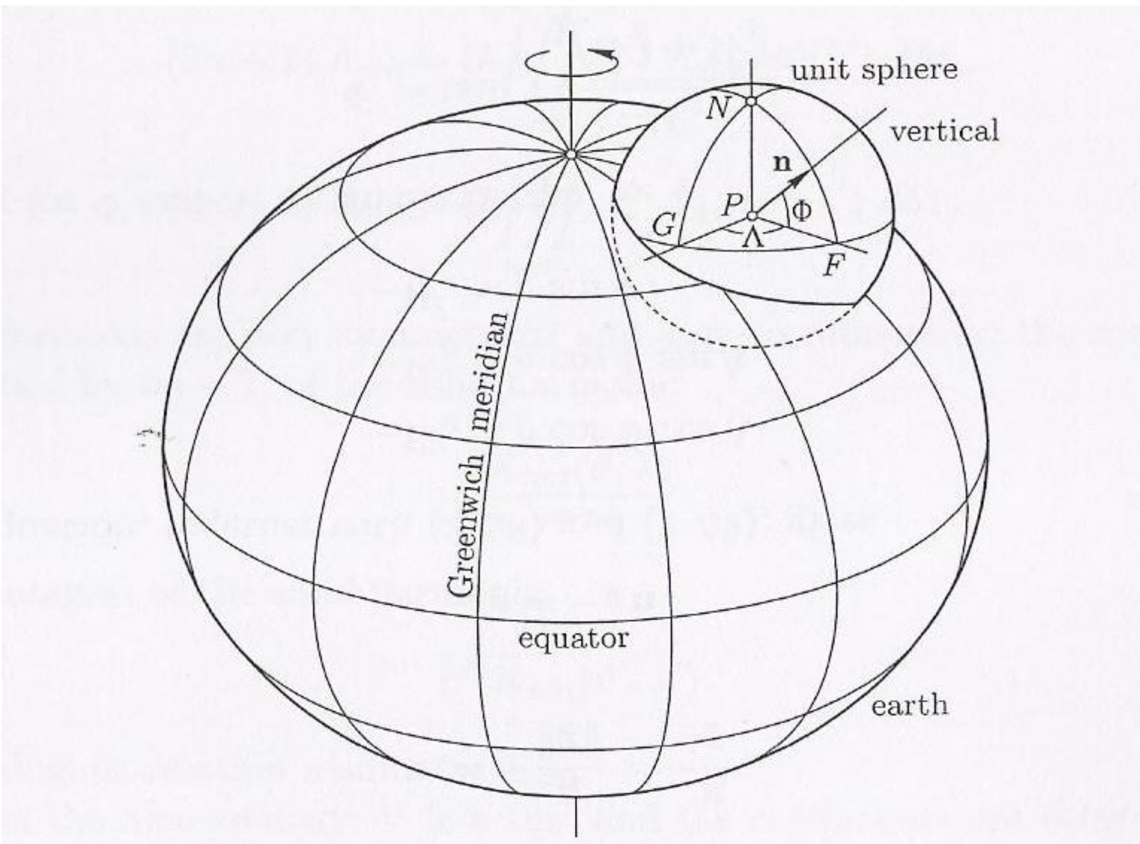
Ondulação do Geóide Global



(ref. WGS84)

Baseado em informação do
Doutor Rui Fernandes (UBI)

Latitude e longitude astronómicas (~ coordenadas naturais)



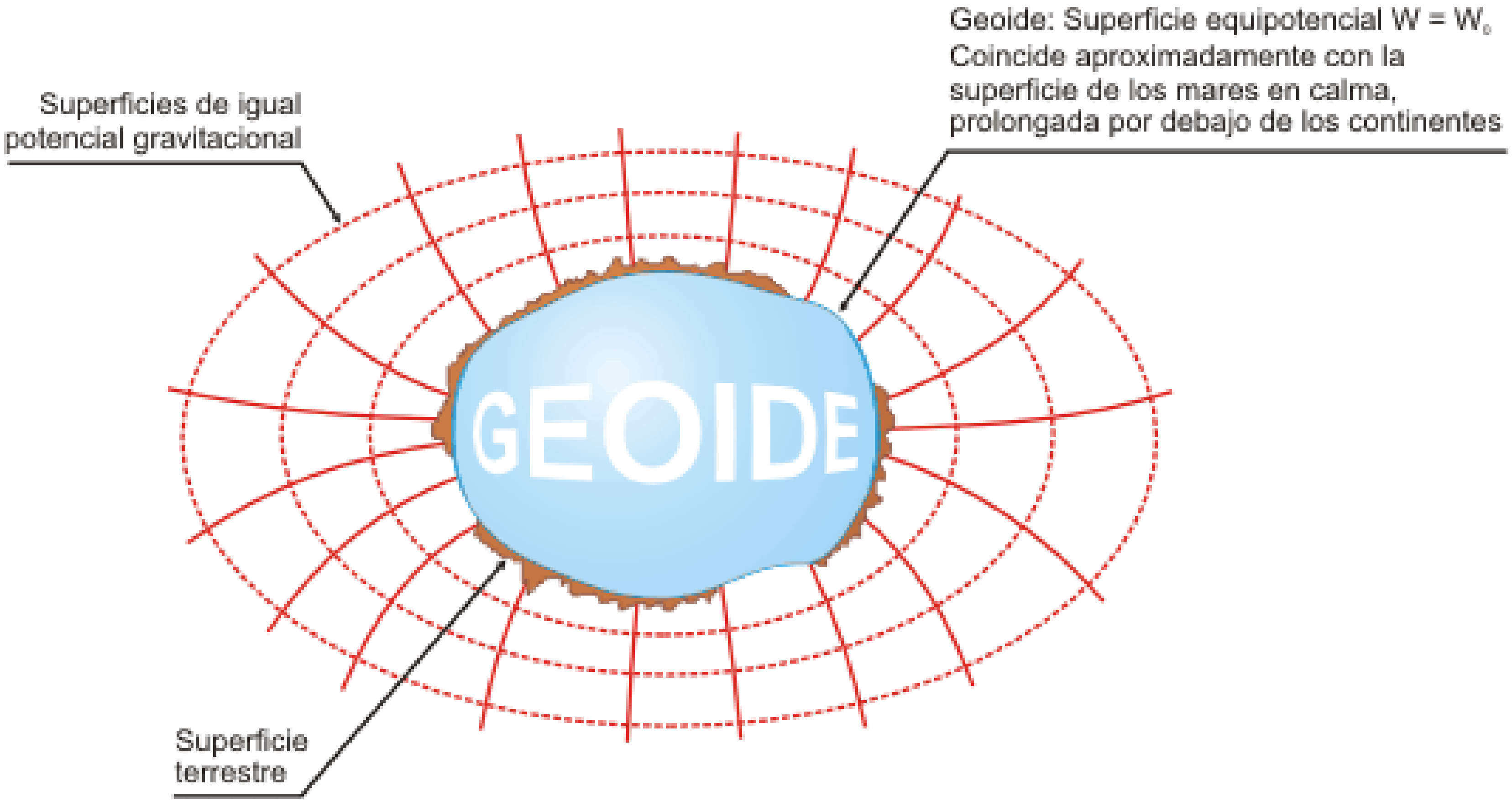
$$\mathbf{n} = [\cos\Phi\ \cos\Lambda,\ \cos\Phi\ \sin\Lambda,\ \sin\Phi]$$

Φ- latitude astronómica (vertical – fio de prumo) – (definição do equador ?)

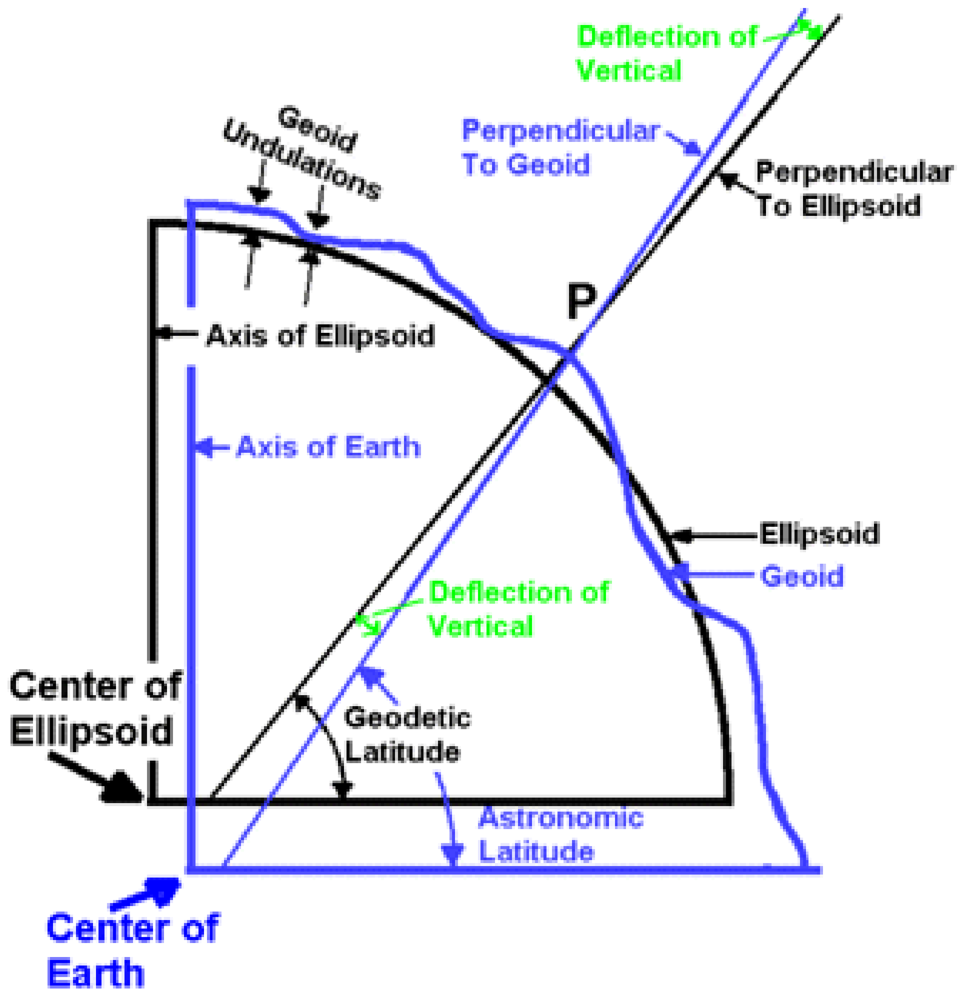
Λ- longitude astronómica

H – altitude ortomérica

Definição de Geoide



Ref: G. Ortiz



Orientation of Ellipsoid Center
With Respect to Earth's Center

Figure 16

http://www.oc.nps.edu/oc2902w/geodesy/geolay/gfl84b_b.htm

- Não existe uma representação matemática (no sentido da existência de uma expressão analítica) do geoide.

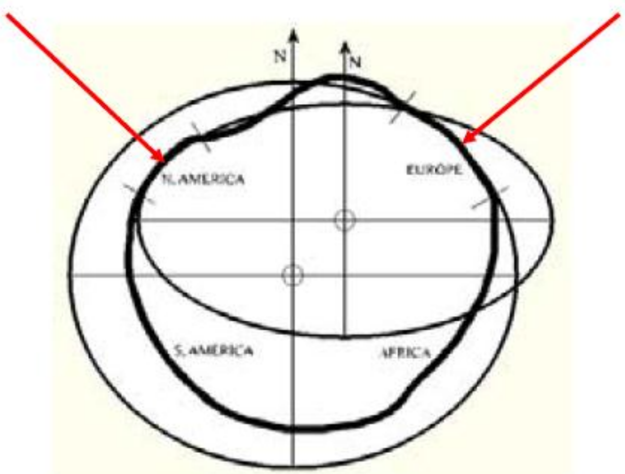
- A forma matematicamente mais simples (porém realista) é a de um elipsóide de revolução.

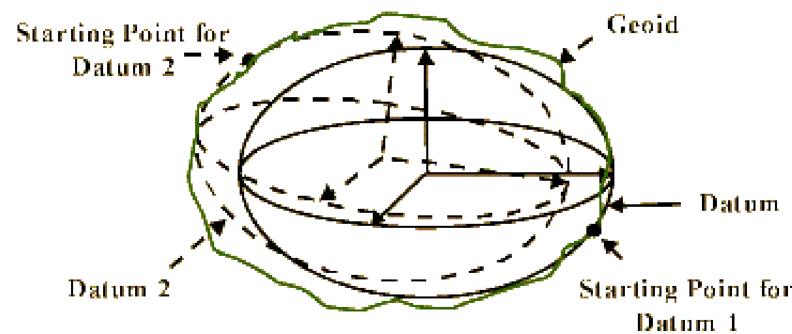
- Por forma a utilizar o elipsóide como aproximação ao geoide deve estabelecer-se um semi-eixo maior e um achatamento, o centro do elipsóide relativamente ao centro da Terra e a orientação do elipsóide (eg orientação dos eixo dos XX).

- Ao conjunto de parâmetros necessários para materializar esta aproximação denomina-se Datum geodésico.

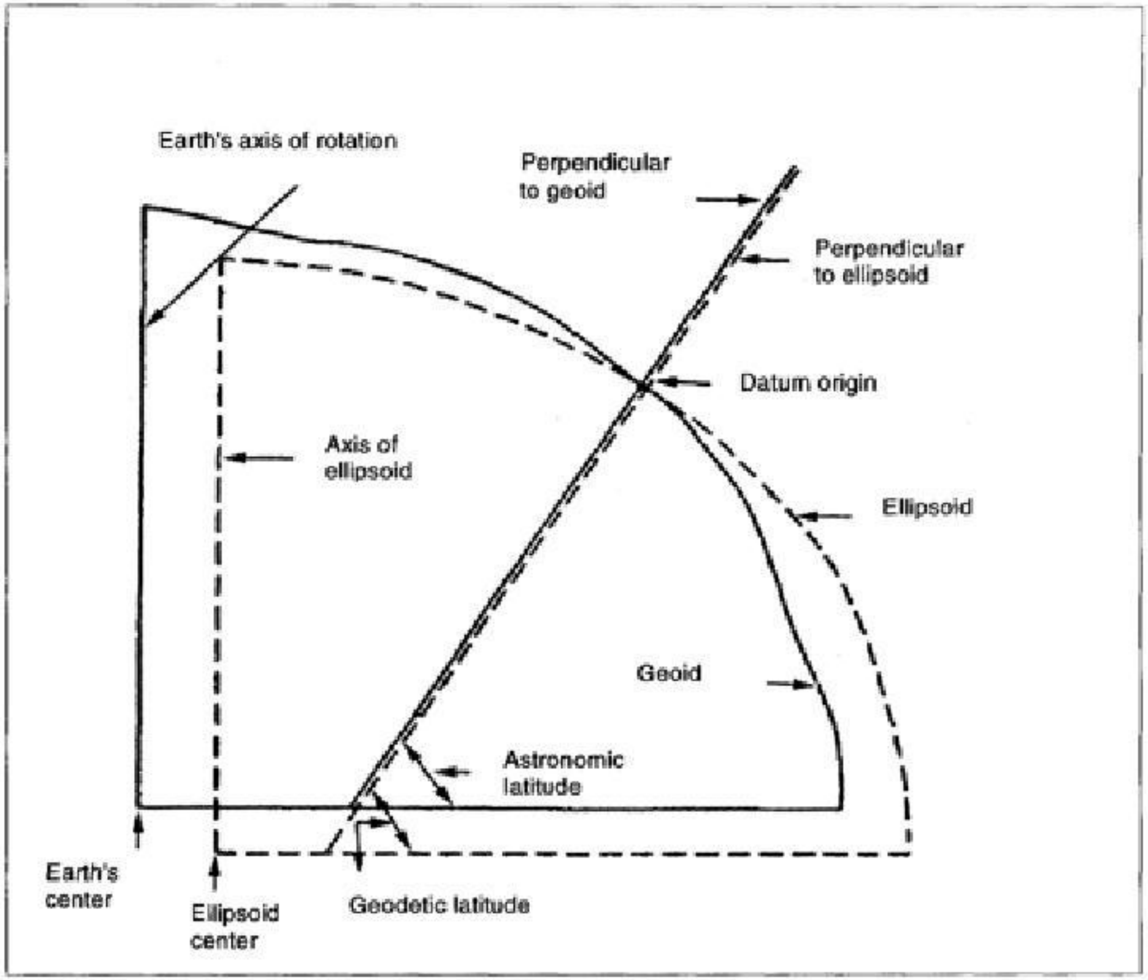
Datum local

O datum local, caracteriza-se pelo facto de ajustar uma pequena região (normalmente a sua determinação é feita por entidades nacionais) e tem como ponto fundamental o ponto de fixação, onde as coordenadas geodésicas (referidas ao elipsóide) são coincidentes com as coordenadas astronómicas.





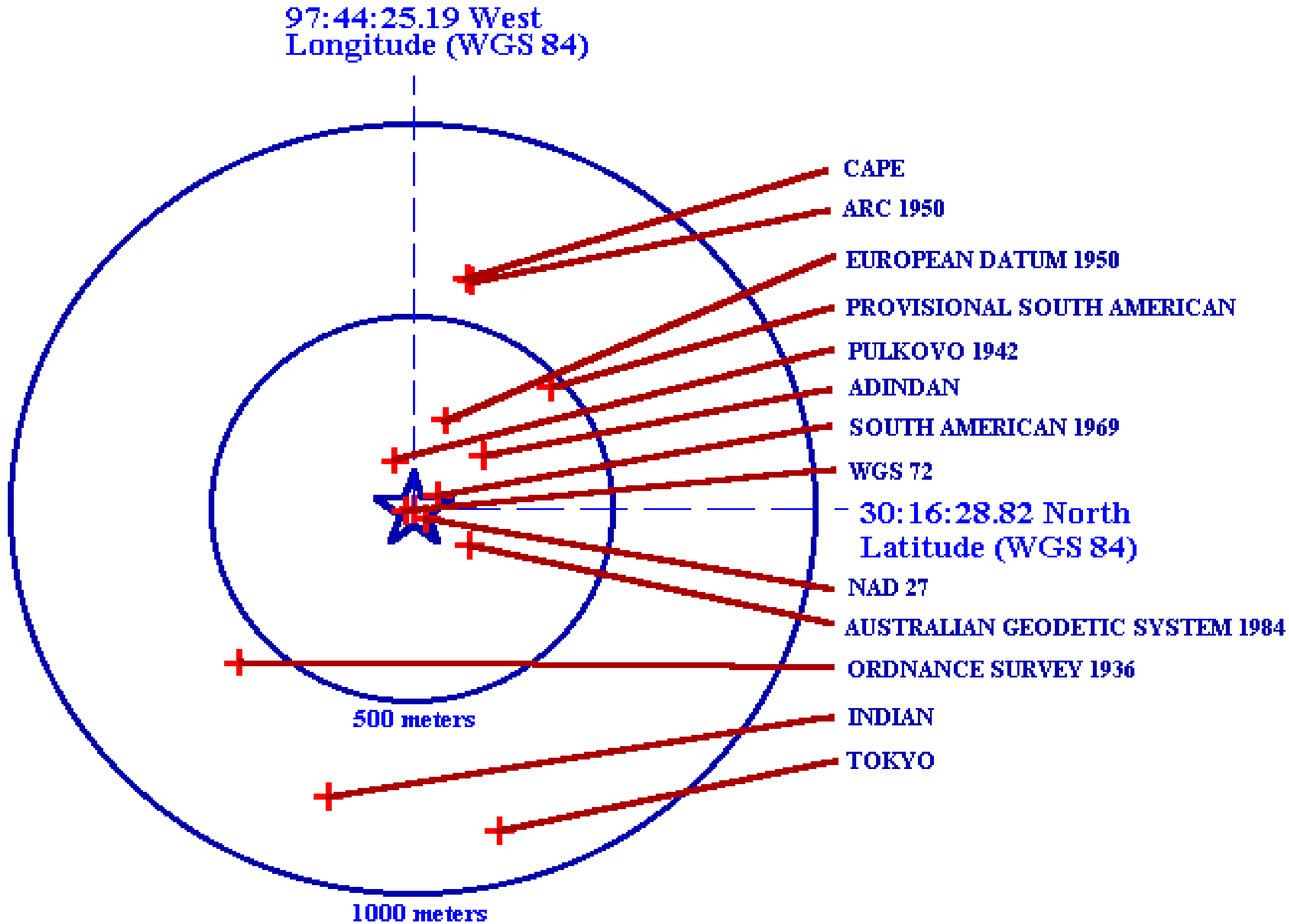
Dois elipsóides iguais podem dar origem a dois data (data – plural de datum) diferentes (figura de cima). Para modelar duas regiões diferentes da superfície terrestre podem ser usados data diferentes (figura da esquerda)



http://www.tpub.com/content/armyengineer/en0593a/en0593a0032.htm

Datum global

O datum global, caracteriza-se pelo facto de ajustar o geoide no seu todo (normalmente a sua determinação é feita internacionalmente) e tem como ponto fundamental o centro do elipsóide que terá que ser tão próximo quanto possível do centro da Terra (centro de massa) e o coincidir semi-eixo menor do elipsóide com o eixo de rotação da Terra. Exemplo: WGS 84.



Position Shifts from Datum Differences

Texas Capitol Dome Horizontal Benchmark

Peter H. Dana 9/1/94

Tabela 1.4 - *Data* geodésicos utilizados em Portugal

Designação comum	*Elipsóide*	*Ponto de fixação*	*Utilização actual*
Datum Puissant-Lisboa	Puissant	Castelo de S. Jorge	-
Datum Lisboa	Hayford	Castelo de S. Jorge	Cartografia topográfica e hidrográfica do continente.
Datum 73	Hayford	Melriça	Topografia, cartografia topográfica e ortofoto-cartografia mais recente.
Datum Porto Santo	Hayford	Porto Santo	Arquipélago da Madeira.
Datum S. Braz	Hayford	São Braz (Ilha de S. Miguel)	Arquipélago dos Açores, Grupo Oriental.
Datum Base SW	Hayford	Base SW (Ilha Graciosa)	Arquipélago dos Açores, Grupo Central.
Datum Observatório	Hayford	Observatório (Ilha das Flores)	Arquipélago dos Açores, Grupo Ocidental.
Datum Selvagens	Clarke	Marco Astronómico (Selvagem Grande)	Cartografia náutica das Ilhas Selvagens.
Datum Europeu ED50	Hayford	Potsdam (Alemanha)	Geodesia e Topografia, cartografia náutica do continente.
WGS84	Hayford	Não tem (*datum* global)	Geodesia, sistemas de posicionamento globais.

www.isa.utl.pt/dm/sigdr/sigdr04-05/9_SistRefPortugueses.ppt